

УДК 539.3 + 624.073

© 1994 г. В.В. Васильев

МЕТОД МЕХАНИЧЕСКОЙ ПРОГОНКИ В ЗАДАЧЕ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

Формулируется метод механической прогонки. На примере расчета нелинейного деформирования цилиндрической панели реализуется алгоритм переноса граничных условий, выраженных в механических параметрах, по элементам, на которые условно расчленена панель. Правомерность разработанного алгоритма подтверждается соответствием результатов расчета экспериментальным данным.

Методы прогонки основаны на переносе граничных условий при численном решении дифференциальных уравнений [1, 2]. В сравнении с другими численными методами, такими как метод конечного элемента, преимущества прогонки состоят в задании меньшего числа неизвестных (только на границе), простой алгоритмизации. Однако в известных вариантах метода прогонки численное решение дифференциальных уравнений производят в отрыве от механических параметров задачи. При этом упускается ряд возможностей для дальнейшего усовершенствования данного метода.

В расчетах напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций метод прогонки проще реализовать с использованием условия совместности деформаций в форме перекрестных связей [3].

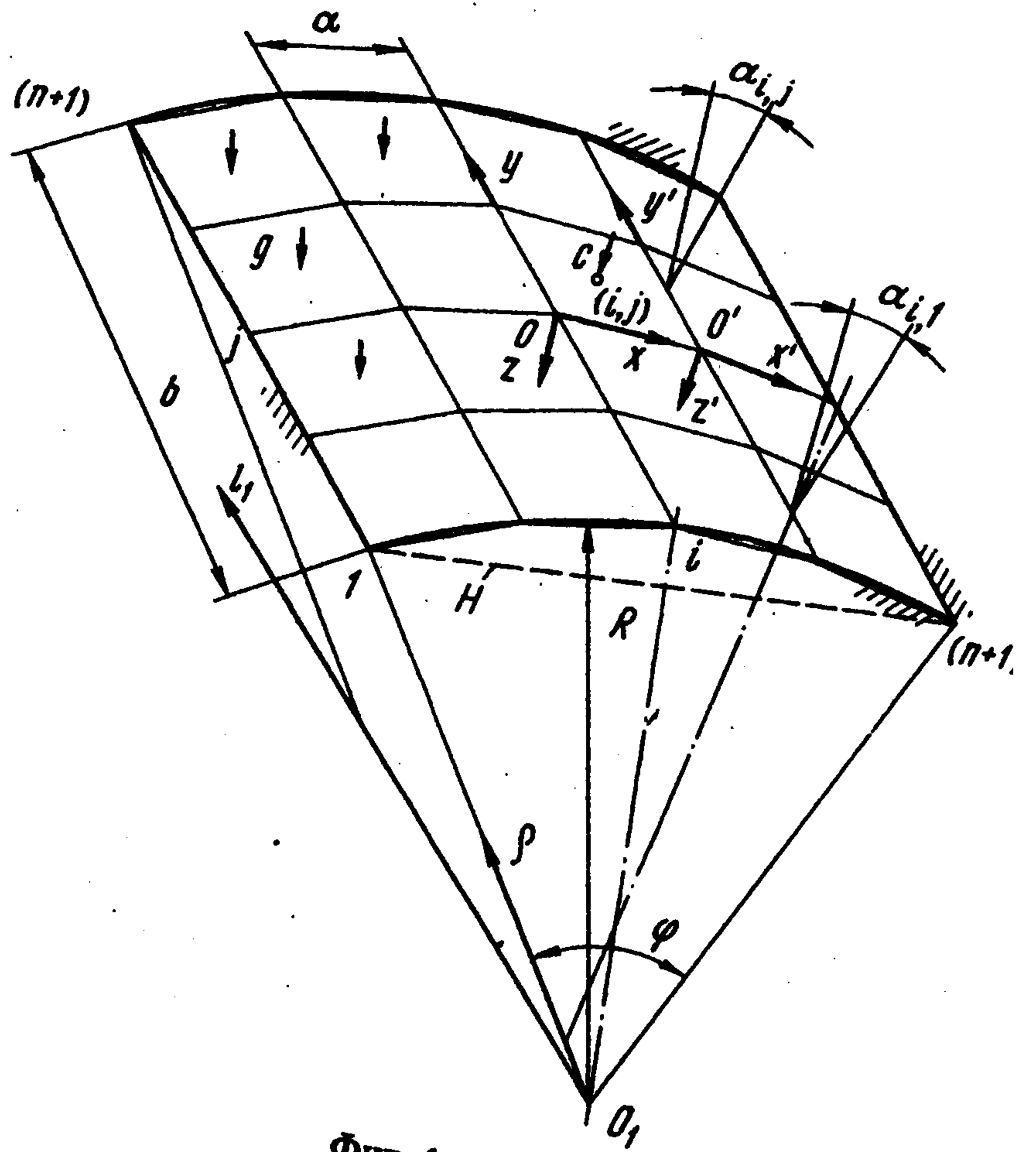
Прогонка по механическим параметрам дает преимущества при решении задач нелинейного деформирования конструкций. Учитывая изменение ориентации силовых факторов при деформировании, можно определить нелинейную зависимость нагрузки от перемещений.

Цель данной работы – создание метода механической прогонки, в котором перенос граничных условий от одного элемента конструкции к другому производится непосредственно в механических параметрах: силах, моментах сил, углах поворота, перемещениях.

