УДК 532.5:534.1

© 1994 г. Р.Р. Гадыльшин

# О СИСТЕМАХ АКУСТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Метод сращиваемых асимптотических разложений применяется в исследовании квазистатического режима системы из акустических резонаторов с малыми отверстиями, представляющей собой либо вложенные один в другой, либо последовательно соединенные резонаторы. Для аналитического продолжения функции Грина указанных систем построены асимптотики по малому параметру ("радиусу" отверстий) полюсов, сходящихся к нулю. Приведены пиковые значения главных членов асимптотик решений для задач рассеяния и излучения.

Резонатор Гельмгольца представляет собой идеально жесткую "почти замкнутую" поверхность $\Gamma_\varepsilon = \Gamma\backslash\overline{\omega}_\varepsilon$, где $\Gamma$ – граница конечного объема $\Omega$, а $\omega_\varepsilon$ – часть $\Gamma$ "радиуса" $\varepsilon^2 \ll 1$ [1–5]. Рассеяние внешнего поля с потенциальной скоростью $\mathbf{v}^{\text{out}} = \nabla u^{\text{out}}$ на $\Gamma_\varepsilon$ описывается решением краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца с граничным условием на $\Gamma_\varepsilon$. Резонансные явления заключаются, в частности, в том, что при частотах $k$, близких к собственным частотам объема $\Omega$, поле, рассеянное на $\Gamma_\varepsilon$, существенно отличается от поля, рассеянного на $\Omega$ [1–3, 5]. Объясняются резонансы следующим [6]. Функция Грина внутренней предельной задачи (задача Неймана в $\Omega$) в окрестности простого собственного значения $k_0^2$ имеет вид

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k) = (k_0^2 - k^2)^{-1}\psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)$$

где $\psi$ – соответствующая собственная функция, а функция $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)$ регулярна по переменной $k$. Резонансы являются следствием существования у функции Грина $G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)$ резонатора комплексных полюсов, сходящихся при уменьшении отверстия к вещественным полюсам (собственным частотам) $k_0$ функции Грина предельной задачи. Если $k_0 \neq 0$, то $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)$ имеет полюс первого порядка по $k$. Такой же порядок наследует и полюс функции $G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)$, сходящийся к $k_0$. Если же $k_0 = 0$, то $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)$ имеет уже полюс второго порядка (по $k$), а функция $G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)$ имеет два полюса первого порядка, стремящиеся к нулю, и вычеты в этих полюсах неограниченно растут при $\varepsilon \to 0$. Последний факт выделяет квазистационарный режим среди других резонансных режимов [1,8].

Известно также [6,9], что если $k_0^2$ – двухкратное собственное значение закрытого резонатора, то у возмущенной задачи существуют два полюса, сходящихся к $k_0$. Пики решений, соответствующие одному из них, существенно больше пиков, соответствующих простым собственным значениям. С другой стороны, известно [10], что если резонатор, для которого $k_0 \neq 0$ – простая собственная частота предельной задачи, окружить резонатором типа шарового слоя, для которого $k_0$ не является собственной предельной частотой, то, тем не менее, пики резонансов во "внутреннем" объеме увеличиваются. Таким образом, происходит своеобразная подкачка пиков "нерезонансным" объемом.

Ниже исследуется система двух резонаторов, вложенных один в другой (а также цепочка резонаторов [11]), в квазистационарном режиме. Учитывая вышесказанное, естественно было бы ожидать, что в этом случае резонансные пики должны увеличиться по сравнению с квазистационарным режимом для одного резонатора. Однако, как будет показано ниже, усиление пиков резонансов не наблюдается. Отличие же заключается в возникновении второй пары пиков (полюсов) того же порядка.

**1. Постановка задачи и предварительные сведения.** Пусть $\Omega_0$, $\Omega$ – ограниченные односвязные области в $\mathbf{R}^3$, $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, их границы $\Gamma_0^{(0)} = \partial\Omega_0$, $\Gamma_0^{(1)} = \partial\Omega \in C^\infty$ уплощены в окрестности точек $\mathbf{x}_0^{(m)} \in \Gamma_0^{(m)}$, $\Gamma_\varepsilon^{(m)} = \Gamma_0^{(m)} \setminus \overline{\omega}_\varepsilon^{(m)}$, $\omega_\varepsilon^{(m)} = \left\{\mathbf{x}:(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0^{(m)})\varepsilon^{-2} \in \omega^{(m)}\right\}$, $\omega^{(m)}$ – двумерные односвязные области на плоскостях $T^{(m)}$, совпадающих в окрестности $\mathbf{x}_0^{(m)}$ с $\Gamma_0^{(m)}$, границы $\partial\omega^{(m)} \in C^\infty$. Обозначим $\Gamma_\delta = \Gamma_\delta^{(0)} \cup \Gamma_\delta^{(1)}$, $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$, $\Omega_2 = \mathbf{R}^3 \setminus (\overline{\Omega_0 \cup \Omega_1})$. В этих обозначениях краевая задача для системы вложенных резонаторов имеет вид

$$(\Delta + k^2)u_\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\Gamma}_\varepsilon, \quad \partial u_\varepsilon / \partial \mathbf{n} = f, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon; \quad f \in C^\infty(\Gamma_0) \tag{1.1}$$

$$\partial u_\varepsilon / \partial r - iku_\varepsilon = o(r^{-1}), \quad r \to \infty; \quad r = |\mathbf{x}| \tag{1.2}$$

($\mathbf{n}$ – внешняя нормаль). Для задачи рассеяния $f = \partial u^{\text{out}}/\partial n$. Решение краевой задачи (1.1), (1.2) рассматривается в классе функций, принадлежащих $W_2^1(S(R) \setminus \overline{\Gamma}_\varepsilon)$ для любого $R$; $S(R)$ – шар радиуса $R$ с центром в начале координат. Поверхности $\Gamma_\varepsilon^{(m)}$ понимаются как двухсторонние.

