

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский, А.М. Шукуров

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ,  
ОГРАНИЧЕННОЙ ДВУМЯ ЭКСЦЕНТРИЧНЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ  
ПОВЕРХНОСТЯМИ**

Рассматривается осесимметричная задача о распространении нестационарных волн в упругой среде, ограниченной сферическими поверхностями со смещенными центрами. Проблема распространения волн в сплошных средах, ограниченных поверхностями разных координатных систем, изучена достаточно полно в основном в стационарной постановке [1]. Исследовались [2, 3] некоторые нестационарные задачи для полупространства со сферическими включениями.

**1. Постановка задачи.** Пусть линейно-упругая однородная изотропная среда ограничена двумя эксцентричными сферическими поверхностями. Радиус внешней поверхности равен  $R_2$ , а радиус внутренней сферы  $R_1$ . Расстояние между центрами сфер равно  $\delta$  ( $R_2 > R_1 + \delta$ ).

Используются две сферические системы координат: начало первой системы  $(r_1, \theta_1, \vartheta_1)$  находится в центре внутренней сферы (полости), а начало второй  $(r_2, \theta_2, \vartheta_2)$  – в центре внешней сферы.

На поверхности сферической полости приложены осесимметричные поверхностные нагрузки

$$\sigma_{r_1 r_1} \Big|_{r_1=R_1} = p(\tau, \theta_1), \quad \sigma_{r_1 \theta_1} \Big|_{r_1=R_1} = q_1(\tau, \theta_1) \tag{1.1}$$

или заданы перемещения

$$u_1 \Big|_{r_1=R_1} = U(\tau, \theta_1), \quad v_1 \Big|_{r_1=R_1} = V(\tau, \theta_1) \tag{1.2}$$

На внешней сфере отсутствуют напряжения

$$\sigma_{r_2 r_2} \Big|_{r_2=R_2} = 0, \quad \sigma_{r_2 \theta_2} \Big|_{r_2=R_2} = 0 \tag{1.3}$$

либо перемещения равны нулю

$$u_2 \Big|_{r_2=R_2} = 0, \quad v_2 \Big|_{r_2=R_2} = 0 \tag{1.4}$$

Здесь  $u_i, v_i$  и  $\sigma_{\alpha\beta_i}$  – нормальные, тангенциальные компоненты вектора перемещения и компоненты тензора напряжений в системах координат  $(r_i, \theta_i, \vartheta_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

При учете осевой симметрии возмущенное движение упругой среды удовлетворяет следующим волновым уравнениям относительно скалярного  $\phi$  и ненулевой компоненты  $\psi$  векторного потенциала смещений:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} = \Delta_i \phi, \quad \eta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = \Delta_i \psi - \frac{\psi}{r_i^2 \sin^2 \theta_i} \tag{1.5}$$

где  $\Delta_i$  – оператор Лапласа в соответствующей системе координат.

Начальные условия полагаются однородными

$$\varphi|_{\tau=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0 \quad (1.6)$$

Перемещения  $u_i$ ,  $v_i$  и напряжения  $\sigma_{\alpha\beta}$  связаны с потенциалами  $\varphi$  и  $\psi$  известными соотношениями линейной теории упругости [4].

В соотношениях (1.1)–(1.6) и далее использованы следующие безразмерные параметры (штрихом обозначены размерные величины):

$$r_i = \frac{r'_i}{R}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{R}, \quad \eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad \delta = \frac{\delta'}{R}$$

$$\kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\sigma'_{\alpha\beta}}{\lambda + 2\mu}, \quad u_i = \frac{u'_i}{R}$$

$$v_i = \frac{v'_i}{R}, \quad \varphi = \frac{\varphi'}{R^2}, \quad \psi = \frac{\psi'}{R^2}, \quad R_i = \frac{R'_i}{R}$$

где  $R$  – некоторый характерный линейный размер,  $c_1$  и  $c_2$  – скорости волн растяжения–сжатия и сдвига,  $\lambda$  и  $\mu$  – упругие постоянные Ламе,  $t$  – время.

**2. Метод решения.** Начально-краевая задача (1.1)–(1.6) решается методом неполного разделения переменных с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени  $\tau$  ( $s$  – параметр преобразования, значок  $L$  соответствует трансформанте).

