УДК 532.64

© 1994 г. А.П. Блинов

О ФОРМЕ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В НЕВЕСОМОСТИ

Рассматривается задача о форме поверхности слабо деформированной осесимметричной капли, соприкасающейся с твердыми параллельными стенками. Дается решение задачи асимптотическими методами в случаях полной несмачиваемости и частичной смачиваемости.

Форма поверхности жидкости в невесомости под действием сил поверхностного натяжения при контакте с твердыми стенками в общем случае определяется аналитико-численными методами [1].

Проводились [2,3] исследования качественного характера о форме свободной поверхности.

1. Рассмотрим задачу о форме равновесия жидкости, заключенной между твердыми параллельными стенками в невесомости при действии сил поверхностного натяжения в случае полной несмачиваемости (например, ртути между стеклянными стенками). Такая задача эквивалентна определению формы тела заданного объема с минимальной площадью поверхности с заданными краями.

Пусть жидкость заданного объема V, имеющая форму шара радиуса R, сжимается между параллельными плоскостями до значения поперечника $2a$ ($a < R$). Представленную задачу будем изучать в предположении малости параметра $(R/a - 1)$.

Введем систему координат xyz с началом отсчета в центре капли, направив ось x по нормали к стенке (фиг. 1).

В силу симметрии краевых условий свободная поверхность жидкости будет поверхностью вращения. Запишем выражение для площади этой поверхности и объема жидкости

$$S = 4\pi\int_0^a F(y,y')dx, \quad V = 2\pi\int_0^a G(y)dx$$

$$F(y,y') = y(1+y'^2)^{1/2}, \quad G(y) = y^2, \quad y' = dy/dx \tag{1.1}$$

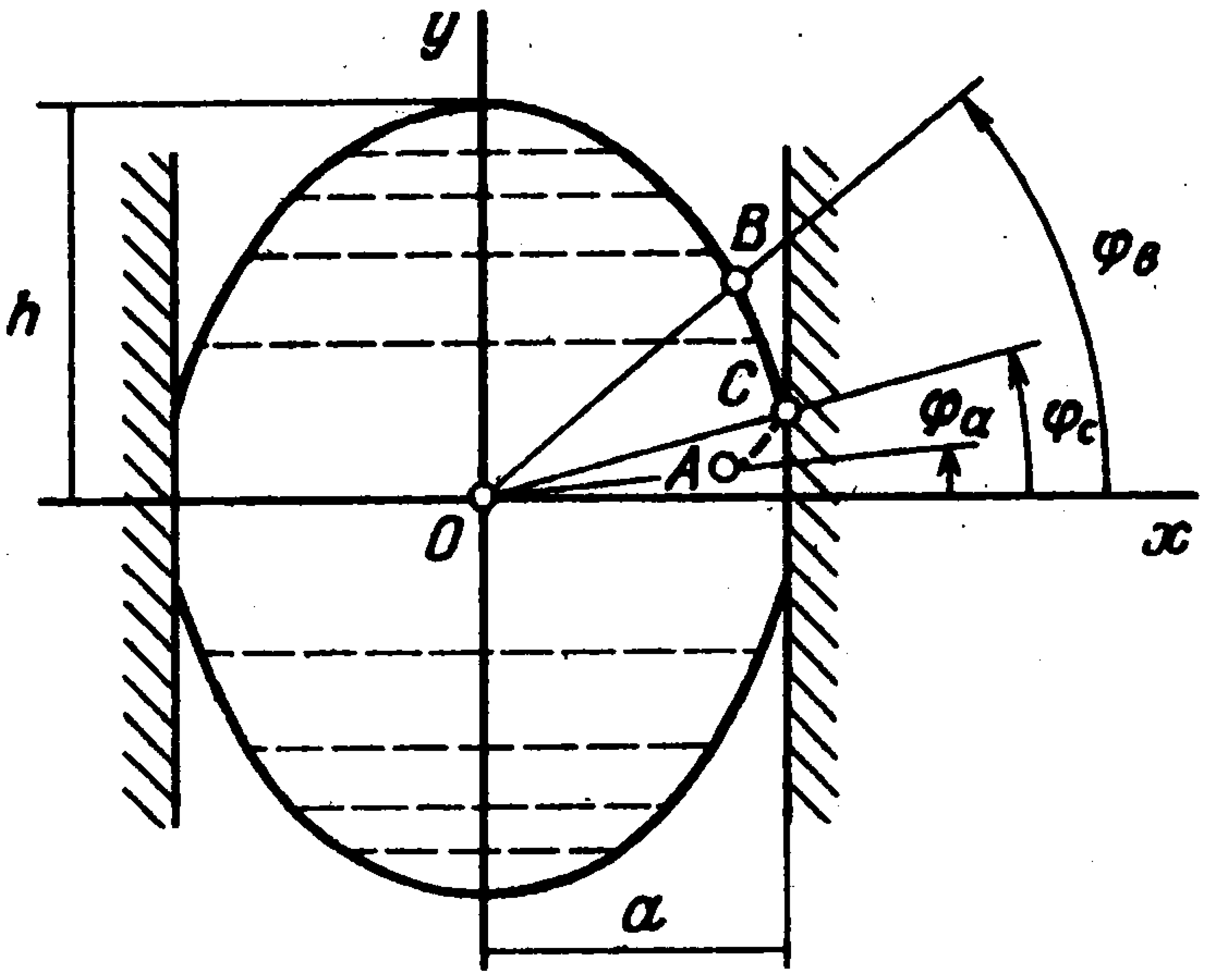
Уравнение Эйлера–Лагранжа для рассматриваемой вариационной изопериметрической задачи