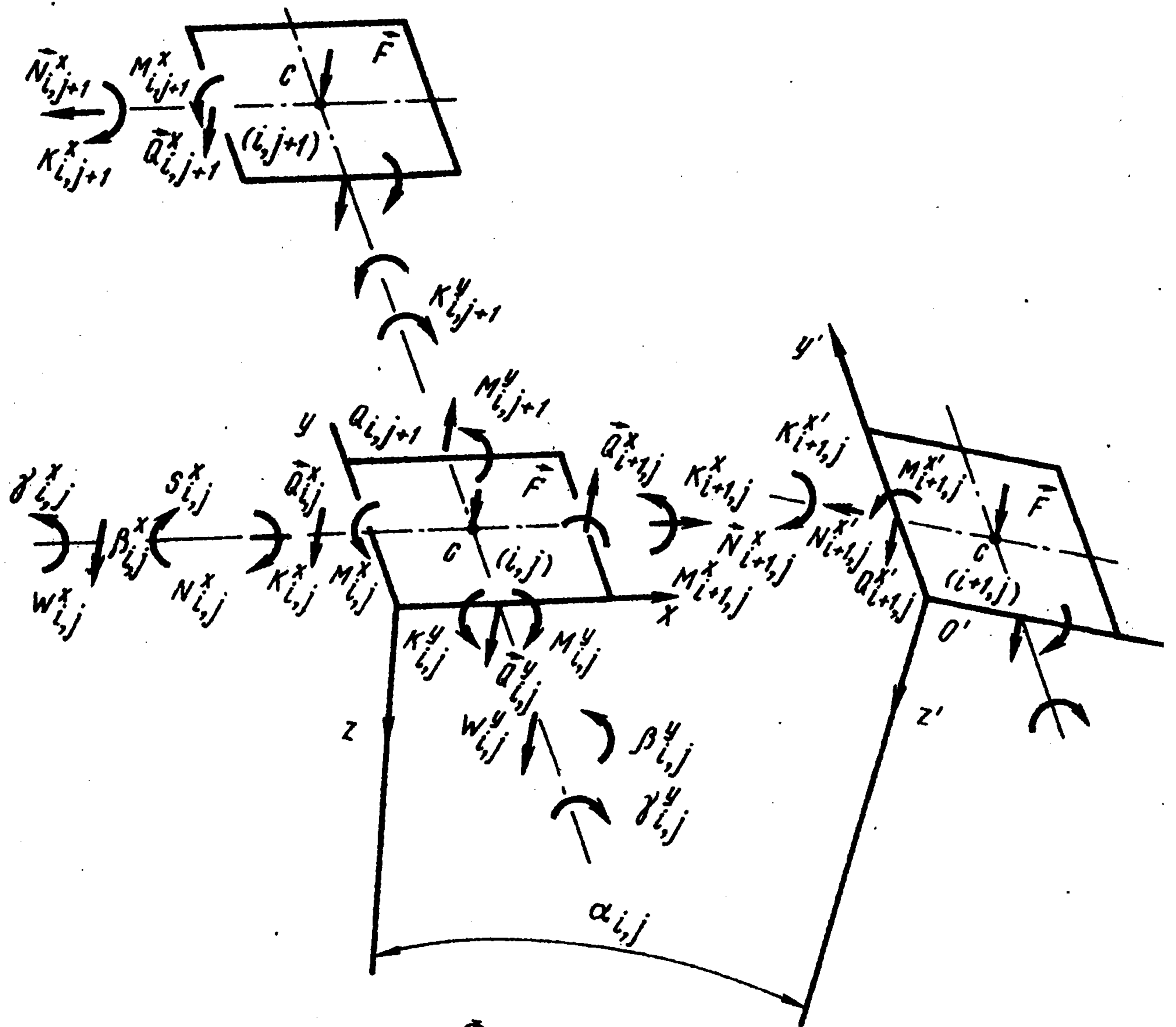
1. Постановка задачи. Рассмотрим метод прогонки на примере двумерной задачи расчета больших перемещений жестко заделанной цилиндрической квадратной панели. Панель шириной b , радиусом R и толщиной h нагружена давлением q (фиг. 1). Введем систему цилиндрических координат $O_1 l_1 r \varphi$. Разделим мысленно панель линиями на n интервалов параллельно образующей цилиндра l_1 и перпендикулярно ей. Индекс i соответствует сечениям, параллельным образующей l_1 , индекс j – сечениям перпендикулярным оси l_1 . Из числа n^2 квадратных элементов шириной a выделим один с j -м нижним и i -м левым сечением (фиг. 2).

В разрабатываемом алгоритме будем придерживаться тенденции к увеличению числа элементов разбиения. Это позволит с достаточной точностью элементы считать плоскими. Введем для каждого элемента местную систему координат $Oxyz$.

В каждом сечении элемента панели будет действовать переменная эпюра напряжений. Согласно принципам механики твердого тела напряженное состояние в них можно представить силами, сосредоточенными в центре, и моментами. Максимальное число силовых факторов в сечении элемента шесть. Соответственно им при уменьшении размеров элементов деформированное состояние можно представить шестью параметрами деформации в центре. Ввиду ограничений, накладываемых на объем статьи, изложим суть предлагаемого метода на примере четырехугольных элементов, у которых в сечениях, параллельных образующей цилиндра, оставлены четыре степени свободы, а в сечениях, перпендикулярных образующей, – три степени свободы.