В пространстве изображений представим компоненты напряженно-деформированного состояния среды и правые части граничных условий (1.1) и (1.2) в виде рядов по полиномам Лежандра  $P_n(\cos \theta_i)$  и Гегенбауэра  $C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta_i)$  ( $i = 1, 2$ ):

$$\left\| \begin{array}{l} u_i^L \\ \sigma_{\eta\eta}^L \end{array} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \begin{array}{l} u_{in}^L(r_i, s) \\ \sigma_{\eta\eta n}^L(r_i, s) \end{array} \right\| P_n(\cos \theta_i)$$

$$\left\| \begin{array}{l} v_i^L \\ \sigma_{\eta\theta_i}^L \end{array} \right\| = -\sin \theta_i \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \begin{array}{l} v_{in}^L(r_i, s) \\ \sigma_{\eta\theta_i n}^L(r_i, s) \end{array} \right\| C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta_i)$$

$$\left\| \begin{array}{l} p_1^L \\ U^L \end{array} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \begin{array}{l} p_{1n}^L(s) \\ U_n^L(s) \end{array} \right\| P_n(\cos \theta_1)$$

$$\left\| \begin{array}{l} q_1^L \\ V^L \end{array} \right\| = -\sin \theta_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \begin{array}{l} q_{1n}^L(s) \\ V_n^L(s) \end{array} \right\| C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta_1)$$

Тогда граничные условия (1.1)–(1.4) относительно коэффициентов разложений принимают следующий вид:

$$\sigma_{\eta\eta n}^L|_{\eta=R_1} = p_{1n}^L(s), \quad \sigma_{\eta\theta_1 n}^L|_{\eta=R_1} = q_{1n}^L(s) \quad (2.1)$$

$$u_{1n}^L|_{\eta=R_1} = U_n^L(s), \quad v_{1n}^L|_{\eta=R_1} = V_n^L(s) \quad (2.2)$$

$$\sigma_{r_2 r_2 n}^L|_{r_2=R_2} = 0, \quad \sigma_{r_2 \theta_2 n}^L|_{r_2=R_2} = 0 \quad (2.3)$$

$$u_{2n}^L|_{r_2=R_2} = 0, \quad v_{2n}^L|_{r_2=R_2} = 0 \quad (2.4)$$

В пространстве изображений Лапласа потенциалы смещений  $\varphi$  и  $\psi$  запишем в виде

$$\varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^L(s) \sqrt{\frac{2s}{\pi r_1}} K_{n+1/2}(r_1 s) P_n(\cos \theta_1) + \sum_{p=0}^{\infty} B_p^L(s) \sqrt{\frac{2\pi s}{r_2}} I_{p+1/2}(r_2 s) P_p(\cos \theta_2) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \psi^L = & -\sin \theta_1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n^L(s) \sqrt{\frac{2\eta s}{\pi r_1}} K_{n+1/2}(r_1 \eta s) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta_1) - \\ & -\sin \theta_2 \sum_{p=1}^{\infty} D_p^L(s) \sqrt{\frac{2\pi \eta s}{r_2}} I_{p+1/2}(r_2 \eta s) C_{p-1}^{3/2}(\cos \theta_2) \end{aligned}$$

где  $K_\nu(x)$  и  $I_\nu(x)$  – модифицированные функции Бесселя;  $A_n^L(s)$ ,  $B_p^L(s)$ ,  $C_n^L(s)$  и  $D_p^L(s)$  – неизвестные функции параметра  $s$ .

Используя теорему сложения для функций  $I_{n+1/2}(x)$  и  $K_{n+1/2}(x)$  [5], учитывая выражения этих функций через элементарные [4], а также связь перемещений, напряжений и потенциалов в сферической системе координат, получим следующие формулы для коэффициентов рядов  $u_{1n}^L$ ,  $v_{1n}^L$ ,  $\sigma_{\eta\eta n}^L$  и  $\sigma_{\eta\theta_1 n}^L$ :

