ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 58, Вып. 2, 1994

УДК 533.601

© 1994 г. А.В. Латышев, А.А. Юшканов

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СКАЧКАХ ТЕМПЕРАТУРЫ И ПЛОТНОСТИ ПАРА НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

Строится аналитическое решение уравнения Больцмана с оператором столкновений БГК (Бхатнагара, Гросса и Крука) в задаче о скачках температуры и плотности разреженного газа в полупространстве над испаряемой поверхностью, причем вдали от поверхности задан постоянный градиент температуры. Проводятся необходимые численные расчеты. Одновременно развивается метод канонической матрицы с нормальной формой на бесконечности для решения векторной краевой задачи Римана–Гильберта, к решению которой сводится доказательство разложения решения рассматриваемой граничной задачи по обобщенным собственным векторам соответствующего характеристического уравнения.

Эта задача решалась различными приближенными методами в многочисленных работах (например, [1–8]). История вопроса описана в монографиях [8–10], а также в указанных работах.

Ниже получено точное (в замкнутой форме) решение этой классической задачи, выраженное в квадратурах, выполнены численные расчеты по точным формулам. Уравнение Больцмана приведено к векторному интегродифференциальному уравнению с симметричным ядром, которое решается методом Кейза, состоящим в разложении решения по обобщенным собственным векторам. Доказательство теоремы о разложении эквивалентно решению векторной краевой задачи Римана–Гильберта с матричным коэффициентом, диагонализирующая матрица которого аналитична в плоскости с разрезами, соединяющими точки ветвления. Поэтому для построения фактор-матрицы для коэффициента требуется решение еще двух дополнительных матричных краевых задач на разрезах. На этом пути удалось развить метод канонической матрицы для решения краевой задачи.

Ранее [11] был развит метод фундаментальной матрицы для решения соответствующей краевой задачи. В данной работе используется каноническая матрица. Отметим, что хотя сама каноническая матрица (в задаче о температурном скачке) была построена [12], она не была использована для решения соответствующей краевой задачи.

Рассматриваемые уравнения и аналогичные им широко применяются помимо кинетической теории также в теоретической астрофизике, в физике плазмы, в теории переноса нейтронов (более подробно см., например, [13–15]).

Пусть разреженный одноатомный газ занимает полупространство $x > 0$ над испаряемой поверхностью, лежащей в плоскости $x = 0$. В газе вдали от поверхности поддерживается стационарное температурное поле $T(x) = T_0(1 + Kx)$. Поведение газа описывается функцией распределения f, которая является решением уравнения Больцмана

$$\upsilon_x \frac{\partial}{\partial x} f(x,\mathbf{C}) = Lf$$

и удовлетворяет граничным условиям:

$$f(x,\mathbf{C}) = f^{(0)}\left[1+(Kx - AC_x + \varepsilon_T)(C^2 - 5/2) + \varepsilon_n + \varepsilon_T\right] \quad (x \to \infty)$$

$$f(0,\mathbf{C}) = f^{(0)}, \quad C_x > 0$$

Здесь

$$\varepsilon_T = (T_0 - T_w)/T_w,\quad \varepsilon_n = (n_0 - n_w)/n_w$$

$$f^{(0)} = n_w(\beta_w/\pi)^{3/2}\exp(-C^2)$$

$$\mathbf{C} = \beta_w^{1/2}\mathbf{v},\quad \beta_w = m/(2kT_w),\quad A = 3Kl/\sqrt{\pi}$$

(ε_T и ε_n – соответственно искомые величины скачков температуры и плотности, T_w – температура стенки, n_w – плотность насыщенного пара).

Новизна постановки задачи с физической точки зрения по сравнению с работой [11] состоит в том, что в данной задаче газ занимает полупространство над испаряемой (проницаемой) поверхностью, через которую поток массы от поверхности отсутствует, т.е. газ находится в механическом равновесии с поверхностью. Наличие градиента температуры в системе означает тепловое неравновесие. Это приводит к тому, что концентрация газа вблизи поверхности оказывается отличной от равновесной – концентрации насыщенного пара при температуре поверхности.

Вычисление относительного отклонения концентрации пара от равновесного (величина ε_n) и вычисление относительного скачка температуры (величина ε_T) являются с физической точки зрения основными задачами в работе.