Фиг. 1



Фиг. 2

В данном случае симметричного нагружения панели в сечениях, параллельных образующей цилиндра (параллельно местным осям Oy) будем учитывать изгибающий момент вокруг срединной линии M^x , крутящий момент K^x , перерезывающую силу Q^x , нормальную силу N^x . Соответственно угол поворота в направлении M^x обозначим β^x , угол поворота от крутящего момента γ^x , перемещение в направлении Q^x-W^x , перемещение сечения в направлении N^x обозначим S^x .

На фиг. 2 даны положительные направления деформации. В сечениях, параллельных осям Ox обозначим изгибающий момент M^y , крутящий момент K^y , перерезывающую силу Q^y и соответствующие им перемещения β^y , γ^y , W^y . Перечисленные силовые факторы и деформации будем снабжать индексами соответственно номеру сечения.

Распределенную нагрузку q для элемента заменим сосредоточенной силой F в центре элемента, причем

$$F = qa^2 \quad (1.1)$$

2. Исходные уравнения. Для создания алгоритма метода механической прогонки будем пользоваться следующими уравнениями для выделенного элемента: уравнениями статистического равновесия

$$\Sigma M_{kx} = -K_{i+1,j}^x + M_{i,j}^y - M_{i,j+1}^y + K_{i,j}^x + \frac{a}{2} Q_{i,j}^y + \frac{a}{2} Q_{i,j+1}^y = 0$$

$$\Sigma M_{ky} = -\frac{a}{2} F - a Q_{i,j}^x - M_{i,j}^x - \frac{a}{2} Q_{i,j}^y - K_{i,j}^y + K_{i,j+1}^y + \frac{a}{2} Q_{i,j+1}^y + M_{i+1,j}^x = 0$$

$$\Sigma Z_k = F + Q_{i,j}^y - Q_{i,j+1}^y + Q_{i,j}^x - Q_{i+1,j}^x = 0 \quad (2.1)$$

$$\Sigma X_k = -N_{i,j}^x + N_{i+1,j}^x = 0$$

физическими уравнениями, полученными на основе закона Гука и гипотезы прямых нормалей для элемента [3]

$$\frac{d\beta^x}{dx} = \frac{M^x}{EJ_x} - \frac{\mu M^y}{EJ_y}, \quad \frac{d\beta^y}{dy} = \frac{M^y}{EJ_y} - \frac{\mu M^x}{EJ_x} \quad (2.2)$$

$$\frac{d\gamma^x}{dx} = \frac{K^x}{GJ_k}, \quad \frac{d\gamma^y}{dy} = \frac{K^y}{GJ_k}, \quad \frac{dS^x}{dx} = \frac{N^x}{ahE}$$

Здесь E – модуль Юнга, J_x, J_y – моменты инерции на изгиб ($J_x = J_y = J = ah^3/12$), μ – коэффициент Пуассона ($\mu = 0,3$), $G = E/[2(1 + \mu)]$, J_k – момент инерции на кручение ($J_k = \beta_1 ah^3$), β_1 – малоизменяемый коэффициент ($\beta_1 = 0,32$ при $a/h > 10$).

Уравнения совместности деформаций используем в форме метода перекрестных связей [3]. В центре элемента перемещения (W_c^x, W_c^y) и углы поворота ($\beta_c^x, \beta_c^y, \gamma_c^x, \gamma_c^y$) равны, если этот центр рассматривать как окончание предыдущего элемента, идущего по оси x с одной стороны, и окончание ортогонального предыдущего элемента, идущего по оси y с другой стороны (фиг. 2).

Отметим, что дифференциальные зависимости (2.2) записаны для двумерного напряженного состояния элементарных образцов, а не балок. Поэтому балочную терминологию необходимо воспринимать как условную.

Углы поворота и перемещения в центре определим интегрированием упругой срединной линии элемента с использованием производных в соотношениях (2.2). При этом отдельно двигаемся по оси x от левого сечения (фиг. 2) направо к центру и по

оси y от нижнего сечения вверх к центру элемента. Для элемента с номером (i, j) получим равенства

$$\begin{aligned}\beta_c^x &= \beta_{i,j}^x + \frac{a}{2EJ} \left(M_{i,j}^x + \frac{a}{4} Q_{i,j}^x - \mu M_{i,j}^y \right) = \gamma_c^y = \gamma_{i,j}^y + \frac{aK_{i,j}^y}{2GJ_k} \\ \beta_c^y &= \beta_{i,j}^y + \frac{a}{2EJ} \left(M_{i,j}^y + \frac{a}{4} Q_{i,j}^y - \mu M_{i,j}^x \right) = \gamma_c^x = \gamma_{i,j}^x + \frac{aK_{i,j}^x}{2GJ_k} \\ W_c^x &= W_{i,j}^x + \frac{a}{2} \beta_{i,j}^x + \frac{a^2}{8EJ} \left(M_{i,j}^x + \frac{a}{6} Q_{i,j}^x - \mu M_{i,j}^y \right) = W_c^y = \\ &= W_{i,j}^y + \frac{a}{2} \beta_{i,j}^y + \frac{a^2}{8EJ} \left(M_{i,j}^y + \frac{a}{6} Q_{i,j}^y - \mu M_{i,j}^x \right)\end{aligned}\tag{2.3}$$

3. Алгоритм метода механической прогонки. Условия на границе элемента $\beta_{i,j}^x, \beta_{i,j}^y, \gamma_{i,j}^x, \gamma_{i,j}^y, W_{i,j}^x, W_{i,j}^y, S_{i,j}^x$ зависят от параметров предыдущих элементов. Прогонка по механическим параметрам начинается с граничных условий жестко заделанной панели, где они равны нулю.