Если же $\Omega \cap \Omega_0 = \varnothing$, граница $\Gamma_0^{(1)}$ области $\Omega_1 = \Omega$ в окрестности $\mathbf{x}_0^{(0)}$ совпадает с $\Gamma_0^{(0)}$ и $\mathbf{x}_0^{(1)} \notin \Gamma_0^{(0)}$, то (1.1), (1.2) описывает краевую задачу для цепочки последовательно соединенных резонаторов $\Gamma_\varepsilon^{(j)}$ [11]. Построение асимптотик проводится для обоих систем без каких-либо различий. При этом под $\Omega_1$ понимается соответствующим образом определенная область.

Вычет аналитического продолжения $G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)$ в полюсе $\tau_\varepsilon$ является решением краевой задачи (1.1) при $k = \tau_\varepsilon, f = 0$. Естественно, что при фиксированном $\varepsilon$ он экспоненциально растет при $r \to \infty$. По аналогии с задачами в ограниченных областях назовем эти решения однородных краевых задач собственными функциями.

Утверждения, позволяющие обосновывать нижеприводимые асимптотические построения, а также формулы (1.3)–(1.5) для решений задачи (1.1), (1.2), для системы вложенных резонаторов доказаны в [6,7]. Аналогичные результаты для цепочки резонаторов можно получить, используя технику работы [12]. При $j = 0,1$ через $\psi_j$ обозначим функции равные $\mathrm{mes}^{-1/2}\,\Omega_j$ в $\overline{\Omega}_j$ и нулю вне $\overline{\Omega}_j$. Если у системы резонаторов существуют два полюса $\tau_\varepsilon^{(1)}$, $\tau_\varepsilon^{(2)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ такие, что $0 < \mathrm{Re}\tau_\varepsilon^{(1)} < \mathrm{Re}\tau_\varepsilon^{(2)}$, то существуют еще ровно два полюса

$$\tau_\varepsilon^{(3)} = -\overline{\tau_\varepsilon^{(1)}}, \quad \tau_\varepsilon^{(4)} = -\overline{\tau_\varepsilon^{(2)}} \tag{1.3}$$

и порядки всех полюсов $\tau_\varepsilon^{(q)}$ равны единице. Если к тому же $\mathrm{Im}\tau_\varepsilon^{(q)} = o(\mathrm{Re}\tau_\varepsilon^{(q)})$ при $\varepsilon \to 0$, а для соответствующих собственных функций $\Phi_\varepsilon^{(q)}$, нормированных в $L_2(\Omega_0 \cup \Omega_1)$, имеет место соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_0 \cup \Omega_1} \Phi_\varepsilon^{(1)} \overline{\Phi_\varepsilon^{(2)}} d\mathbf{x} = 0 \tag{1.4}$$

то при $k$, близких к нулю для решения краевой задачи (1.1), (1.2), справедливо представление

$$u_\varepsilon(\mathbf{x},k) = \sum_{n=1}^{2} (2\mathrm{Re}\tau_\varepsilon^{(n)})^{-1} \left( \frac{\psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x})}{\tau_\varepsilon^{(n)} - k} \sum_{m=0}^{1} \int_{\Gamma_0^{(m)}} \left\{\psi_\varepsilon^{(n)}\right\} f_m ds + \frac{\overline{\psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x})}}{\tau_\varepsilon^{(n)} + k} \sum_{m=0}^{1} \int_{\Gamma_0^{(m)}} \left\{\overline{\psi_\varepsilon^{(n)}}\right\} f_m ds \right) +$$
$$+ U_\varepsilon(x,k) \tag{1.5}$$

где $f_m$ – значение функции $f$ на $\Gamma_0^{(m)}$. При $\varepsilon \to 0$ собственные функции $\psi_\varepsilon^{(n)} \to \psi_n$ в

$L_2(K)$ для любого компакта $K \subset \mathbf{R}^3$, $\psi_n = \alpha_{n0}\psi_0 + \alpha_{n1}\psi_1$, $\alpha_{n0}^2 + \alpha_{n1}^2 = 1$, $\alpha_{10}\alpha_{20} + \alpha_{11} + \alpha_{21} = 0$. Функция $U_\varepsilon$ равномерно ограничена в той же норме, сходится к решению задачи Неймана в $\Omega_2$ по норме $L_2(\Omega_2 \cap K)$ и

$$\sum_{m=0}^{1} \int_{\Gamma_0^{(m)}} \{\Psi_\varepsilon^{(n)}\} f_m ds \to a_f^{(n)} = (\alpha_{n0}\psi_0 - \alpha_{n1}\psi_1) \int_{\Gamma_0^{(0)}} f_0 ds + \alpha_{n1}\psi_1 \int_{\Gamma_0^{(1)}} f_1 ds \tag{1.6}$$

Символ $\{\cdot\}$ означает скачок функции на поверхности $\Gamma_0^{(m)}$.