Будем искать решение уравнения Больцмана в виде

$$f = f^{(0)}[1 + (Kx - AC_x)(C^2 - 5/2) + Y(x, \mathbf{C})]$$

и разложим Y по двум ортогональным направлениям:

$$Y = Y_1(x, C_x) + (C_y^2 + C_z^2 - 1)Y_2(x, C_x)$$

Тогда относительно вектора-столбца $Y = \begin{Vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Vmatrix}$ получим уравнение

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial x} + 1\right)Y(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}Q(\mu)\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q^T(\mu')Y(x,\mu')\exp(-\mu'^2)d\mu' \tag{1}$$

$$\left(Q(\mu) = \begin{Vmatrix} \gamma\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) & 1 \\ \gamma & 0 \end{Vmatrix},\quad \gamma^2 = \frac{2}{3}\right)$$

с граничными условиями

$$Y(0,\mu) = A\mu\begin{Vmatrix} \mu^2 - \frac{3}{2} \\ 1 \end{Vmatrix} \quad (\mu > 0)$$

$$Y(\infty,\mu) = \varepsilon_T\begin{Vmatrix} \mu^2 - \frac{1}{2} \\ 1 \end{Vmatrix} + \varepsilon_n\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad (\mu < 0) \tag{2}$$

(символ T означает транспонирование).

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$Y_\eta(x,\mu) = \exp(-x/\eta)F(\eta,\mu) \tag{3}$$

и приходим к характеристическому уравнению

$$(\eta - \mu)F(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta Q(\mu)n(\eta) \tag{4}$$

$$\left(n(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)Q^T(\mu)F(\eta,\mu)d\mu\right)$$

где $n(\eta)$ – неособый нормировочный вектор. Отсюда находим собственные векторы характеристического уравнения:

$$F(\eta,\mu)=\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta Q(\mu)P\frac{1}{\eta-\mu}+\exp(\eta^2)Q^{-T}(\eta)\Lambda(\eta)\delta(\eta-\mu)\right]n(\eta)$$

$$\left(\Lambda(z)=I+\frac{1}{\sqrt{\pi}}z\int_{-\infty}^{\infty}Q^T(\mu)Q(\mu)\exp(-\mu^2)\frac{d\mu}{\mu-z}\right) \tag{5}$$

Символ Px^{-1} означает распределение – главное значение интеграла от x^{-1}, $\delta(x)$ – дельта-функция, $\Lambda(z)$ – дисперсионная матрица, I – единичная матрица, $Q^{-T}(\mu)$ – обратная транспонированная матрица.

Можно показать, что дисперсионное уравнение

$$\lambda(z)\equiv\det\Lambda(z)=0$$

имеет на бесконечности нуль четвертого порядка, которому отвечают следующие решения уравнения (1):

$$Y_1=\left\|\begin{matrix}\mu^2-\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\right\|,\quad Y_2=\left\|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right\|,\quad Y_3=(\mu-x)Y_1,\quad Y_4=(\mu-x)Y_2 \tag{6}$$

Теорема. Уравнение (1) с граничными условиями (2) имеет единственное решение, представимое в виде разложения:

$$Y(x,\mu)=\varepsilon_T\left\|\begin{matrix}\mu^2-\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\right\|+\varepsilon_n\left\|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right\|+\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)F(\eta,\mu)d\eta \tag{7}$$

Доказательство. Подставим в разложение (7) $x=0$ и собственные векторы (5). Получим векторное сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши на полуоси $\mu>0$:

$$\psi(\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}Q(\mu)\int_0^{\infty}\frac{\eta n(\eta)}{\eta-\mu}d\eta+\exp(\mu^2)Q^{-T}(\mu)\Lambda(\mu)n(\mu) \tag{8}$$

$$\left(\psi(\mu)=A\mu\left\|\begin{matrix}\mu^2-\frac{3}{2}\\ 1\end{matrix}\right\|-\varepsilon_T\left\|\begin{matrix}\mu^2-\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\right\|-\varepsilon_n\left\|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right\|\right)$$

Умножив уравнение (8) на $\mu\exp(-\mu^2)Q^T(\mu)$ слева, воспользуемся граничными значениями на полуоси дисперсионной матрицы и вектора

$$N(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{\eta n(\eta)}{\eta-z}d\eta \tag{9}$$

получим однородную векторную краевую задачу Римана–Гильберта с матричным коэффициентом, которую после транспонирования запишем в виде

$$[2\sqrt{\pi}iN^+(\mu)-Q^{-1}(\mu)\psi(\mu)]^T\Lambda^+(\mu)=[2\sqrt{\pi}iN^-(\mu)-Q^{-1}(\mu)\psi(\mu)]^T\Lambda^-(\mu),\quad \mu>0 \tag{10}$$