Например, начиная с левого нижнего элемента пластины, выразим $M_{1,1}^y, K_{1,1}^y, Q_{1,1}^y$ из системы (2.3) через $M_{1,1}^x, K_{1,1}^x, Q_{1,1}^x, N_{1,1}^x$ (фиг. 2). В последующем параметры всех элементов будем выражать неизвестные силовые факторы на левой границе панели $M_{1,j}^x, K_{1,j}^x, Q_{1,j}^x, N_{1,j}^x$ и силовые факторы на верхней границе панели $M_{i,n+1}^y, K_{i,n+1}^y, Q_{i,n+1}^y$. Выразив параметры последнего верхнего элемента, переходим к следующей вертикальной полосе элементов слова направо.

При рассмотрении последующих элементов начальные условия на их границе определяются интегрированием упругой линии элемента по оси y :

$$\begin{aligned}\beta_{i,j+1}^y &= \beta_{i,j}^y + \frac{a}{2EJ} \left(2M_{i,j}^y + aQ_{i,j}^y + \frac{a}{4} F + \frac{a}{4} Q_{i,j}^x - \frac{a}{4} Q_{i+1,j}^x - \right. \\ &\quad \left. - \mu M_{i,j}^x - \mu M_{i+1,j}^x + K_{i,j}^x - K_{i+1,j}^x \right) \\ \gamma_{i,j+1}^y &= \gamma_{i,j}^y + \frac{a}{2GJ_k} \left(2K_{i,j}^y + \frac{a}{2} Q_{i,j}^x + \frac{a}{2} Q_{i+1,j}^x + M_{i,j}^x - M_{i+1,j}^x \right) \\ W_{i,j+1}^y &= W_{i,j}^y + a\beta_{i,j}^y + \frac{a^2}{2EJ} \left(M_{i,j}^y + \frac{a}{3} Q_{i,j}^y + \frac{a}{24} F + \frac{a}{24} Q_{i,j}^x - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu}{2} M_{i,j}^x - \frac{\mu}{2} M_{i+1,j}^x + \frac{1}{4} K_{i,j}^x - \frac{1}{4} K_{i+1,j}^x - \frac{a}{24} Q_{i+1,j}^x \right)\end{aligned}\tag{3.1}$$

и по оси x (соответствующие соотношения получаются из (3.1) круговой заменой индексов x и y).

Такие же соотношения получаются и при использовании интегралов Мора.

Центральной процедурой прогонки является определение для любого элемента с номером (i, j) силовых факторов $M_{i,j+1}^y, K_{i,j+1}^y, Q_{i,j+1}^y$ на верхней границе (фиг. 2) в зависимости от левых боковых силовых факторов следующего верхнего элемента с номером $(i, j+1)$ — $M_{i,j+1}^x, K_{i,j+1}^x, Q_{i,j+1}^x, N_{i,j+1}^x$. Для этого из системы (2.1) найдем правые боковые силовые факторы $M_{i+1,j}^x, K_{i+1,j}^x, Q_{i+1,j}^x$ у элемента с номером (i, j) в зависимости от остальных силовых факторов. Подставим их в систему (3.1). Далее составим уравнения совместности деформаций (2.2) для следующего вертикального элемента с

номером $(i, j + 1)$, подставив в них начальные условия $\beta_{i,j+1}^y, \gamma_{i,j+1}^y, W_{i,j+1}^y$ из системы (3.1) предыдущего элемента. Решение этой системы дает функции параметров $M_{i,j+1}^y, K_{i,j+1}^y, Q_{i,j+1}^y$.

Запись основных действий метода механической прогонки представим в матричной форме. Для этого введем вектор искомых параметров на левом и верхнем краю панели, определяемом матрицей столбцом

$$X = \| \| M_{1,1}^x, K_{1,1}^x, Q_{1,1}^x, N_{1,1}^x, \dots, M_{1,n}^x, K_{1,n}^x, Q_{1,n}^x, N_{1,n}^x, M_{1,n+1}^y, K_{1,n+1}^y, Q_{1,n+1}^y, \dots, M_{n,n+1}^y, K_{n,n+1}^y, Q_{n,n+1}^y, F \| \| ^T \quad (3.2)$$

Последний компонент вектора (3.2) определяется известной функцией от активной силы F . Алгебраическое значение параметра с номером k из $m = 7n + 1$ параметров (3.2) определится скалярным произведением матрицы порядка $m \times m$, у которой один ненулевой единичный элемент на главной диагонали с номером k , на матрицу-столбец (3.2). Например

$$K_{1,1}^x = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\| X \quad (3.3)$$

В последующем силовые параметры и параметры деформаций всех элементов будем выражать через вектор (3.2).