**2. Формулировка основных утверждений.** Главные члены асимптотик полюсов $\tau_\varepsilon^{(q)}$ функции Грина задачи (1.1), (1.2) и соответствующих собственных функций зависят от некоторых характеристик замкнутых резонаторов и отверстий. Введем следующие обозначения: $G_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)$ – функции Грина задач Неймана в $\Omega_j$, $\sigma(k) = \lim_{R\to\infty} \int_{r=R} \left|G_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^{(1)}, k)\right|^2 ds$ – поперечник рассеяния [2,13], $c(\omega)$ – емкость диска $\omega$ [14,15]. Постоянные $\sigma(k)$, $c(\omega) > 0$, а если $\omega$ - единичный круг, то $c(\omega) = 2\pi^{-1}$ [15]. Заметим, что, если $\mathrm{Im}k = o(\mathrm{Re}k)$ при $k \to 0$, то [8]

$$\mathrm{Im}G_2(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(1)}, k) = \sigma\ \mathrm{Re}k + o(k),\quad \sigma = \sigma(0)$$

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\omega$ – двумерная ограниченная область на плоскости $\xi_3 = 0$. Обозначим через $Y_0(\xi; \omega)$ гармоническую вне $\omega$ функцию, убывающую на бесконечности, принадлежащую $W^1_{2,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3 \setminus \overline{\omega})$ и тождественно равную единице на $\omega$. Положим $Y(\xi; \omega) = 1 - \frac{1}{2}Y_0(\xi;\omega)$ при $\xi_3 \geqslant 0$, $Y(\xi;\omega) = \frac{1}{2}Y_0(\xi;\omega)$ при $\xi_3 \leqslant 0$. Непосредственно проверяется

*Лемма* 1. Система уравнений

$$(R_0^{(0)}\psi_0)^2 + (R_0^{(1)} - R_0^{(0)})^2\psi_1^2 = 1 \tag{2.1}$$

$$c(\omega^{(0)})(R_0^{(0)}(\psi_0^2 + \psi_1^2) - R_0^{(1)}\psi_1^2) = R_0^{(0)}\tau_1^2\pi^{-1} \tag{2.2}$$

$$c(\omega^{(1)})\psi_1^2(R_0^{(1)} - R_0^{(0)}) = R_0^{(1)}\tau_1^2\pi^{-1} \tag{2.3}$$

относительно $\tau_1$, $R_0^{(0)}$, $R_0^{(1)}$ имеет два следующих набора действительных решений ($n = 1, 2$):

$$\tau_1 = \tau_1^{(n)} = (\tfrac{1}{2}\pi(\zeta - (-1)^n(\zeta^2 - 4c(\omega^{(0)})c(\omega^{(1)})\psi_0^2\psi_1^2)^{1/2})^{1/2}$$

$$\zeta = c(\omega^{(0)})(\psi_0^2 + \psi_1^2) + c(\omega^{(1)})\psi_1^2$$

$$R_0^{(1)} = R_0^{(1,n,0)} = c(\omega^{(1)})\psi_1^2((\psi_0^2 + \psi_1^2)\pi^{-2}(\tau_1^{(n)})^4 -$$

$$-2c(\omega^{(1)})\psi_0^2\psi_1^2\pi^{-1}(\tau_1^{(n)})^2 + c^2(\omega^{(1)})\psi_0^2\psi_1^4\pi^{-2}(\tau_1^{(n)})^4)^{-1/2}.$$

$$R_0^{(0)} = R_0^{(0,n,0)} = (1 - (c(\omega^{(1)})\psi_1^2\pi)^{-1}(\tau_1^{(n)})^2)R_0^{(1,n,0)}$$

*Следствие*. Постоянные $\tau_1^{(1)} > \tau_1^{(2)} > 0$, $R_0^{(m,n,0)} \neq 0$, $R_0^{(1,n,0)} \neq R_0^{(0,n,0)}$, $R_0^{(0,1,0)}R_0^{(1,2,0)} \neq R_0^{(1,1,0)}R_0^{(0,2,0)}$, $R_0^{(m,1,0)} \neq R_0^{(m,2,0)}$, причем

$$R_0^{(0,1,0)}R_0^{(0,2,0)}\psi_0^2 + (R_0^{(1,1,0)} - R_0^{(0,1,0)})(R_0^{(1,2,0)} - R_0^{(0,2,0)})\psi_1^2 = 0$$

Пусть $\mathbf{x}_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)})$ – система координат, полученная из $\mathbf{x}$ ортогональным преобразованием так, что в этой системе $\mathbf{x}_0^{(m)}$ совпадает с началом координат, а область $\Omega_m$ в окрестности $\mathbf{x}_0^{(m)}$ совпадает с полупространством $x_3^{(m)} > 0$. Обозначим через $S_m(R)$ шар радиуса $R$ с центром в $\mathbf{x}_0^{(m)}$. Основным содержанием работы является следующее утверждение, доказательство которого основывается на методе сращиваемых асимптотических разложений [16–18] и будет приведено ниже

*Теорема* 1. Существуют четыре полюса $\tau_\varepsilon^{(n)}$ первого порядка функции Грина краевой задачи (1.1), (1.2), связанные равенствами (1.3). Асимптотики этих полюсов и соответствующих им собственных функций при $n = 1,2$ имеют вид:

$$\tau_\varepsilon^{(n)} = \varepsilon\tau_1^{(n)} + \varepsilon^3\tau_3^{(n)} + \varepsilon^4\tau_4^{(n)} + O(\varepsilon^5)$$

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) \sim R_0^{(0,n,0)}\psi_0^2 \text{ при } \mathbf{x} \in \Omega_0 \setminus S_0(\varepsilon)$$

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) \sim (R_0^{(1,n,0)} - R_0^{(0,n,0)})\psi_1^2 \text{ при } \mathbf{x} \in \Omega_1 \setminus (S_0(\varepsilon) \cup S_1(\varepsilon))$$

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) \sim \varepsilon^2(\tau_1^{(n)})^2 R_0^{(1,n,0)} G_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^{(1)}, \tau_\varepsilon^{(n)}) \text{ при } \mathbf{x} \in \Omega_2 \setminus S_1(\varepsilon)$$