$$\begin{aligned} u_{1n}^L(r_1, s) = & -r_1^{-n-2} s^{-n} \left[ R_{n1}(r_1 s) A_n^L(s) e_{11} + G_{n1}(r_1 s) \sum_{p=0}^{\infty} E_{np}^{(1)}(s) B_p^L(s) + \right. \\ & \left. + n(n+1) \eta^{-n} R_{n0}(r_1 \eta s) C_n^L(s) e_{14} + \eta^{-n} G_{n0}(r_1 \eta s) \sum_{p=1}^{\infty} H_{np}^{(1)}(s) D_p^L(s) \right] \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{1n}^L(r_1, s) = & r_1^{-n-2} s^{-n} \left[ R_{n0}(r_1 s) A_n^L(s) e_{11} + G_{n0}(r_1 s) \sum_{p=0}^{\infty} E_{np}^{(1)}(s) B_p^L(s) + \right. \\ & \left. + \eta^{-n} R_{n3}(r_1 \eta s) C_n^L(s) e_{14} + n^{-1}(n+1)^{-1} \eta^{-n} G_{n3}(r_1 \eta s) \sum_{p=1}^{\infty} H_{np}^{(1)}(s) D_p^L(s) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta n}^L(r_1, s) = & -r_1^{-n-3} s^{-n} \left[ Q_{n1}(r_1 s) A_n^L(s) e_{11} + J_{n1}(r_1 s) \sum_{p=0}^{\infty} E_{np}^{(1)}(s) B_p^L(s) + \right. \\ & \left. + n(n+1) \eta^{-n} Q_{n2}(r_1 \eta s) C_n^L(s) e_{14} + \eta^{-n} J_{n2}(r_1 \eta s) \sum_{p=1}^{\infty} H_{np}^{(1)}(s) D_p^L(s) \right] \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\theta_1 n}^L(r_1, s) = & -r_1^{-n-3} s^{-n} \left[ Q_{n2}(r_1 s) A_n^L(s) e_{11} + J_{n2}(r_1 s) \sum_{p=0}^{\infty} E_{np}^{(1)}(s) B_p^L(s) + \right. \\ & \left. + \eta^{-n} Q_{n3}(r_1 \eta s) C_n^L(s) e_{14} + J_{n3}(r_1 \eta s) n^{-1}(n+1)^{-1} \eta^{-n} \sum_{p=0}^{\infty} H_{np}^{(1)}(s) D_p^L(s) \right] \end{aligned}$$

где

$$E_{np}^{(1)}(s) = C_{np}^{(1)}(s) e_{12} - C_{np}^{(2)}(s) e_{13}, \quad H_{np}^{(1)}(s) = S_{np}^{(1)}(s) e_{15} - S_{np}^{(2)}(s) e_{16}$$

$$e_{11} = e^{-\eta s}, \quad e_{12} = e^{\delta s}, \quad e_{13} = e^{-\delta s}, \quad e_{14} = e^{-\eta \eta s}, \quad e_{15} = e^{\delta \eta s}, \quad e_{16} = e^{-\delta \eta s}$$

Использованные в формулах (2.6) и (2.7) многочлены  $R_{ni}(s)$  ( $i = 0, 1, 3$ ) и  $Q_{nj}(s)$  ( $j =$

= 1, 2, 3) связаны с представлениями модифицированных функций Бесселя и определены в [4], а функции  $G_{nk}(s)$ ,  $J_{nk}(s)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и  $C_{np}^{(l)}(s)$ ,  $S_{np}^{(l)}(s)$  ( $l = 1, 2$ ) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} G_{nk}(s) &= R_{nk}(-s)e^s - R_{nk}(s)e^{-s}, \quad J_{nk}(s) = Q_{nk}(-s)e^s - Q_{nk}(s)e^{-s} \\ C_{np}^{(l)}(s) &= \frac{(-1)^p(2n+1)}{2\delta s} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_{\sigma}^{(n0p0)} \frac{(-1)^{\sigma}}{(\delta s)^{\sigma}} R_{\sigma 0} = [(-1)^l \delta s] \\ S_{np}^{(l)}(s) &= \frac{(-1)^p(2n+1)}{2\delta \eta s} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_{\sigma}^{(n1p1)} \frac{R_{\sigma 0} [(-1)^l \delta \eta s]}{(\delta \eta s)^{\sigma}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $b_{\sigma}^{(nipi)}$  ( $i = 0, 1$ ) – коэффициенты Клебша–Гордона [5].

Выражения для коэффициентов рядов  $u_{2n}^L, v_{2n}^L, \sigma_{r_2 2n}^L$  и  $\sigma_{r_2 \theta 2n}^L$  аналогичны формулам (2.6), (2.7) и могут быть получены из последних, если поменять местами коэффициенты  $A_n^L$  и  $B_n^L$ ,  $C_n^L$  и  $D_n^L$ , а также заменить  $r_1$  на  $r_2$ ,  $E_{np}^{(1)}$  и  $H_{np}^{(1)}$  на  $E_{np}^{(2)}$  и  $H_{np}^{(2)}$ ,  $R_{ni}(r_1 \eta_k s)$  на  $(-1)^n G_{ni}(r_2 \eta_k s)$  и  $G_{ni}(r_1 \eta s)$  на  $R_{ni}(r_2 \eta s)$  ( $\eta_1 = 1, \eta_2 = \eta; i = 0, 1, 3$ ),  $Q_{nj}(r_1 \eta_k s)$  на  $(-1)^n J_{nj}(r_2 \eta_k s)$  и  $J_{nj}(r_1 \eta s)$  на  $Q_{nj}(r_2 \eta_k s)$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $e_{1m}$  на  $e_{2m}$  ( $m = 1+6$ ). Причем последние величины определяются так:

$$\begin{aligned} e_{21} = e_{24} &= 1, \quad e_{22} = e^{-(r_2 - \delta)s} \\ e_{23} &= e^{-(r_2 + \delta)s}, \quad e_{25} = e^{-(r_2 - \delta)\eta s}, \quad e_{26} = e^{-(r_2 + \delta)\eta s} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя коэффициенты (2.6), (2.7) в граничные условия (2.1)–(2.4), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций  $A_n^L(s), B_n^L(s), C_n^L(s)$  и  $D_n^L(s)$ :

$$\begin{aligned} M^{(1)} A v^2 w z t + N^{(1)} C u w^2 z t + T_1^{(1)} B w t + T_1^{(2)} B w z^2 t - T_1^{(3)} B u^2 w t + T_1^{(4)} B u^2 w z^2 t + \\ + T_1^{(5)} D u z - T_1^{(6)} D u z t^2 - T_1^{(7)} D u w^2 z + T_1^{(8)} D w^2 u z t^2 = K^{(1)} u w z t \\ M^{(2)} A v^2 w z t + N^{(2)} C u w^2 z t + T_2^{(1)} B w t - T_2^{(2)} B w z^2 t - T_2^{(3)} B u^2 w t + T_2^{(4)} B w u^2 z^2 t + \\ + T_2^{(5)} D u z - T_2^{(6)} D u z t^2 - T_2^{(7)} D u w^2 t + T_2^{(8)} D w^2 u z t^2 = K^{(2)} u w z t \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} L_1^{(1)} B y z t - L_1^{(2)} B x^2 y z t + F_1^{(1)} A x^2 y t - F_1^{(2)} A x^2 y z^2 t + L_1^{(3)} D x z t - \\ - L_1^{(4)} D x y^2 z t + F_1^{(3)} C x y^2 z - F_1^{(4)} C x y^2 z t^2 = 0 \\ L_2^{(1)} B y z t - L_2^{(2)} B x^2 y z t + F_2^{(1)} A x^2 y t - F_2^{(2)} A x^2 y z^2 t + L_2^{(3)} D x y z t - \\ - L_2^{(4)} D x y^2 z t + F_2^{(3)} C x y^2 z - F_2^{(4)} C x y^2 z t^2 = 0 \end{aligned}$$

$$x = e^{-R_2 s}, \quad y = e^{-R_2 \eta s}, \quad v = e^{-R_1 s}, \quad w = e^{-R_1 \eta s}, \quad z = e_{13}, \quad t = e_{16}$$

где  $T_j^{(i)}$  и  $F_j^{(k)}$  – бесконечные матрицы с элементами  $T_{npj}^{(i)}(s)$  и  $F_{npj}^{(k)}(s)$ ;  $M^{(j)}$ ,  $N^{(j)}$  и  $L_j^{(k)}$  – бесконечные диагональные матрицы с элементами  $M_n^{(j)}(s), N_n^{(j)}(s)$  и  $L_{nj}^{(k)}(s)$  ( $i = 1+8; j = 1, 2; k = 1+4$ );  $K^{(l)}$  – бесконечные столбцы с элементами  $K_n^{(l)}(s)$  ( $l = 1, 2$ );  $A, B, C$  и  $D$  – бесконечные неизвестные столбцы с элементами  $A_n^L(s), B_n^L(s), C_n^L(s)$  и  $D_n^L(s)$ .

В случае граничных условий (2.1) и (2.3) (на внутренней сфере задана осесимметричная поверхностная нагрузка, а внешняя сфера свободна от напряжений) элементы матриц  $T_j^{(i)}$ ,  $M^{(j)}$ ,  $N^{(j)}$  и столбцов  $K^{(l)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} T_{npj}^{(m)}(s) &= Q_{nj}(-R_1 s) C_{np}^{(m)}(s), & T_{npj}^{(2+m)}(s) &= Q_{nj}(R_1 s) C_{np}^{(m)}(s) \quad (j=1,2) \\ T_{np1}^{(4+m)}(s) &= \eta^{-n} Q_{n2}(-R_1 \eta s) S_{np}^{(m)}(s), & T_{np1}^{(6+m)}(s) &= \eta^{-n} Q_{n2}(R_1 \eta s) S_{np}^{(m)}(s) \\ T_{np2}^{(4+m)}(s) &= \frac{Q_{n3}(-R_1 \eta s)}{n(n+1)\eta^n} S_{np}^{(m)}(s), & T_{np2}^{(6+m)}(s) &= \frac{Q_{n3}(-R_1 \eta s)}{n(n+1)\eta^n} S_{np}^{(m)}(s) \quad (m=1,2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$M_n^{(1)}(s) = Q_{n1}(R_1 s), \quad N_n^{(1)}(s) = \eta^{-n} n(n+1) Q_{n2}(R_1 \eta s)$$