Найденные силовые параметры на верхнем краю элемента с номером (i, j) запишутся в виде

$$\left\| \begin{array}{c} M_{i,j+1}^y \\ K_{i,j+1}^y \\ Q_{i,j+1}^y \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 0,0914 & -0,21 & 0,2045 \\ -0,021 & 0,818 & -0,0472 \\ 5,49a^{-1} & 1,17a^{-1} & -2,63a^{-1} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} V_1^{i,j} \\ V_2^{i,j} \\ V_3^{i,j} \end{array} \right\| \quad (3.4)$$

Промежуточные функции $V_1^{i,j}, V_2^{i,j}, V_3^{i,j}$ определяются из произведения матриц

$$\| \| V_1^{i,j}, V_2^{i,j}, V_3^{i,j} \| \| ^T = V \| \| M_{i,j}^y, K_{i,j}^y, Q_{i,j}^y, M_{i,j}^x, K_{i,j}^x, \quad (3.5)$$

$$Q_{i,j}^x, M_{i,j+1}^x, K_{i,j+1}^x, Q_{i,j+1}^x, \beta_{i,j}^y, \gamma_{i,j}^y, W_{i,j}^y, \beta_{i,j+1}^x, \gamma_{i,j+1}^x, W_{i,j+1}^x, F \| \| ^T$$

Матрица коэффициентов имеет вид ($\xi = EJ a^{-1}$)

$$V = \left\| \begin{array}{cccccccccccccccc} -1 & 0,3 & -0,1a & 0,6 & 0,3a & 0,3 & 0,65 & 0 & 0 & -2\xi & 0 & 0 & 0 & 2\xi & 0 & 0,15a \\ 0 & -0,65 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,25a & 0 & 0 & -2\xi & 0 & 2\xi & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1,2 & -0,57a & 2,4 & 1,2a & 1,3 & 0 & 0,17a & 0 & 12\xi & 0 & -8\xi a^{-1} & 4\xi & 0 & 8\xi a^{-1} & 0,6a \end{array} \right\| \quad (3.6)$$

Силовые параметры нижнего края панели с учетом нулевых значений деформаций на границе $\beta_{i,1}^y, \gamma_{i,1}^y, W_{i,1}^y$ определим из решения системы (2.3):

$$\left\| \begin{array}{c} M_{i,1}^y \\ K_{i,1}^y \\ Q_{i,1}^y \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} -2,13 & 0 & 12,66 \\ 0,98 & 3,1 & -5,84 \\ 16,52a^{-1} & 0 & -50,64a^{-1} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} V_1^{i,0} \\ V_2^{i,0} \\ V_3^{i,0} \end{array} \right\| \quad (3.7)$$

Промежуточные функции $V_1^{i,0}, V_2^{i,0}, V_3^{i,0}$ выразятся через произведение матриц:

$$\|V_1^{i,0}, V_2^{i,0}, V_3^{i,0}\|^T = V^0 \|M_{i,1}^x, K_{i,1}^x, Q_{i,1}^x, \beta_{i,1}^x, \gamma_{i,1}^x, W_{i,1}^x\|^T \quad (3.8)$$

$$V^0 = \begin{vmatrix} 0,15 & 0,325 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,125a & \xi & 0 & 0 \\ 0,163 & 0 & 0,021a & 0,5\xi & 0 & \xi a^{-1} \end{vmatrix}$$

Далее из уравнений равновесия (2.1) определяются силовые факторы в правом сечении элемента уже с учетом выражений (3.4)

$$\begin{vmatrix} M_{i+1,j}^x \\ K_{i+1,j}^x \\ Q_{i+1,j}^x \\ N_{i+1,j}^x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2^{-1}a & 1 & 0 & a & 0 & 0 & -1 & -2^{-1}a & 2^{-1}a \\ 1 & 0 & 2^{-1}a & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2^{-1}a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \|M_{i,j}^y, K_{i,j}^y, Q_{i,j}^y, M_{i,j}^x, K_{i,j}^x, Q_{i,j}^x, N_{i,j}^x, M_{i,j+1}^y, K_{i,j+1}^y, Q_{i,j+1}^y, F\|^T \quad (3.9)$$

Подстановкой силовых факторов (3.4), (3.9) в выражения (3.1) и аналогичные выражения при круговой замене индексов x и y находим значения деформаций в верхнем и правом сечении элемента (фиг. 2): $\beta_{ij+1}^y, \gamma_{ij+1}^y, W_{ij+1}^y, \beta_{i+1,j}^x, \gamma_{i+1,j}^x, W_{i+1,j}^x, S_{i+1,j}^x$.

Таким образом, граничные условия в нижнем и левом сечениях элемента перенесены в верхнее и правое сечения элемента.

При переходе к последующим элементам панели, расположенным справа от рассмотренного элемента, для упрощения выражений механические параметры необходимо заменить эквивалентной системой, ориентированной вдоль осей новой местной системы координат $O'x'y'z'$ (фиг. 1, 2). Пусть $\alpha_{i,j}$ — углы между плоскостями элементов, определяемые из геометрии панели. Тогда силы и перемещения, соответствующие системе координат правого элемента, обозначения которых снабжены штрихами, выразятся в виде

$$\begin{vmatrix} Q_{i+1,j}^{x'} \\ N_{i+1,j}^{x'} \\ W_{i+1,j}^{x'} \\ S_{i+1,j}^{x'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{i,j} & 0 \\ 0 & A_{i,j}^T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_{i+1,j}^x \\ N_{i+1,j}^x \\ W_{i+1,j}^x \\ S_{i+1,j}^x \end{vmatrix}, \quad A_{i,j} = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{i,j} & \sin \alpha_{i,j} \\ -\sin \alpha_{i,j} & \cos \alpha_{i,j} \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