Умножив уравнение (10) справа на $Q^{-1}(\mu)Q^{-T}(\mu)$ и обозначив

$$W(z)=\Lambda(z)Q^{-1}(z)Q^{-T}(z) \tag{11}$$

получим следующую краевую задачу:

$$[2\sqrt{\pi}iN^+(\mu)-Q^{-1}(\mu)\psi(\mu)]^TW^+(\mu)=[2\sqrt{\pi}iN^-(\mu)-Q^{-1}(\mu)\psi(\mu)]^TW^-(\mu),\quad \mu>0 \tag{12}$$

Заметим, что матрица

$$S(z)=\begin{Vmatrix} 1/\gamma & \frac{1}{2}[r(z)-z^2-\frac{1}{2}] \\ -1/\gamma & \frac{1}{2}[r(z)+z^2+\frac{1}{2}] \end{Vmatrix}$$

$$(r(z)=\sqrt{w(z)}, \quad w(z)=z^4-3z^2+25/4)$$

приводит к диагональному виду матрицу $W(z)$:

$$S(z)W(z)S^{-1}(z)=\mathrm{diag}\{\Omega_1(z),\ \Omega_2(z)\}\equiv\Omega(z)$$

Здесь

$$\Omega_\alpha(z)=1/4\left[11/2-z^2+(-1)^{\alpha-1}r(z)+4zt(z)\right] \quad (\alpha=1,2)$$

– элементы диагональной матрицы $\Omega(z)$.

Матрица-функция $S(z)$ однозначна и аналитична в плоскости с разрезами Γ_1 и Γ_2, соединяющими соответственно точки ветвления $-\bar{a}$ и a, $-a$ и $\bar{a}$, являющиеся нулями полинома $w(z)(a=\sqrt{2}+i/\sqrt{2})$.

Для матричного коэффициента

$$G(\mu)=\Lambda^+(\mu)\left[\Lambda^-(\mu)\right]^{-1} \tag{13}$$

входящего в краевое условие (10), рассмотрим задачу факторизации:

$$\Phi^+(\mu)=G(\mu)\Phi^-(\mu), \quad \mu>0 \tag{14}$$

Кроме того, для однозначности матрицы-функции $\Phi(z)$ потребуем, чтобы на разрезе $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ выполнялось условие

$$\Phi^+(\tau)=\Phi^-(\tau), \quad \tau\in\Gamma \tag{15}$$

Будем искать решение задач (15) и (14) в виде

$$\Phi(z)=S^{-1}(z)U(z)S(z) \tag{16}$$

где $U(z)$ – новая неизвестная матрица.

Теперь краевые задачи (14) и (15) эквивалентны следующим краевым задачам:

$$U^+(\mu)=G_0(\mu)U^-(\mu), \quad \mu>0 \tag{17}$$

$$U^+(\tau)T=TU^-(\tau), \quad \tau\in\Gamma \tag{18}$$

Здесь

$$G_0(\mu)=S(\mu)G(\mu)S^{-1}(\mu)=\Omega^+(\mu)\left[\Omega^-(\mu)\right]^{-1}$$

$$T=-S^+(\tau)\left[S^-(\tau)\right]^{-1}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Так как матрица G_0 диагональна, удобно взять U также в виде диагональной матрицы: diag $\{U_1; U_2\}\equiv U$. Матричная краевая задача (17) распадается теперь на две скалярные краевые задачи:

$$U_\alpha^+(\mu)=\frac{\Omega_\alpha^+(\mu)}{\Omega_\alpha^-(\mu)}\ U_\alpha^-(\mu) \ (\alpha=1,2), \ \mu>0 \tag{19}$$

а задача (18) остается по существу векторной:

$$U_1^{\pm}(\tau)=U_2^{\mp}(\tau),\ \ \tau\in\Gamma \tag{20}$$

Приведем без вывода решение задач (19) и (20):

$$U_\alpha(z)=(z-x_1)U_\alpha^{(0)}(z)\ \ (\alpha=1,2) \tag{21}$$

$$U_\alpha^{(0)}(z)=\exp\left\{A(z)+(-1)^{\alpha-1}r(z)(B(z)-R(z))\right\}$$

$$A(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{d(x)}{x-z}\,dx,\ \ B(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{b(x)dx}{r(x)(x-z)}$$

$$R(z)=\int\limits_0^{x_1}\frac{dx}{r(x)(x-z)}$$

$$a(x)=\theta_1(x)+\theta_2(x)-2\pi,\ \ b(x)=\theta_2(x)-\theta_1(x)$$

Точка x_1 – решение задачи обращения Якоби

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{b(x)}{r(x)}\,dx=\int\limits_0^{x_1}\frac{dx}{r(x)}$$

Здесь $\theta_\alpha(x)$ – главное значение аргумента функции $\Omega_\alpha^{+}(x)$.