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) \sim \upsilon_0^{(m,n)}(\mathbf{x}_m / \varepsilon^2) \text{ при } \mathbf{x} \in S_m(2\varepsilon),\ m = 0,1$$

в нормах $L_2(K)$ для любого компакта $K \subset \mathbf{R}^3$. Постоянные $\tau_1^{(n)}$, $R_0^{(0,n,0)}$, $R_0^{(1,n,0)}$ – решения системы (2.1)–(2.3) и

$$\mathrm{Im}\tau_3^{(n)} = 0,\ \mathrm{Im}\tau_4^{(n)} = -\tfrac{1}{2}\pi(\tau_1^{(n)})^2 c(\omega^{(1)})\sigma \tag{2.4}$$

$$\upsilon_0^{(0,n)}(\xi) = R_0^{(0,n,0)}\psi_0^2 Y(\xi;\omega^{(0)}) + (R_0^{(1,n,0)} - \tag{2.5}$$

$$-R_0^{(0,n,0)})\psi_1^2 Y(\xi_*;\omega^{(0)}),\ \xi_* = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

$$\upsilon_0^{(1,n)}(\xi) = (R_0^{(1,n,0)} - R_0^{(0,n,0)})\psi_1^2 Y(\xi;\omega^{(1)}) \tag{2.6}$$

*Следствие.* Имеет место соотношение (1.4).

Справедливость последнего утверждения вытекает из асимптотик главных членов $\Psi_\varepsilon^{(n)}$ в $\Omega_m$ и следствия леммы 1.

Из (1.5) и теоремы 1 следует, что при вещественных $k = k(\varepsilon)$ решение краевой задачи (1.1), (1.2) будет испытывать наибольшие возмущения в пиковых режимах:

$$k_\pm = \pm(\varepsilon\tau_1^{(n)} + \varepsilon^3\tau_3^{(n)} + \varepsilon^4(t + o(1)))$$

где $t$ – произвольное действительное число. Непосредственно из (1.5), (1.6) и теоремы 1 для задачи излучения $(a_f^{(n)} \neq 0)$ следует

*Теорема* 2. В пиковом режиме $k_+$ решение краевой задачи (1.1), (1.2) имеет асимптотики

$$u_\varepsilon(x,k) \sim \varepsilon^{-5}T\ a_f^{(n)} R_0^{(0,n,0)}\psi_0^2 \text{ при } \mathbf{x} \in \Omega_0 \setminus S_0(\varepsilon)$$

$$u_\varepsilon(x,k) \sim \varepsilon^{-5}T\ a_f^{(n)}(R_0^{(1,n,0)} - R_0^{(0,n,0)})\psi_1^2 \text{ при } \mathbf{x} \in \Omega_1 \setminus S_0(\varepsilon) \cup S_1(\varepsilon))$$

$$u_\varepsilon(x,k) \sim \varepsilon^{-5}T\ a_f^{(n)}\upsilon_0^{(m,n)}\mathbf{x}_m / \varepsilon^2) \text{ при } \mathbf{x} \in S_m(2\varepsilon),\ m = 0,1$$

$$u_\varepsilon(x,k) \sim \varepsilon^{-3}T(\tau_1^{(n)})^2 a_f^{(n)} R_0^{(1,n,0)} G_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^{(1)}, k) \text{ при } \mathbf{x} \in \Omega_2 \setminus S_1(\varepsilon)$$

в норме $L_2(K)$; $T = (2\tau_1^{(n)}(\tau_4^{(n)} - t))^{-1}$.

Рассмотрим задачу рассеяния. Пусть $u^{\mathrm{out}}(\mathbf{x}, k)$ – некоторое внешнее поле, $u_0(\mathbf{x}, k)$ – поле рассеянное на идеально жестком теле $\Omega_0 \cup \Omega_1$ (решение задачи Неймана в $\Omega_2$ с граничным условием $f = \partial u^{\mathrm{out}} / \partial \mathbf{n}$), а $u(\mathbf{x},k) = u_0(\mathbf{x},k) + u^{\mathrm{out}}(\mathbf{x},k)$ – полное поле. Очевидно, что в этом случае $a_f^{(n)} = 0$. Однако, используя асимптотику собственных функций в $\Omega_2$, можно показать (см., например, [6]), что в пиковых режимах

$$\sum_{j=0}^{1}\int_{\Gamma_0^{(j)}} \left\{\psi_\varepsilon^{(n)}\right\} f_j ds = \varepsilon^2\left((\tau_1^{(n)})^2 R_0^{(1,n,0)} u(\mathbf{0},0) + o(1)\right) \tag{2.7}$$

Из (1.5), (2.7) и теоремы 1 следует

*Теорема* 3. В пиковом режиме $k_+$ рассеянное поле имеет асимптотики

$$u_\varepsilon(\mathbf{x},k) \sim \varepsilon^{-3} T b_f^{(n)} R_0^{(0,n,0)} \psi_0^2 \text{ при } \mathbf{x} \in \Omega_0 \setminus S_0(\varepsilon)$$

$$u_\varepsilon(\mathbf{x},k) \sim \varepsilon^{-3} T b_f^{(n)} (R_0^{(1,n,0)} - R_0^{(0,n,0)}) \psi_1^2 \text{ при } \mathbf{x} \in \Omega_1 \setminus S_0(\varepsilon) \cup S_1(\varepsilon))$$

$$u_\varepsilon(\mathbf{x},k) \sim \varepsilon^{-3} T b_f^{(n)} \upsilon_0^{(m,n)} (\mathbf{x}_m / \varepsilon^2) \text{ при } \mathbf{x} \in S_m(2\varepsilon),\ m = 0,1$$

$$u_\varepsilon(\mathbf{x},k) \sim \varepsilon^{-1} T (\tau_1^{(n)})^2 b_f^{(n)} R_0^{(1,n,0)} G_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^{(1)}, k) \text{ при } \mathbf{x} \in \Omega_2 \setminus S_1(\varepsilon)$$