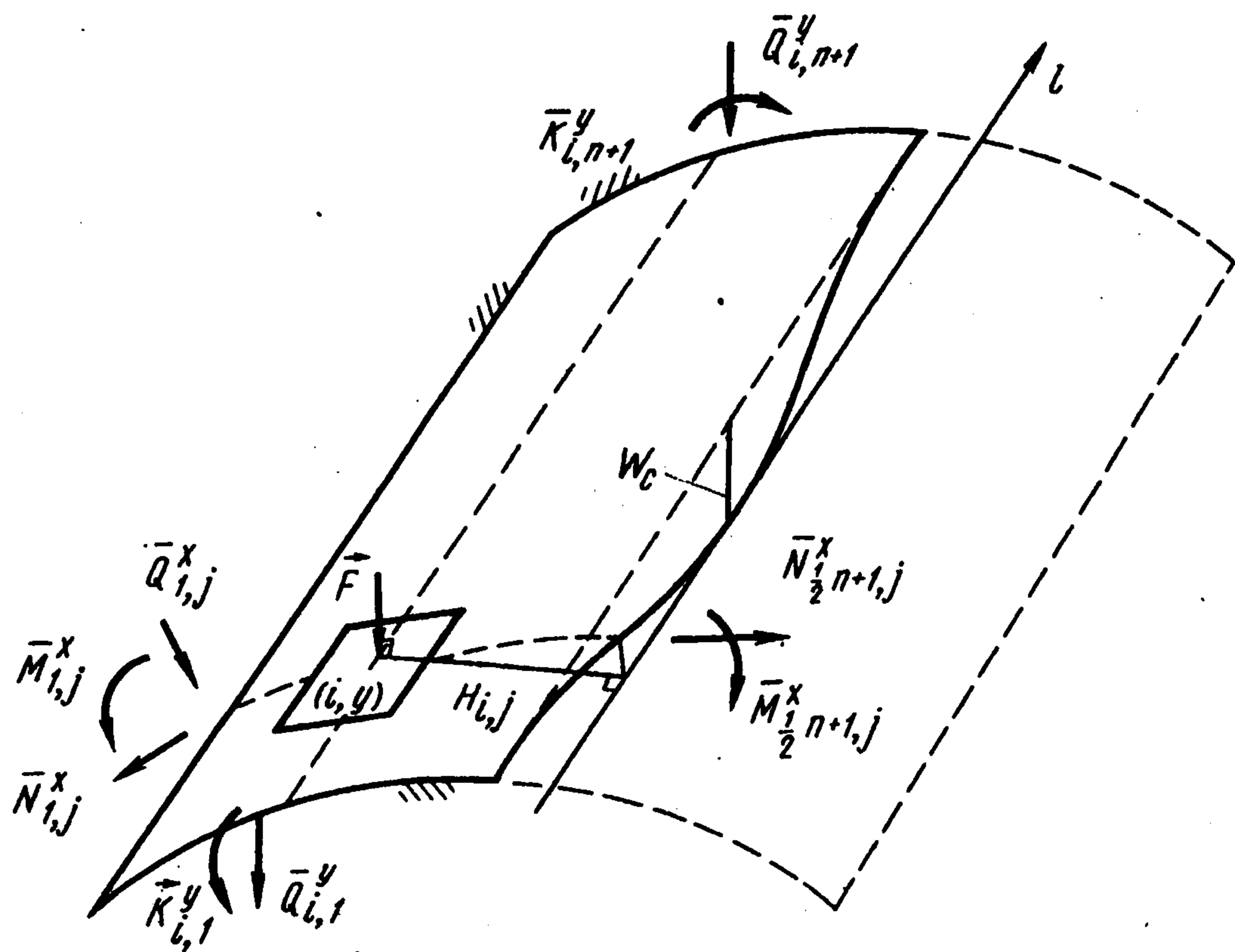
Моменты и угловые деформации $M_{i+1,j}^x, K_{i+1,j}^x, \beta_{i+1,j}^x, \gamma_{i+1,j}^x$ останутся неизменными в новой системе $O'x'y'z'$.

На этом прогонка по одному элементу закончена, и перечисленные операции производятся для следующего по вертикальной полосе элемента. По окончании этой полосы переходят к следующей правой полосе, начиная с нижнего элемента (фиг. 1). При достижении верхнего края панели силовые параметры на нем входят в вектор искомых параметров (3.2). В этом случае действия (3.4) не выполняются.