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial y'} = 0, \quad \Phi = F + \lambda G \tag{1.2}$$

(λ – множитель Лагранжа) имеет вид

$$y(1+y'^2)^{-3/2}y'' - (1+y'^2)^{-1/2} - 2\lambda y = 0 \tag{1.3}$$

На класс допустимых кривых, среди которых ищется экстремаль, наложено ограничение, запрещающее им проходить через поверхность стенок. Согласно теории односторонних вариаций это приводит к условию касания их со стенкой [4]. В силу симметрии задачи далее будем интересоваться только куском экстремали, лежащим в первом квадранте. Поскольку в декартовых координатах решению вариационной задачи мешает обращение производной в бесконечность при $x = a$, то в уравнении (1.3) сделаем переход к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.



Фиг. 1

Получим уравнение, допускающее решение $\rho = a$ при $\lambda = -1/a$ и первый интеграл

$$\rho' = \frac{\rho(Q\sin\varphi + P\cos\varphi)}{Q\cos\varphi - P\sin\varphi} \tag{1.4}$$

$\rho' = d\rho/d\varphi, \quad Q = (\rho^2\sin^2\varphi - P^2)^{1/2}, \quad P = \lambda\rho^2\sin^2\varphi + c_1$

$c_1 = \mathrm{const}$

Выбор знака перед выражением P осуществлен из условия рождения экстремали (при $c_1 \neq 0$) из дуги окружности (при $c_1 = 0$). (Уравнение (1.4) также имеет решение $\rho = a$, если $c_1 = 0$ и $\lambda = -1/a$.) Постоянную интегрирования c_1 можно выразить через параметр λ и величину $h = \rho(\pi/2)$ – радиус экватора капли (фиг. 1), используя краевое условие на левом конце экстремали $\rho'(\pi/2) = 0$, $c_1 = -h(1 + \lambda h)$.

Можно проверить, что дискриминантная кривая

$$\rho = \{[1 - 2\lambda c_1 + (1 - 4\lambda c_1)^{1/2}]/(2\lambda^2)\}^{1/2}/\sin\varphi = h/\sin\varphi \tag{1.5}$$

(т.е. прямая $y = h$) является решением уравнения (1.4) и полоса, заключенная между прямыми $y = h$ и $y = 0$, – после экстремалей. Для всех точек из поля экстремалей $\Phi_{y'y'} = y(1 + y'^2)^{-3/2} \geqslant 0$, т.е. выполняется условие Лежандра о сильном минимуме [4]. Правым краевым условием задачи является условие касания экстремали со стенкой, которое получается исключением ρ' из уравнения (1.4) и равенства $\rho' = d(a/\cos\varphi)/d\varphi = a\sin\varphi/\cos^2\varphi$. После замены переменной $\sin^2\varphi = w$ и упрощений оно принимает вид

$$(1+w)^2[c_1(1-w) + \lambda a^2 w]^4 - 2a^2w^2(2-w)(1-w^2)[c_1(1-w) + \lambda a^2 w]^2 + \tag{1.6}$$
$$+a^4w^6(1-w)^2 = 0$$

Положив $c_1 = \varepsilon a$, $\lambda = -1/a + \varepsilon l_1$, где ε и l_1 – новые постоянные, рассмотрим задачу разрешимости уравнения (1.6) относительно w в окрестности значения $\varepsilon = 0$. После упорядочения слагаемых по степеням w уравнение (1.6) принимает вид

$$\varepsilon^4 - 4\varepsilon^3[1 + \varepsilon(\tfrac{1}{2} - al_1)]w + \varepsilon^2[2 + \varepsilon(4 - al_1) + \varepsilon^2(1 + 6l_2^2 - 8l_2)]w^2 + \varepsilon[8 - 4l_3^3 + \varepsilon(8l_2 +$$
$$+12l_3^2 + 2) - 4\varepsilon^2 l_3]w^3 + [l_3^4 + 8\varepsilon l_3(1 - l_3^2) + 2\varepsilon^2(2 + 3l_3^2)]w^4 + 2\{l_3^4 + 2\varepsilon[l_2 - l_3(2 + l_3^2) +$$
$$+ \varepsilon l_2^2/2]\}w^5 + \ldots + w^8 = 0 \tag{1.7}$$
$$l_2 = 1 - al_1, \quad l_3 = 1 + \varepsilon(1 - al_1)$$

где многоточие означает пропущенные слагаемые, содержащие степени 6 и 7 относительно w.