в $L_2(K)$; $b_f^{(n)} = (\tau_1^{(n)})^2 R_0^{(1,n,0)}$

**3. Построение асимптотик.** Полные асимптотики полюсов $\tau_\varepsilon^{(n)}$ и соответствующих собственных функций будем искать в виде:

$$\tau_\varepsilon^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \tau_i^{(n)} \tag{3.1}$$

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) = -k^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i R_{[i/2]}^{(0,n,i)} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^{(0)}, k),\ \mathbf{x} \in \Omega_0 \setminus S_0(\varepsilon) \tag{3.2}$$

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) = k^2 \left( \sum_{m=0}^{1} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon^i R_{[i/2]}^{(m,n,i)} G_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^{(m)} k) \right),\quad \mathbf{x} \in \Omega_1 \setminus S_0(\varepsilon) \cup S_1(\varepsilon) \tag{3.3}$$

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) = k^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i R_{[i/2]}^{(i,n,i)} G_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^{(1)}, k),\ \mathbf{x} \in \Omega_2 \setminus S_1(\varepsilon) \tag{3.4}$$

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \upsilon_i^{(m,n)} (\mathbf{x}_m / \varepsilon^2),\ \mathbf{x} \in S_m(2\varepsilon),\ m = 0,1 \tag{3.5}$$

где $k = \tau_\varepsilon$, $n = 1,2$ $R_j^{(q,i,s)}(D_y)$ – дифференциальные многочлены степени $j$ по переменной $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ с постоянными коэффициентами, $[N]$ – целая часть $N$. Заметим, что собственные функции $\Psi_\varepsilon$ и $\psi_\varepsilon$, фигурирующие в (1.5), (1.6) и (3.2)–(3.5), отличаются друг от друга на множитель $1 + o(1)$.

Краевые задачи для коэффициентов ряда (3.5) получаются следующим стандартным для метода согласования асимптотических разложений образом [6, 8, 17]. В (1.1) полагаем $f = 0$, вместо $k$ и $u_\varepsilon$ подставляем соответственно ряды (3.1), (3.5) и переходим в (1.1) к переменным $\xi = \mathbf{x}_m \varepsilon^{-2}$. Затем выписываем отдельно равенства при одинаковых степенях $\varepsilon$ и переходим к формальному пределу при $\varepsilon \to 0$. В итоге получаем следующую систему краевых задач:

$$\Delta_\xi \upsilon_j^{(m,n)} = -\sum_{i=2}^{j-2} \lambda_i^{(n)} \upsilon_{j-i-2}^{(m,n)},\ \xi \notin \overline{\gamma}^{(m)} \tag{3.6}$$

$$\partial \upsilon_j^{(m,n)} / \partial \xi_3 = 0,\ \xi \in \gamma^{(m)},\ \gamma^{(m)} = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2, 0):\ \xi \notin \overline{\omega}^{(m)} \right\}$$

где $\lambda_i$ – коэффициенты ряда $\lambda_\varepsilon^{(n)} = (\tau_\varepsilon^{(n)})^2$.

Дифференциальные многочлены $R_j^{(m,n,i)}$ будем искать в виде

$$R_j^{(m,n,i)}(D_y) = \sum_{q=0}^{j} P_q^{(m,n,i,j)}(D_y) \tag{3.7}$$

$$P_q^{(m,n,i,j)}(D_y) = \sum_{t=0}^{j} a_{qt}^{(m,n,i,j)} \frac{\partial^j}{\partial^t y_1^{(m)} \partial^{q-t} y_2^{(m)}},\ \mathbf{y}_m = (y_1^{(m)},\ y_2^{(m)},\ y_3^{(m)})$$

где $a_{ji}^{(\cdot)}$ – некоторые, постоянные. Обозначим при $q = 0, 1, 2$ через $\psi_\varepsilon^{(q,n)}(\mathbf{x},k)$ ряды (3.2)–(3.4) соответственно, где $k$ не заменено на $\tau_\varepsilon^{(n)}$. Тогда асимптотики (3.2)–(3.4) для собственной функции $\psi_\varepsilon(\mathrm{x})$ имеют вид $\psi_\varepsilon^{(q,n)}(\mathrm{x},\tau_\varepsilon^{(n)})$. В силу определения дифференциальных многочленов коэффициенты рядов $\psi_\varepsilon^{(q,n)}(\mathrm{x},k)$ аналитичны в некоторой окрестности нуля (по $k$), удовлетворяют однородному граничному условию Неймана на $\Gamma_0 \setminus \{\cup \mathrm{x}_0^{(m)}\}$, являются решениями уравнения Гельмгольца в $\Omega_q$, а при вещественных $k$ коэффициенты ряда $\psi_\varepsilon^{(2,n)}(\mathrm{x},k)$ удовлетворяют и условию (1.2).