$$M_n^{(2)}(s) = Q_{n2}(R_1 s), \quad N_n^{(2)}(s) = \eta^{-n} Q_{n3}(R_1 \eta s)$$

$$K_n^{(1)}(s) = R_1^{n+3} s^n P_{1n}^L(s), \quad K_n^{(2)}(s) = R_1^{n+3} s^n q_{1n}^L(s)$$

а элементы матриц  $F_j^{(k)}$  и  $L_j^{(k)}$  определяются так:

$$\begin{aligned} F_{npj}^{(m)}(s) &= Q_{nj}(R_2 s) C_{np}^{(m)}(s), & F_{np1}^{(2+m)}(s) &= \eta^{-n} Q_{n2}(R_2 \eta s) S_{np}^{(m)}(s) \\ F_{np2}^{(2+m)}(s) &= n^{-1} (n+1)^{-1} \eta^{-n} Q_{n3}(R_2 \eta s) S_{np}^{(m)}(s) \quad (m=1,2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$L_{nj}^{(1)}(s) = (-1)^n Q_{nj}(-R_2 s), \quad L_{n1}^{(3)}(s) = n(n+1)(-\eta)^n Q_{n2}(-R_2 \eta s)$$

$$L_{n2}^{(3)}(s) = (-\eta)^n Q_{n3}(-R_2 \eta s), \quad L_{nj}^{(2k)}(s) = L_{nj}^{(2k-1)}(-s) \quad (j; k=1,2)$$

Если вместо граничных условий (2.3) рассматриваются условия (2.4), то в соотношениях (2.12) необходимо заменить следующие многочлены:  $Q_{n1}$  на  $R_{n1}$ ,  $Q_{n2}$  на  $R_{n0}$ ,  $Q_{n3}$  на  $R_{n3}$ . Если же вместо граничных условий (2.1) используются условия (2.2), то в формулах (2.11) выполняются аналогичные замены, а элементы столбцов  $K_n^{(l)}$  имеют вид:

$$K_n^{(1)}(s) = -R_1^{n+2} s^n U_n^L(s), \quad K_n^{(2)}(s) = -R_1^{n+2} s^n V_n^L(s) \quad (2.13)$$

Отметим, что элементы всех указанных матриц и векторов являются рациональными функциями параметра преобразования  $s$ .

В силу громоздкости явных формул приведем решение системы (2.10) для частного случая акустической среды.

**3. Акустическая среда.** Предельным переходом при  $\eta \rightarrow \infty$  ( $\kappa \rightarrow 1$ ) из (2.10) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_n^L(s)$  и  $B_n^L(s)$  для акустической среды:

$$MAv^2 z + T^{(1)}B - T^{(2)}Bv^2 - T^{(3)}Bz^2 + T^{(4)}Bv^2 z^2 = Zvz \quad (3.1)$$

$$L^{(1)}Bz - L^{(2)}Bx^2 z + F^{(1)}Ax^2 - F^{(2)}Ax^2 z^2 = 0$$

Здесь  $T^{(i)}$  и  $F^{(k)}$  бесконечные матрицы с элементами  $T_{np}^{(i)}(s)$  и  $F_{np}^{(k)}$ ,  $M$  и  $L^{(k)}$  – бесконечные диагональные матрицы с элементами  $M_n(s)$  и  $L_n^{(k)}(s)$  ( $i=1+4; k=1,2$ ),  $Z$  – бесконечный столбец с элементами  $Z_n(s)$ . В случае различных граничных условий в соответствии с (2.11) и (2.12) элементы этих матриц имеют следующий вид:

а) к поверхности полости  $r_1 = R_1$  приложено осесимметричное давление  $p_1(\tau, \theta_1)$

$$T_{np}^{(i)}(s) = T_{np1}^{(i)}(s) / (R_1 s)^2, \quad M_n(s) = M_n^{(1)}(s) / (R_1 s)^2, \quad Z_n(s) = K_n^{(1)}(s) / (R_1 s)^2$$

$$T_{np}^{(m)}(s) = R_{n0}(-R_1 s) C_{np}^{(m)}(s), \quad T_{np}^{(2+m)}(s) = R_{n0}(R_1 s) C_{np}^{(m)}(s) \quad (m = 1, 2)$$

$$M_n(s) = R_{n0}(R_1 s), \quad Z_n(s) = -R_n^{n+1} s^{n-2} p_{1n}^L(s)$$

б) на поверхности полости  $r_1 = R_1$  задана скорость  $V(\tau, \theta_1)$ :

$$T_{np}^{(m)}(s) = T_{np1}^{(m)}(s) = R_{n1}(-R_1 s) C_{np}^{(m)}(s)$$

$$T_{np}^{(2+m)}(s) = T_{np1}^{(2+m)}(s) = R_{n1}(R_1 s) C_{np}^{(m)}(s) \quad (m = 1, 2)$$

$$M_n(s) = M_n^{(1)}(s) = R_{n1}(R_1 s), \quad Z_n(s) = K_n^{(1)}(s) = -R_1^{n+2} s^n V_n^L(s)$$

в) на внешней сфере  $r_2 = R_2$  скорость равна нулю

$$F_{np}^{(m)}(s) = F_{np1}^{(m)}(s) = R_{n1}(R_2 s) C_{np}^{(m)}(s), \quad L_n^{(m)}(s) = L_{n1}^{(m)}(s) \quad (m = 1, 2)$$

$$L_n^{(1)}(s) = L_n^{(2)}(-s) = (-1)^n R_{n1}(-R_2 s)$$

Решение системы уравнений (3.1) представим в виде рядов по экспонентам

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = \sum_{i,k,n=0}^{\infty} \left( \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{ikn}^{(1)}(s) \\ \mathbf{b}_{ikn}^{(1)}(s) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x^i v^{-k-1} z^n \\ x^i v^{-k-1} z^{-n-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{ikn}^{(2)}(s) \\ \mathbf{b}_{ikn}^{(2)}(s) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x^i v^{-k-1} z^{-n-1} \\ x^i v^{-k-1} z^n \end{Bmatrix} \right) \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{a}_{ikn}^{(l)}(s)$  и  $\mathbf{b}_{ikn}^{(l)}(s)$  – бесконечные неизвестные векторы с соответствующими элементами  $a_{ikn}^{(l,q)}(s)$  и  $b_{ikn}^{(l,q)}(s)$  ( $l = 1, 2; q = 0, 1, 2, \dots$ ).

Подставляя ряды (3.2) в систему (3.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменных  $x, v$  и  $z$ , получим рекуррентные соотношения для коэффициентов  $a_{ikn}^{(l,q)}(s), b_{ikn}^{(l,q)}(s)$  ( $l = 1, 2; q = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$a_{000}^{(1,q)}(s) = Z_q(s) / M_q(s), \quad a_{i0n}^{(1,q)}(s) = 0 \quad (i \geq 0, n \geq 0, in \neq 0)$$

$$a_{i0n}^{(2,q)}(s) = b_{i0n}^{(1,q)}(s) = 0, \quad b_{ikn}^{(1,q)}(s) = 0 \quad (i = 0, 1; k \geq 0, n \geq 0)$$

$$b_{ik0}^{(1,q)}(s) = X_q(s) \left[ b_{i-2,k0}^{(1,q)}(s) + \sum_{m=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{q+m} C_{qp}^{(m)}(s) a_{i-2,k,2-m}^{(m,q)}(s) \right]$$

$$b_{ik0}^{(2,q)}(s) = X_q(s) \left[ b_{i-2,k0}^{(2,q)}(s) + \sum_{m=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{q+m} C_{qp}^{(m)}(s) a_{i-2,k,m-1}^{(m,q)}(s) \right] \quad (i \geq 2, k \geq 0)$$

$$b_{ikn}^{(1,q)}(s) = X_q(s) \left[ b_{i-2,kn}^{(1,q)}(s) + \sum_{m=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{q+m} C_{qp}^{(m)}(s) a_{i-2,k,n-2m+3}^{(m,q)}(s) \right]$$

$$b_{ikn}^{(2,q)}(s) = X_q(s) \left[ b_{i-2,kn}^{(2,q)}(s) + \sum_{m=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{q+m} C_{qp}^{(m)}(s) a_{i-2,k,n+2m-3}^{(m,q)}(s) \right]$$

$$(i \geq 2, k \geq 0, n \geq 1)$$

$$a_{ik0}^{(1,q)}(s) = \sum_{m=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^m C_{qp}^{(m)}(s) \left[ Y_q(s) b_{i,k+2m-4,1}^{(1,q)}(s) - b_{i,k+2m-4,0}^{(2,q)}(s) \right]$$

$$a_{ik0}^{(2,q)}(s) = \sum_{m=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^m C_{qp}^{(m)}(s) \left[ Y_q(s) b_{i,k+2m-4,0}^{(1,q)}(s) - b_{i,k+2m-4,1}^{(2,q)}(s) \right]$$