Из (1.6) и (1.7) видно, что коэффициенты при степенях w – многочлены относительно ε, причем эти коэффициенты обращаются в нуль, когда $\varepsilon = 0$ для степеней w, меньших четырех. Следовательно, по теореме Вейерштрасса возможно представление [5] $f(w, \varepsilon) = \Psi(w, \varepsilon)H(w, \varepsilon)$, где $f(w, \varepsilon)$ – многочлен (1.7), а $\Psi(w, \varepsilon)$ и $H(w, \varepsilon)$ – алгебраические функции соответственно порядков три и пять, причем $H(0, 0) \neq 0$. Значит, $f(w, \varepsilon)$ имеет те же корни, обращающиеся в нуль при $\varepsilon = 0$, что и $\Psi(w, \varepsilon)$. Поэтому решение уравнения (1.7), обращающееся в нуль при $\varepsilon = 0$, можно искать в виде ряда

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon^{mn/4}, \quad m = 1,2,3,4 \tag{1.8}$$

Чтобы выбрать нужное значение m, выясним некоторые свойства решения задачи.

Во-первых, для кривизны экстремали, используя уравнение (1.3) и первый интеграл (1.4), можно установить простую связь с координатами:

$$k = (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')(\rho^2 + \rho'^2)^{-3/2} = c_1 / (\rho^2 \sin^2 \varphi) - \lambda \tag{1.9}$$

Во-вторых, можно убедиться, что при подстановке ряда (1.8) при $m \neq 4$ в (1.7) низшая степень ε в ряде (1.8), при которой коэффициент $a_k \neq 0$, превосходит единицу. Однако ряд вида (1.8), представляющий вещественное решение уравнения (1.7), обращающееся в нуль при $\varepsilon = 0$, не может начинаться со степеней ε, превосходящих единицу.

Действительно, пусть $w = a_n \varepsilon^{mn/4} + a_{n+1}\varepsilon^{m(n+1)/4} + \ldots$.

В точке касания экстремали со стенкой согласно (1.9) кривизна экстремали определяется выражением

$$k = k_c = \varepsilon a(1-w)/(a^2 w) + 1/a - \varepsilon l_1 = (1 + \varepsilon^{1-mn/4}/a_n)/a + o(\varepsilon^{1-mn/4})$$

из которого следует, что при $mn/4 - 1 > 0$ и $\varepsilon \to 0$ будет $|k_c| \to \infty$.

На поверхности раздела жидкости и газа для перепада давления выполняется условие Лапласа [1] $\Delta p = \sigma(k_1 + k_2)$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения, k_1, k_2 – кривизны главных нормальных сечений. При малой деформации капли перепад давления должен мало измениться, а выпуклость поверхности должна сохраниться. Но это невозможно при $|k_1| = |k_c| \to \infty$. Следовательно, $mn/4 - 1 \leqslant 0$.

В соответствии с этим вид ряда (1.8) уточняется:

$$w = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots \tag{1.10}$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях ε в уравнении (1.7) после подстановки в него последнего ряда приводит к уравнению для определения коэффициента a_1

$$1 - 4a_1 + 2a_1^2 + 4a_1^3 + a_1^4 = 0 \tag{1.11}$$

Оно имеет два вещественных корня: $a_1^+ \approx 2{,}24$; $a_1^- \approx -0{,}27$. (Здесь они вычислены с точностью до двух знаков после запятой.)

Первым коэффициентом ряда (1.10) является корень a_1^+.

Действительно, ввиду неотрицательности определяемого w знаки a_1 и ε должны совпадать. Докажем, что $\varepsilon \geqslant 0$.

Непосредственное вычисление кривизны по формуле (1.9) при $\varphi = \pi/2$ и учет того, что $\rho(\pi/2) = h > a$, $\rho'(\pi/2) = 0$, $\rho''(\pi/2) = 2h(1 + \lambda h)$, приводит к выражению $k = k_0 = -1/h - 2\lambda$. Исключая λ из этого выражения и из правой части (1.9) при $\varphi = \pi/2$, получим $c_1 = (k_0 h - 1)/2$. Учитывая, что при сжатии капли перепад давления Δp возрастает, из условия Лапласа при

$\varphi = \pi/2$, когда $k_1 = k_0, k_2 = 1/h$, получим $k_0 + 1/h \geqslant 2/R$. Следовательно, $c_1 \geqslant h(h/R-1) \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$ и $a_1 > 0$.