Для функций Грина $G_t(\mathrm{x}, \mathrm{y}, k)$ и их производных в окрестностях точек $\mathrm{x}_0^{(m)}$ справедливы представления ($s = 0,1$):

$$P_q^{(m,n,i,j)}(D_y)G_{m+s}(\mathrm{x},\mathrm{x}_0^{(m)},k) = (2\pi)^{-1}(-1)^q P_q^{(m,n,i,j)}(D_x)\left(r^{-1}e_m^{ikr}\right) +$$

$$+ g_q^{(m,n,i,j)}(\mathrm{x},k) - k^{-2}\delta_0^q(1-\delta_2^{m+s})P_q^{(m,n,i,j)}\psi_{m+s}^2$$

где $\delta_q^t$ – символ Кронекера, $r_m = |\mathrm{x} - \mathrm{x}_0^{(m)}|$, функции $g_q^{(\cdot)}$ (x, $k$) в окрестности $\mathrm{x}_0^{(m)}$ бесконечно дифференцируемы, удовлетворяют граничному условию $\partial g_q^{(\cdot)} / \partial x_3^{(m)} = 0$ при $x_3^{(m)} = 0$ и в некоторой окрестности нуля аналитичны по $k$. Если коэффициенты полиномов $P_j^{(\cdot)}$ и $k$ вещественны, то и функции $P_j^{(\cdot)}(D_y)G_g(\mathrm{x},\mathrm{x}_0^{(m)},k)$ вещественны при $s = 0,1$.

Пусть $T_j(\mathrm{x})$ – однородные функции степени $j$, являющиеся либо однородными полиномами, либо произведением однородных полиномов на $r^{-2q-1}$ при некоторых целых $q \geqslant 0$ и удовлетворяющие граничному условию $\partial T_j(\mathrm{x})/\partial x_3 = 0$ при $x_3 = 0$, $\mathrm{x} \neq 0$. Обозначим через $\tilde{\mathrm{A}}_j$ множество рядов вида

$$T(\mathrm{x}) = \sum_{q=-\infty}^{j} T_q(\mathrm{x})$$

Два ряда будем называть сопряженными, если их сумма является многочленом.

На суммах $U(\mathrm{x}, \varepsilon)$ вида $\psi_\varepsilon^{(q,n)}(\mathrm{x},\tau_\varepsilon^{(n)})$ определим оператор $K_N^{(m)}$ следующим образом [6,17]. Коэффициенты ряда $U(x, \varepsilon)$ разлагаем в ряды при $\mathrm{x}_m \to 0$ и переходим к переменным $\xi = \mathrm{x}_m\varepsilon^{-2}$. В полученном двойном ряду возьмем сумму членов вида $\varepsilon^j\Phi(\xi)$ при $j \leqslant N$, которую и назовем $K_N^{(m)}(U(\mathrm{x},\varepsilon))$. Из асимптотик функций Грина, определения рядов $\psi_\varepsilon^{(q,n)}(\mathrm{x},\tau_\varepsilon^{(n)})$ и оператора $K_N^{(m)}$ следует

*Лемма* 2. Пусть произвольные функция $\tau_\varepsilon^{(n)}$, ряды $\psi_\varepsilon^{(q,n)}(\mathrm{x},k)$, дифференциальные многочлены $R_j^{(m,n,i)}$ имеют вид (3.1)–(3.4), (3.7), а в представлениях (3.7) многочленов $R_j^{(1,n,i)}$ при $i \geqslant 1$ коэффициенты $P_0^{(1,n,i,j)} = 0$. Тогда для любого целого $N \geqslant 0$ справедливы равенства

$$K_N^{(m)}(\psi_\varepsilon^{(m+s,n)}(\mathrm{x},\tau_\varepsilon^{(n)})) = \sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i V_i^{(m,m+s,n)}(\xi),\ \ m,s = 0,1$$

Ряды $V_i^{(m,m+s,n)}(\xi) \in \tilde{\mathrm{A}}_{[j/2]-1}$ попарно сопряжены при любых фиксированных $j \geqslant 2$, $m$ и $n$, являются формальными асимптотическими решениями краевой задачи (3.6) при $\rho = |\xi| \to \infty$, где функции $\upsilon_j^{(m,n)}$ заменены на $V_j^{(m,m+s,n)}$, и представимы в виде:

$$V_0^{(m,m+s,n)}(\xi) = \tilde{V}_0^{(m,m+s,n)} - (-1)^{m+s}(2\pi)^{-1}\left(\tau_i^{(n)}\right)^2\left(R_0^{(m,n,0)}\rho^{-1} +\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i P_i^{(m,n,2i,i)}(D_\xi)\rho^{-1}\right)$$

$$V_j^{(m,m+s,n)}(\xi) = \tilde{V}_j^{(m,m+s,n)}(\xi) + 2\left(\tau_1^{(n)}\right)^{-1}\tau_{j+1}^{(n)}\left(V_0^{(m,m+s,n)}(\xi) - \tilde{V}_0^{(m,m+s,n)}\right) -$$

$$-(-1)^{m+s}(2\pi)^{-1}\left(\tau_1^{(n)}\right)^2\sum_{i=m}^{\infty}(-1)^i P_i^{(m,n,2i+j,i)}(D_\xi)\rho^{-1}$$

$$\tilde V_0^{(0,0,n)} = R_0^{(0,n,0)}\psi_0^2,\quad \tilde V_0^{(m,1,n)} = \left(R_0^{(1,n,0)} - R_0^{(0,n,0)}\right)\psi_1^2$$

$$\tilde V_0^{(1,2,n)} = 0,\quad \tilde V_1^{(m,m+s,n)}(\xi) \equiv 0$$

где ряды $\tilde V_j^{(m,m+s,n)}$ не зависят от $\tau_{q+1}^{(n)}$ и $P_i^{(m,n,2i+q,j)}$ при $q \geqslant j$.