$(i \geq 0, k \geq 1)$

$$a_{ikn}^{(1,q)}(s) = \sum_{m=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^m C_{qp}^{(m)}(s) [Y_q(s) b_{i,k+2m-4,n+1}^{(1,q)}(s) - b_{i,k+2m-4,n-1}^{(1,q)}(s)]$$

$$a_{ikn}^{(2,q)}(s) = \sum_{m=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^m C_{qp}^{(m)}(s) [Y_q(s) b_{i,k+2m-4,n-1}^{(2,q)}(s) - b_{i,k+2m-4,n+1}^{(2,q)}(s)]$$

$(i \geq 0, k \geq 1, n \geq 1)$

Здесь формально полагается, что  $b_{i,-1,n}^{(l,q)}(s) = 0$  ( $i \geq 0, n \geq 0$ ). Входящие в формулы (3.3) рациональные функции  $X_q(s)$  и  $Y_q(s)$  имеют следующий вид:

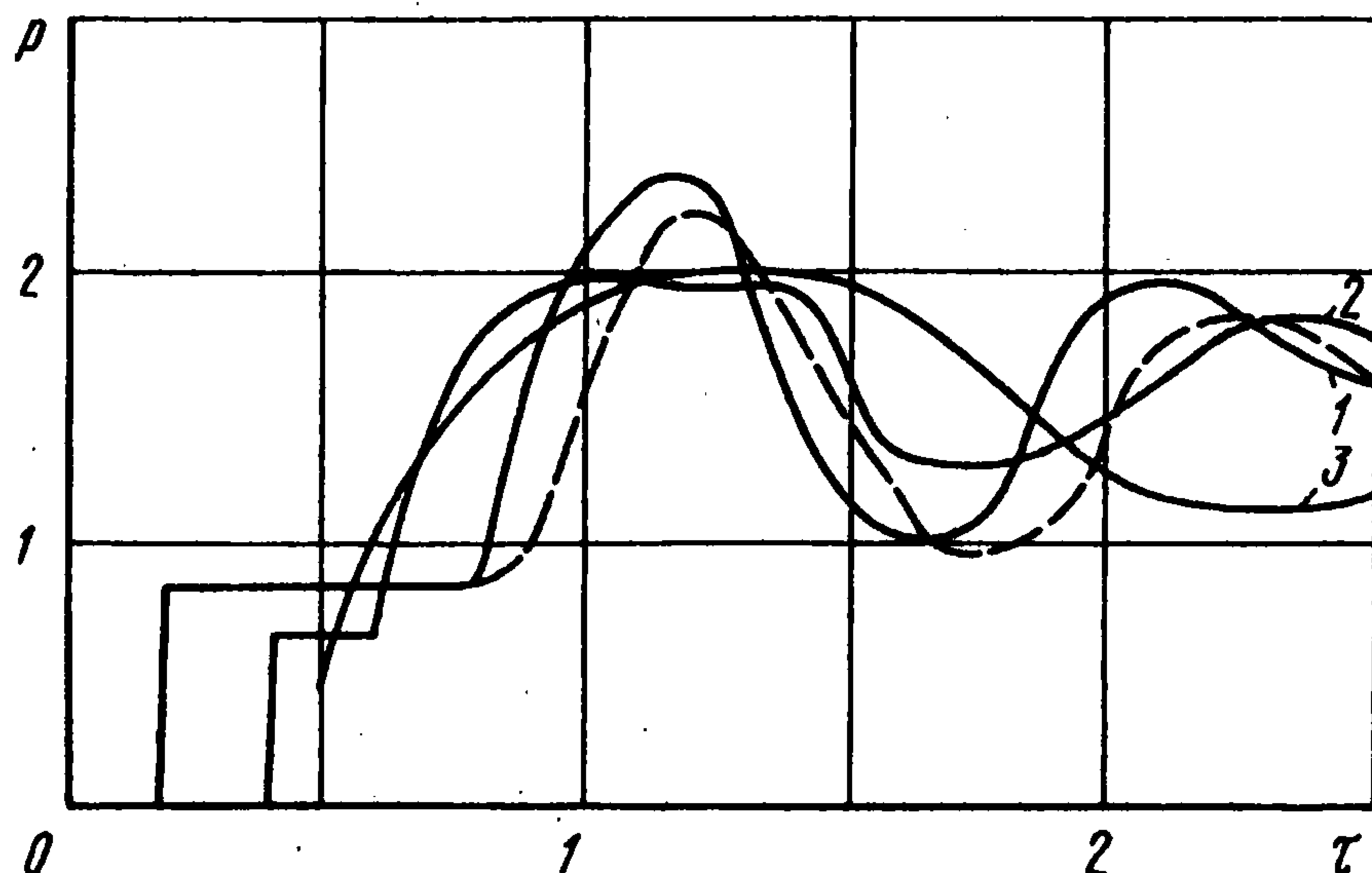
$$X_q(s) = R_{q1}(R_2 s) / R_{q1}(-R_2 s), \quad Y_q(s) = M_q(-s) / M_q(s)$$