Итак, фактор-матрица $\Phi(z)$ для дисперсионной матрицы $\Lambda(z)$ построена и определяется выражением (16). Теперь понадобится другая факторизация дисперсионной матрицы из [16]:

$$\Lambda(z)=\Phi_0(z)\Phi_0^T(-z) \tag{22}$$

где $\Phi_0(z)$ – каноническая матрица с нормальной формой на бесконечности.

Подставим выражение (22) в (10), умножим его справа на $\Phi_0^{-T}(-\mu)$ и применим к полученному уравнению транспонирование. Получим краевую задачу

$$[\Phi_0^{+}(\mu)]^T[2\sqrt{\pi}iN^{+}(\mu)-Q^{-1}(\mu)\psi(\mu)]=[\Phi_0^{-}(\mu)]^T[2\sqrt{\pi}iN^{-}(\mu)-Q^{-1}(\mu)\psi(\mu)],\ \ \mu>0 \tag{23}$$

Учитывая поведение на бесконечности входящих в это краевое условие (23) матриц и векторов, напишем его общее решение

$$2\sqrt{\pi}iN(z)=(Az-\varepsilon_T)\begin{Vmatrix}1/\gamma\\-1\end{Vmatrix}-(\varepsilon_n+\varepsilon_T)\begin{Vmatrix}0\\1\end{Vmatrix}+\Phi_0^{-T}(z)\begin{Vmatrix}c_1\\c_2\end{Vmatrix} \tag{24}$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Матрицу $\Phi_0^{-T}(z)$ найдем на основании формул (60) и (61) из работы [12]:

$$\Phi_0^{-T}(z)=\sqrt{12/5}\,\Phi^{-T}(z)\Xi(-z) \tag{25}$$

причем матрица $\Xi(z)$ определяется выражением (62) из [12].

Сделаем полученное решение (24) корректным, т.е. определим неизвестные постоянные ε_T, ε_n, c_1 и c_2 так, чтобы это решение убывало на бесконечности как $1/z$. Тогда этот вектор можно принять в качестве вектора $N(z)$, определенного формулой (9).

Пусть p_n и $q_n (n = 0, -1, -2,\ldots)$ – лорановские коэффициенты разложений соответственно функций $[U_1^{(0)}(z)]^{-1}$ и $[U_2^{(0)}(z)]^{-1}$ в окрестности бесконечности, причем согласно (21), $p_0q_0 = 1$. Обозначим через A_{-n}, B_{-n} и R_{-n} $(n = 1,2,\ldots)$ лорановские коэффициенты разложений в окрестности бесконечности функций $A(z)$, $B(z)$ и $R(z)$

$$A_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty a(x)x^{n-1}dx,\quad B_{-n}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{b(x)}{r(x)}\ x^{n-1}dx$$

$$R_{-n}=-\int_0^{x_1}\frac{x^{n-1}}{r(x)}\ dx \tag{26}$$

Приравняем нулю коэффициенты в верхней и нижней строках равества (23) при z и z^0, получим систему уравнений, из которых найдем

$$c_1=-\frac{\sqrt{5}}{2}A,\quad c_2=0$$

$$\varepsilon_T=A[-x_1-p_0p_{-1}+\sqrt{3}\,b_{12}q_0] \tag{27}$$

$$\varepsilon_n=A[x_1+p_0p_{-1}-(q_0-2p_0)\sqrt{3}\,b_{12}]$$

где коэффициент b_{12} определен в работе [12]. Свободные параметры вектора $N(z)$ определены однозначно, в том числе и коэффициенты ε_T и ε_n разложения (7), отвечающие дискретному спектру. Коэффициенты непрерывного спектра $n(\mu)$ находятся также однозначно из формулы Сохоцкого: $N^+(\mu)-N^-(\mu)=\mu n(\mu)$. Теорема доказана.