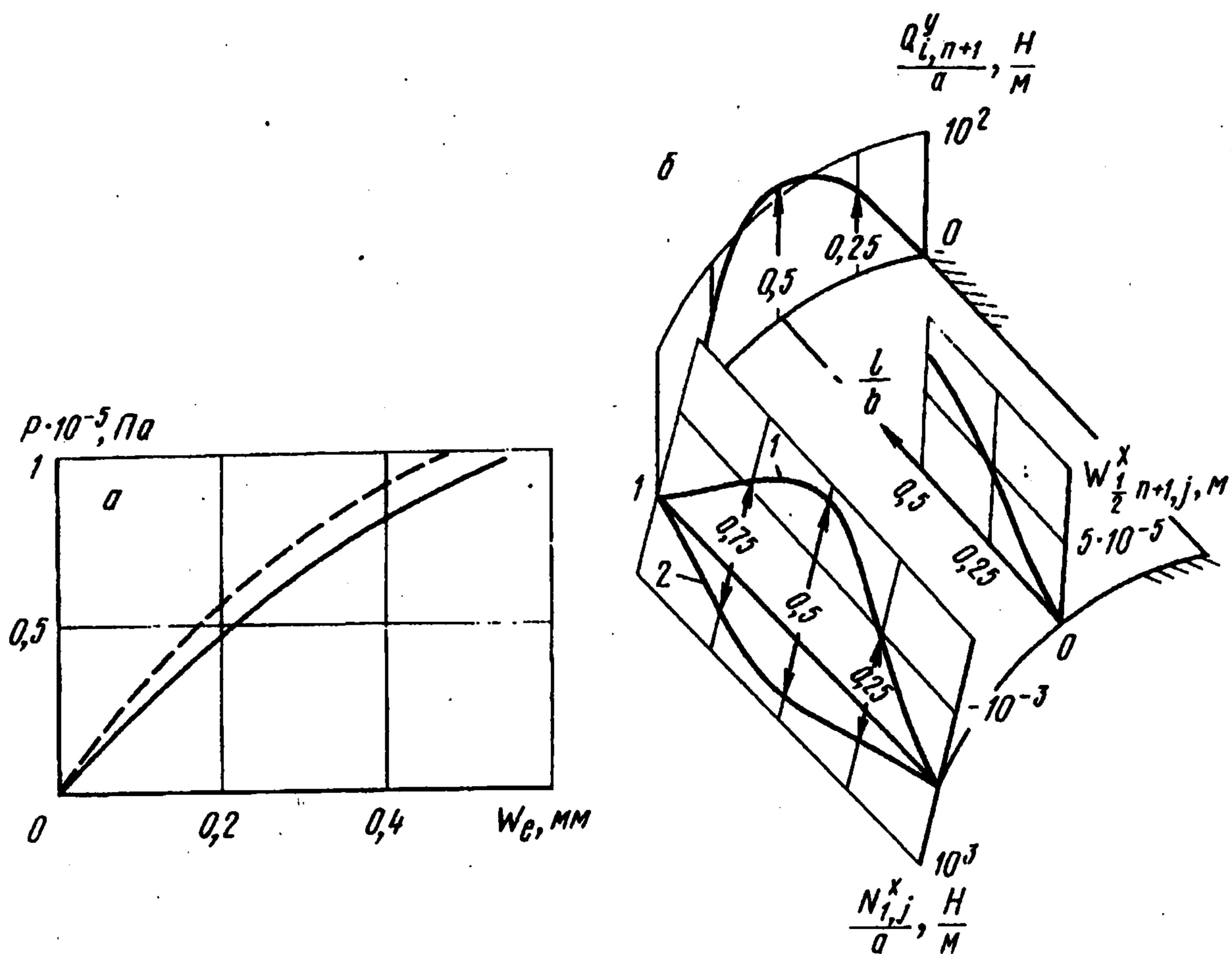
Разрешающую систему линейных алгебраических уравнений метода механической прогонки определим граничными условиями для верхнего и правого края жестко заделанной панели. Это будет $7n$ уравнений, которые представим матрицей-столбцом:

$$\|\beta_{1,n+1}^y, \gamma_{1,n+1}^y, W_{1,n+1}^y, \dots, \beta_{n,n+1}^y, \gamma_{n,n+1}^y, W_{n,n+1}^y, \beta_{n+1,1}^x, \quad (3.11)$$

$$\gamma_{n+1,1}^x, W_{n+1,1}^x, S_{n+1,1}^x, \dots, \beta_{n+1,n}^x, \gamma_{n+1,n}^x, W_{n+1,n}^x, S_{n+1,n}^x\|^T = 0$$



Фиг. 3



Фиг. 4

В каждое уравнение может входить $7n$ неизвестных, записанных в порядке (3.2). Последний компонент вектора (3.2), зависящий от силы F , определит свободные члены системы уравнений. Решив систему уравнений (3.11), получим значения искомых параметров (3.2), соответствующих заданной нагрузке q . Далее, повторяя сначала перечисленные действия двумерной прогонки, получим массив данных – внутренних силовых факторов и деформаций панели. При этом параметры задаются без разложения на компоненты (3.2).

В рассмотренном варианте прогонки перенос граничных условий производится по конечноэлементному разбиению. Одно из достоинств, которое способствовало широкому распространению метода конечных элементов, является быстрая сходимость к нулю погрешности вычислений при сгущении сетки разбиения. Поэтому предлагаемый метод механической прогонки должен обладать большими возможностями по точности в сравнении с известным методом прогонки, основанном на замене производных в дифференциальном уравнении конечными разностями и где имеет место проблема роста погрешностей с уменьшением шага сетки.

Для расчета деформаций панели, зависящих нелинейно от давления P на нее, воспользуемся методом последовательных нагружений. Давая малые приращения давления на панель q , будем определять приращения внутренних и граничных силовых факторов и деформаций. Полные значения внутренних факторов и перемещений, над символами которых в дальнейшем будем ставить черту, определяются алгебраическим суммированием приращений этих параметров по числу шагов нагружения:

$$\bar{M}_{i,j}^x = \sum^k M_{i,j}^x \dots \bar{W}_{i,j}^x = \sum^k W_{i,j}^x \dots \quad (3.12)$$