Осуществляя предельный переход при  $\eta \rightarrow \infty$  ( $\kappa \rightarrow 1$ ) в выражениях (2.9) для коэффициентов  $\sigma_{\eta\eta n}^L(r_1, s)$  и учитывая решение (3.2), получим следующую явную формулу для коэффициентов  $p_q^L(r_1, s)$  разложения давления  $p = -\sigma_{\eta\eta}$  в ряд по полиномам  $P_q(\cos \theta_1)$ :

$$p_q^L(r_1, s) = \frac{1}{r_1^{q+1}} \sum_{i,k,n=0}^{\infty} \left\{ \frac{R_{q0}(r_1 s)}{s^{q-2}} [a_{ikn}^{(1,q)}(s) z^2 + a_{ikn}^{(2,q)}(s) z^{-n-1}] x^i v^{-k-1} e_{11} + \right. \\ \left. + \frac{G_{q0}(r_1 s)}{s^{q-2}} \sum_{p=0}^{\infty} C_{qp}^{(1)}(s) [b_{ikn}^{(1,p)}(s) z^{n-1} + b_{ikn}^{(2,p)}(s) z^{-n-2}] x^i v^{-k-1} - \right. \\ \left. - \frac{G_{q0}(r_1 s)}{s^{q-2}} \sum_{p=0}^{\infty} C_{qp}^{(2)}(s) [b_{ikn}^{(1,p)}(s) z^{n+1} + b_{ikn}^{(2,p)}(s) z^{-n}] x^i v^{-k-1} \right\} \quad (3.4)$$

Таким образом, формулы (3.4) совместно с рекуррентными соотношениями (3.3) позволяют без применения редукции к бесконечной системе (3.1) получить решение задачи. При фиксированном числе членов в рядах по углу  $\theta_1$  для давления коэффициенты в (3.4) являются произведением рациональных и экспоненциальных функций параметра  $s$ . Вычисление их оригиналов проводится в явном виде с использованием соответствующих теорем операционного исчисления.

Отметим, что для упругой среды решение системы (2.12) может быть представлено в виде, аналогичном (3.2)–(3.4), но рекуррентные соотношения (3.3) имеют более громоздкий вид.



4. В качестве примера реализации приведенного выше алгоритма приведем результаты расчетов для акустической среды с внутренней полостью радиуса  $R_1 = 1$ , на которой задано давление вида  $p_1(\tau, \theta_1) = p_{00}H(\tau)$ , где  $H(\tau)$  – единичная функция Хевисайда.

На внешней поверхности  $R_2 = 2$  скорость равна нулю. Смещение центров сфер  $\delta = 0,5$ .

Сплошными линиями на фигуре приведены графики изменения во времени давления в среде, полученные с учетом четырех членов рядов по углу  $\theta_1$ , в следующих точках:  $r_1 = 1, 2$  и  $\theta_1 = \pi$  (кривая 1),  $r_1 = 1,4$  и  $\theta_1 = \pi$  (кривая 2),  $r_1 = 1,5$  и  $\theta_1 = \pi$  (кривая 3). Штриховая линия соответствует результатам, полученным при удержании в рядах по углу  $\theta_1$  первых трех членов рядов при параметрах, соответствующих кривой 1. Сравнение этих кривых демонстрирует достаточно быструю сходимость рядов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 254 с.
2. Кубенко В.Д., Бабаев А.Э., Годенко В.П. Взаимодействие нестационарной волны давления с жесткой сферой, расположенной вблизи свободной поверхности // Гидромеханика. Киев: Наук. думка, 1988. Вып. 57. С. 10–15.
3. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. Распространение волн от сферической полости в акустическом полупространстве // ПММ. 1991. Т. 55. № 1. С. 173–174.
4. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 264 с.
5. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.

Москва

Поступила в редакцию  
7.IV.1993