Если к тому же $\mathrm{Im}\tau_1^{(n)} = \mathrm{Im}R_0^{(m,n,0)} = P_1^{(m,n,2i+1,j)} = \tau_2^{(n)} = 0$, то

$$\mathrm{Im}\tilde V_3^{(1,2,n)}(\xi) = \left(\tau_1^{(n)}\right)^3 R_0^{(1,n,0)}\sigma,\quad \mathrm{Im}\tilde V_3^{(m,m,n)} = \mathrm{Im}\ \tilde V_3^{(0,1,n)} \equiv 0$$

Обозначим через $\mathrm{A}_q^{(m)}$ множество функций $\upsilon$, принадлежащих $W_1^2(S(R)\setminus\overline{\gamma^{(m)}})$ для любого $R$ и таких, что суммы $\upsilon(\xi)+\upsilon(\xi_*)$ – многочлены $q$-го порядка, а асимптотики функций $\upsilon(\xi)$ при $\rho\to\infty$, $\pm\,\xi_3 \geqslant 0$ принадлежат $\tilde{\mathrm{A}}_q$. Из определения классов $\mathrm{A}_q^{(m)}$ следует, что асимптотики функции $\upsilon\in\mathrm{A}_q^{(m)}$ на бесконечности сопряжены. Заметим, что функция $Y(\xi,\omega^{(m)})\in\mathrm{A}_0^{(m)}$. В этих обозначениях справедлива [6,8]

*Лемма* 3. Пусть функция $F\in\mathrm{A}_q^{(m)}$, сопряженные ряды $\tilde V^{\mathrm{in,ex}}\in\tilde{\mathrm{A}}_{q+2}$ являются формальными асимптотическими решениями задач Неймана в полупространствах $\xi_3 \gtrless 0$ для уравнений $\Delta\tilde V^{\mathrm{in,ex}} = F$ при $\rho\to\infty$. Тогда существует функция $\upsilon\in\mathrm{A}_{q+2}^{(m)}$, являющаяся решением краевой задачи

$$\Delta\upsilon = F \text{ вне } \overline{\gamma^{(m)}},\quad \partial\upsilon/\partial\xi_3 = 0 \text{ на } \gamma^{(m)}$$

и имеющая при $\rho\to\infty$ асимптотики

$$\upsilon(\xi) = \tilde V^{\mathrm{in,ex}}(\xi) \pm \sum_{j=0}^{\infty} Z_j^{(m)}(\xi)\rho^{-2j-1},\quad \xi_3 \lessgtr 0$$

где $Z_j^{(m)}$ – однородные гармонические полиномы степени $j$, такие, что $\partial Z_j^{(m)}/\partial\xi_3 = 0$ при $\xi_3 = 0$.

Леммы 2, 3 позволяют перейти к сращиванию асимптотических разложений (3.2)–(3.4). Обозначим через $\upsilon_{\varepsilon,N}^{(m,n)}(\mathrm{x}_m/\varepsilon^2)$ частичные суммы рядов (3.5).

*Теорема* 4. Существует функции $\tau_\varepsilon^{(n)}$ и ряды $\psi_\varepsilon^{(q,n)}(\mathrm{x},k)$, имеющие вид (3.1)–(3.5), такие что

а) коэффициенты $\upsilon_j^{(m,n)}(\xi)\in\mathrm{A}_{[j/2]-1}^{(m)}$ являются решениями краевых задач (3.6);

б) для коэффициентов рядов (3.1)–(3.5) имеют место формулы (2.4)–(2.6), постоянные $\tau_1^{(n)}$, $R_0^{(0,n,0)}$, $R_0^{(1,n,0)}$ являются решениями системы (2.1)–(2.3), $\tau_2^{(n)} = 0$;

в) для любого целого $N \geqslant 0$ при $\rho\to\infty$ справедливы равенства

$$\upsilon_{\varepsilon,N}^{(m,n)}(\xi) = K_N^{(m)}(\psi_\varepsilon^{(m,n)}(\mathrm{x},\tau_\varepsilon^{(n)})),\quad \xi_3\geqslant 0 \tag{3.8}$$

$$\upsilon_{\varepsilon,N}^{(m,n)}(\xi) = K_N^{(m)}(\psi_\varepsilon^{(m+1,n)}(\mathrm{x},\tau_\varepsilon^{(n)})),\quad \xi_3\leqslant 0$$

Доказательство. При $k\to 0$ ряды

$$\psi_\varepsilon^{(0,n)}(\mathrm{x},k)\to R_0^{(0,n,0)}\psi_0^2,\quad \psi_\varepsilon^{(2,n)}(\mathrm{x},k)\to 0,\quad \psi_\varepsilon^{(1,n)}(\mathrm{x},k)\to(R_0^{(1,n,0)} - R_0^{(0,n,0)})\psi_1^2$$

Предполагаемое условия сходимости собственных функций $\Phi_\varepsilon^{(n)}$ к линейным комбинации собственных функций $\psi_j$, нормированной в $L_2(\Omega_0\cup\Omega_1)$, дает уравнение (2.1) относительно постоянных $R_0^{(n,n,0)}$.

В силу определения функция $Y$ при $\rho \to \infty$ имеет асимптотики

$$Y(\xi;\omega^{(m)}) = 1 - \frac{1}{2}c(\omega^{(m)})\rho^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} Z_i^{(m)}(\xi)\rho^{-2i-1}, \ \xi_3 \geqslant 0$$

$$Y(\xi;\omega^{(m)}) = \frac{1}{2}c(\omega^{(m)})\rho^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i^{(m)}(\xi)\rho^{-2i-1}, \ \xi_3 \leqslant 0$$

Из условия согласования неубывающих членов асимптотик на бесконечностях функций $\upsilon_0^{(m,n)}$ и рядов $\upsilon_0^{(m,j,n)}$ (см. лемму 2) определяем эти функции в соответствии с (2.5), (2.6). Далее, приравнивая коэффициенты при $\rho^{-1}$ у асимптотик функций $\upsilon_0^{(m,n)}$ и рядов $V_0^{(m,j,n)}$, получаем уравнения (2.2), (2.3). Разрешая согласно лемме 1 систему (2.1)–(2.3), находим значения постоянных $R_0^{(m,n,0)}$ и $\tau_1^{(n)}$. Приравнивая коэффициенты асимптотик функций $\upsilon_0^{(m,n)}$ и рядов $V_0^{(m,j,n)}$ при остальных степенях $\rho$, находим полиномы $P_1^{(m,j,n,0)}(D_y)$. В результате проделанной процедуры сращивания получили справедливость равенств (3.8) при $N = 0$.