Активная нагрузка – давление P на панель определится из условий статического равновесия панели. Для этого по линии наибольших перемещений, в данном случае вдоль срединной образующей, мысленно рассежем панель (фиг. 3). Введем ось l , параллельную оси образующего цилиндра l_1 и проходящую через точку наибольших перемещений панели – ее центр. Тогда из уравнения моментов относительно оси l , например для левой половины панели, в которое войдут краевые силовые факторы и силы давления, получим

$$P = - \left(a^2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n} H_{i,j} \right)^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\bar{M}_{1,j}^x + \bar{M}_{\frac{1}{2}n+1,j}^x + M_l(\bar{N}_{1,j}^x) + M_l \left(\bar{N}_{\frac{1}{2}n+1,j}^x \right) + M_l(\bar{Q}_{1,j}^x) \right] + \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n} \left[K_{i,1}^y + K_{i,n+1}^y + M_l(\bar{Q}_{i,1}^y) + M_l(\bar{Q}_{i,n+1}^y) \right] \right\} \quad (3.13)$$

где $H_{i,j}$ – плечо силы F ($F = Pa^2$), приложенной к центру элемента с номером (i, j)

относительно оси l ; $M_l(\bar{N}_{1,j}^x)$, $M_l \left(\bar{N}_{\frac{1}{2}n+1,j}^x \right)$, $M_l(\bar{Q}_{i,j}^x)$, $M_l(\bar{Q}_{i,1}^y)$, $M_l(\bar{Q}_{i,n+1}^y)$ – моменты

от краевых сил для половины панели относительно оси l .

Далее следует новый шаг нагружением q .

Нелинейность зависимости давления P от перемещения в центре панели W_c в основном определяется моментами от продольных сил $\bar{N}_{1,j}^x$, $\bar{N}_{\frac{1}{2}n+1,j}^x$. После того как

перемещения панели достигают ее хорды H (фиг. 1), приращения этих сил $N_{1,j}^x$ меняют свое направление на противоположное.

Местоположение оси l выбирается в месте наибольших перемещений панели. Уравнение (3.13) составляет для того направления оси l , где P имеет минимальное значение. Принимая это значение полного давления P для всей панели, путем итераций уточняем параметры деформаций и нагрузок для остальных сечений панели.

4. Примеры. Расчеты были проведены для титановых квадратных панелей со следующими данными: $b = 0,1$ м; $R = 1$ м; $h = 8 \times 10^{-4}$ м; $E = 9,46 \times 10^{10}$ Нм⁻² (при температуре 200°C).

На фиг. 4, а приведена расчетная зависимость давления на панель от перемещения в центре W_c (сплошная кривая) и экспериментальная зависимость [4] (штриховая кривая).

Можно отметить их достаточно близкое совпадение при начальных нелинейных деформациях.

Точность расчета при больших перемещениях панели можно обеспечить, доведя число учитываемых степеней свободы в сечениях элементов в четырех и трех до максимального числа – шести.

На фиг. 4, б представлены: графики распределения по образующей на краю панели приращений продольной силы N_{1j}^x , отнесенной к единице длины при первом шаге нагружения ($q = 4000 \text{ Нм}^{-2}$) (кривая 1) и при перемещениях, превысивших хорду дуги панели (кривая 2); график приращений перерезывающей силы $Q_{i,n+1}^y$, отнесенной к единице длины; график перемещений панели по срединной образующей $W_{\frac{1}{2}n+1,j}^x$. Видно, что при одинаковых приращениях давления q знак N_{1j}^x меняется на противоположный, когда перемещения панели начинают превышать хорду ее дуги.

Известные аналитические решения для жестко заделанных панелей связаны со значительными упрощениями и на стадии докритических деформаций получают еще меньшие значения жесткости в сравнении с экспериментом [4].

Отработка метода механической прогонки на примере расчета жестко заделанной квадратной пластины, где имеется достаточно точное аналитическое решение, показало отличие результатов менее 3% при дискретизации пластины на 25 элементов. Это также подтверждает достоверность предлагаемого метода.

5. Основные результаты. Дадим определение разработанному алгоритму как варианту метода прогонки для расчета механических систем.

Метод механической прогонки заключается в переносе граничных условий, выраженных в механических параметрах по элементам, на которые условно расчленена механическая система. При этом за счет решения в первую очередь уравнений для ограниченного числа неизвестных внутри каждого элемента последовательно исключаются неизвестные параметры внутри всей механической системы.

При реализации данного метода на ЭВМ параметры прогонки для оболочечных конструкций удобно задавать в виде трехмерных массивов. Основное измерение массива равно размерности вектора искомых параметров (3.2). Остальные измерения для большинства параметров можно ограничивать числом два. Это позволяет расчленять конструкции на достаточно большое число элементов (~100) при работе на микрокомпьютерах.

Перспективным для решения геометрически нелинейных задач механических систем представляется использованием алгоритма на основе формулы (3.13). Активная нагрузка согласно этому алгоритму, определяется из условия равновесия расчлененной деформированной системы, при суммировании внутренних силовых факторов.

Данный метод в первую очередь предназначен для расчета сложных конструкций, таких как сильфоны, обшивка фюзеляжа самолета. Его можно распространить и на трехмерные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
2. Васильев В.В., Зыкин П.Г., Мавлютов Р.Р., Рапопорт Л.Д. Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости конструктивно-анизотропных оболочек в поле высоких температур // Тр. 12-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1980. Т. 1. С. 268.
3. Газизов Х.Ш., Рапопорт Л.Д., Ясин Э.М. Поперечный изгиб пластин сложной конфигурации // Тр. Уфим. авиац. ин-та. 1975. С. 27–56.
4. Зыкин П.Г., Васильев В.В. К расчету устойчивости жестко заделанной цилиндрической панели при повышенных температурах // Прочность конструкций. Уфа: Уфим. авиац. ин-т, 1976. Вып. 1. С. 151–155.