Последние две формулы (27) дают искомые величины скачков температуры и плотности газа над испаряемой поверхностью. Выпишем эти формулы в явном виде:

$$\varepsilon_T=-\frac{3Kl}{\sqrt{\pi}}\left\{2x_1Q-A_{-1}+B_{-3}-R_{-1}\right\}$$

$$\varepsilon_n=-\varepsilon_T-\frac{12Kl}{\sqrt{\pi}}x_1Q\exp\left\{-2A_{-2}+2R_{-2}\right\} \tag{28}$$

$$Q=(\gamma^2+\beta\gamma x_1-\alpha^2)\ (\gamma-\alpha)^{-2}$$

$$\alpha=-\frac{1}{\sqrt{6}}\left[r(x_1)+x_1^2+\frac{1}{2}\right],\quad \beta=-\gamma x_1\left(1+\frac{x_1^2-3/2}{r(x_1)}\right)$$

(коэффициенты A_{-1}, A_{-2}, R_{-1}, R_{-2}, B_{-3} определены равенствами (26)).

Численные расчеты, выполненные по точным формулам (28), дают следующие значения: ε_T = 2,15897Kl и ε_n = –1,23035Kl соответственно для скачка температуры и скачка плотности в разреженном газе. До настоящего времени точным значением величины скачка температуры считалась величина ε_T = 2,1646984Kl [16].

Полученная здесь первая формула (28) в точности совпадает с формулой (30) из работы [11].

Предлагаемый метод может быть использован для решения аналогичной краевой задачи Римана–Гильберта с матричным коэффициентом (диагонализирующая матрица которого имеет точки ветвления), возникающей в теории рассеяния поляризованного света (см., например, [17]).

Авторы благодарят Е.Б. Долгошеину за помощь в численных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sone Y.* Kinetic theory of evaporation and condensation: Linear and nonlinear problems // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 45. № 1. P. 315–320.
2. *Sone Y., Onishi Y.* Kinetic theory of evaporation and condensation: Hydrodynamics equation and slip boundary condition // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 44. № 6. P. 1981–1994.
3. *Onishi Y.* On the behavior of a noncondensable gas of a small amount in weakly nonlinear evaporation and condensation of a vapor // J. Phys. Soc. Japan. 1986. V. 55. № 9. P 3080–3092.
4. *Thomas J.R.Jr., Valougeorgis D.* The F_N – method in kinetic theory. 1. Half-spase problems // Trans. Theory and Statist. Phys. 1985. V. 14. № 4. P 485–496.
5. *Siewert C.E., Thomas J.R.Jr.* Strong evaporation into a half spase. II. The three-dimensional BGK model // ZAMP. 1982. V. 33. № 2. P. 202–218.
6. *Маясов Е.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* О термофорезе нелетучей сферической частицы в разреженном газе при малых числах Кнудсена // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. № 6. С. 498–502.
7. *Cercignani C.* Analytical solution of the temperature jump problem for the BGK model // Transp. Theory and Stat. Phys. 1977. V. 6. № 1. P. 29–56.
8. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа: Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.
9. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
10. Неравновесные явления: Уравнение Больцмана / Под ред. Дж.Л. Либовица и Е. Монтролла. М.: Мир, 1986. 269 с.
11. *Латышев А.В.* Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического БГК уравнения в задаче о температурном скачке // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 581–586.
12. *Siewert C.E., Kelly C.T.* An analytical solution to a matrix Riemann-Hilbaert problem // ZAMP. 1980. V. 31. № 3. P. 344–351.
13. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 1. Однократное рассеяние и теория переноса. М.: Мир, 1981. 280 с.
14. *Greenberg W., van der Mee C.V.M., Protopopescu V.* Boundary value problems in abstract kinetic theory. Basel: Birknäuser Verlag, 1987. 532 p.
15. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
16. *Kriese J.T., Chang T.S., Siewert C.E.* Elementary solutions of coupled medel equations in the kinetic theory of gases // Intern. J. Eng. Sci. 1974. V. 12. № 6. P. 441–470.
17. *Siewert C.E., Kelly C.T., Garcia R.D.M.* An analytical expression for the H matrix relevant to Rayleigh scattering // J. Math. Anal. Appl. 1981. V. 84. № 2. P. 509–518.

Пушкино, Моск. обл.

Поступила в редакцию
17.XII.1992