На следующем шаге, используя лемму 2, по аналогичной схеме получаем, что

$$\tilde{V}_1^{(m,m+s,n)} \equiv 0 \to \upsilon_1^{(m,n)} = 0 \to \tau_2^{(n)} = P_i^{(m,n,2i+1,l)} = 0 \tag{3.9}$$

Дальнейшее доказательство проводится по индукции, с использованием утверждений лемм 2, 3 (см., например, [5, 6, 8, 19]).

Покажем справедливость формулы (2.4) для $\mathrm{Im}\tau_4^{(n)}$ (вещественность $\tau_3^{(n)}$ легко устанавливается). Краевая задача (3.6) для $\mathrm{Im}\upsilon_3^{(m,n)}$ имеет вид

$$\Delta_\xi \mathrm{Im}\upsilon_3^{(m,n)} = 0, \ \xi \notin \overline{\gamma^{(m)}}, \ \partial \mathrm{Im}\upsilon_3^{(m,n)} / \partial\xi_3 = 0, \ \xi \in \gamma^{(m)} \tag{3.10}$$

В силу (3.9), (3.10) и леммы 2 получаем

$$\mathrm{Im}\, \tilde{V}_3^{(1,2,n)} = (\tau_1^{(n)})^3 R_0^{(1,n,0)}\sigma, \ \mathrm{Im}\ \tilde{V}_3^{(m,m,n)} = \mathrm{Im}\ \tilde{V}_3^{(0,1,n)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\ \upsilon_3^{(1,n)} = (\tau_1^{(n)})^3 R_0^{(1,n,0)}\sigma Y(\xi_*), \ \mathrm{Im}\ \upsilon_3^{(0,n)} = 0$$

Приравнивая коэффициенты при $\rho^{-1}$ у асимптотик функций $\mathrm{Im}\upsilon_3^{(1,n)}$ и рядов $V_3^{(1,2,n)}$ и учитывая асимптоику ранее определенной функции $V_0^{(1,n)}$, получаем уравнения

$$-\tfrac{1}{2}(\tau_1^{(n)})^3 R_0^{(1,n,0)}\sigma c(\omega^{(1)}) = (\tau_1^{(n)})^{-1}\mathrm{Im}\tau_4^{(n)} R_0^{(1,n,0)} - R_0^{(1,n,0)})\psi_1^2 c(\omega^{(1)})$$

Учитывая соотношение (2.3), из последнего равенства получаем (2.4). Теорема доказана.

Обоснование построенных асимптотических разложений полюсов $\tau_\varepsilon^{(n)}$ и соответствующих собственных функций $\psi_\varepsilon^{(n)}$ (доказательство теоремы 1) следует из [6,7]. Из вида асимптотик $\tau_\varepsilon^{(n)}$ и $\psi_\varepsilon^{(n)}$ следуют формулы (1.4)–(1.6).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Rayleigh*. The theory of Helmoltz' resonator // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1916. V. 92. № 638. P. 265–275.
2. *Miles J.W.* Scattering by a Spherical cap // J. Acoust. Soc. America. 1971. V. 50. № 3. Pt 2. P. 892–903.
3. *Павлов Б.С., Попов И.Ю.* Рассеяние на резонаторах с малым и точечным отверстиями // Вестн. ЛГУ. 1984. № 13. Вып. 3. С. 116–118.

4. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Vibration and Coupling of Continuous System. Asymptotic Methods. New-York: Spinger-Verlag, 1989. 421 p.
5. *Гадыльшин Р.Р.* Метод сращивания асимптотических разложений в задаче об акустическом резонаторе Гельмгольца // ПММ. 1992. Т. Вып. 3. С. 412–418.
6. *Гадыльшин Р.Р.* Расщепление полюсов резонатора Гельмгольца // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57. № 5. С. 44–74.
7. *Гадыльшин Р.Р.* О квазисобственных частотах резонатора Гельмгольца // Асимптотические методы решения задач математической физики. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1990. С. 33–49.
8. *Гадыльшин Р.Р.* О квазистационарном режиме резонатора Гельмгольца // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 54–61.
9. *Гадыльшин Р.Р.* О слипающихся полюсах акустического резонатора // Докл. АН СССР. 1992. Т. 324. № 4. С. 773–776.
10. *Гадыльшин Р.Р.* О системе вложенных резонаторов // Докл. АН. 1992. Т. 326. № 6. С. 939–942.
11. *Попов И.Ю.* Расчет собственных частот резонаторов, связанных через малые отверстия, с использованием теории расширений операторов // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 2. С. 380–385.
12. *Beale J.T.* Scattering frequencies of resonators // Communs. on Pure and Appl. Math. 1973. V. 26. № 4. P. 549–563.
13. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
14. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 380 с.
15. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966. 515 с.
16. *Ван Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М: Мир, 1967. 310 с.
17. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
18. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
19. *Гадыльшин Р.Р.* О влиянии выбора места отверстия и его формы на свойства акустического резонатора Гельмгольца // Теорет. и мат. физика. 1992. Т. 93. № 1. С. 107–118.

Уфа

Поступила в редакцию
23.IV.1993