Коэффициенты ряда, следующие после a_1, определяются однозначно, например:

$$a_2 = (a_1/2)[1 - 2al_1 - 2(1-3al_1)a_1 - (5+2al_1)a_1^2]/(3a_1^2 + a_1 - 1)$$

Перейдем к задаче интегрирования уравнения (1.4), переписав его после введения новой переменной $z = \sin\varphi$ в виде

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\rho\{z[\rho^2 z^2 - \xi^2(\rho,z)]^{1/2} + \sqrt{1-z^2}\,\xi(\rho,z)\}}{\sqrt{1-z^2}\,\{\sqrt{1-z^2}\,[\rho^2 z^2 - \xi(\rho,z)]^{1/2} - z\xi(\rho,z)\}} \tag{1.12}$$

$$\xi(\rho,z) = \lambda\rho^2 z^2 + c_1$$

Знаменатель правой части уравнения (1.12) обращается в нуль в точке

$$z = z_a = \{[(1/2 - \lambda c_1)\rho - [(1/4 - \lambda c_1)\rho^2 - c_1^2]^{1/2}]/[(1+\lambda^2\rho^2)\rho]\}^{1/2} \tag{1.13}$$

т.е. в подвижной критической алгебраической особой точке уравнения (1.12), если последнее рассматривать в пространстве комплексных переменных z и ρ [6].

В окрестности критической точки решение уравнения (1.12) допускает представление в виде некоторых степенных рядов. Но поскольку представляет интерес вещественное решение этого уравнения, необходимо убедиться, что точка z_a принадлежит области определения правой части уравнения (1.12) в случае вещественных z и ρ, т.е., что $z_a \geqslant z_{12}$, где $z_{12} = [(1 - 2\lambda c_1 - \sqrt{1 - 4\lambda c_1})/(2\lambda^2\rho^2)]^{1/2}$ – нуль выражения $\rho^2 z^2 - \xi^2(\rho,z)$, такой, что $z_{12} = 0$ при $c_1 = 0$. При достаточно малом ε имеем $z_{12}^2 \leqslant \varepsilon^2(1-4\varepsilon) + o(\varepsilon^3)$, $z_a^2 \geqslant \varepsilon^2(1-2\varepsilon) + o(\varepsilon^3)$. Кроме этого, учитывая, что $a/\sqrt{2} < \rho < \sqrt{2}a$ для всех φ, можно установить неравенство $z_a \leqslant \sqrt{3}\varepsilon$.

Таким образом, $z_{12} \leqslant z_a \leqslant z_c$.

Так как правая часть уравнения (1.12), взятая в степени минус единица, голоморфна в окрестности точки (z_a, ρ), то в этой окрестности можно искать решение в виде ряда по степеням $(z - z_a)^{n/k}$ [6], где число k равно наименьшему порядку производной от z по ρ, не обращающейся в нуль в точке (z_a, ρ). Вычисления показывают, что при малом ε имеем $(d^2 z/d\rho^2)_{z=z_a} \neq 0$. Поэтому следует принять $k = 2$, т.е. вещественно решение (1.12) в окрестности точки (z_a, ρ) можно искать в виде ряда

$$\rho = \rho_a + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (z - z_a)^{n/2} \tag{1.14}$$

причем z_a определяется выражением (1.13) при $\rho = \rho_a$, а ρ_a и α_n определяются из условия

$$\rho_c = \rho_a + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (z_c - z_a)^{n/2} \tag{1.15}$$

и из условий равенства коэффициентов при одинаковых степенях $(z - z_a)^{n/2}$ после подстановки (1.14) в (1.12). Например,

$$\alpha_1 = \rho_a\{2z_a/[1 - z_a^2 - 2\lambda(\lambda\rho_a^2 z_a^2 + c_1)]\}^{1/2} \tag{1.16}$$

или

$$\alpha_1 = \sqrt{2z_z}\rho_a + o(\sqrt{\varepsilon}) \tag{1.17}$$

Комбинируя (1.17) с выражением $\rho_c - \rho_a = \alpha_1\sqrt{z_c - z_a} + o(\sqrt{\varepsilon})$, полученным из (1.15), и учитывая неравенство $z_a \leqslant \sqrt{3}\varepsilon$ при выборе знака перед радикалом, получим

$$z_a = \tfrac{1}{2} z_c\{1 - [1 - 2(\rho_c - \rho_a)^2 / (\rho_a z_c)^2]^{1/2}\} \tag{1.18}$$

Исключая z_a из (1.13) и (1.18), после упрощений с точностью до слагаемых порядка $o(\varepsilon^4)$ получим уравнение для определения ρ_a

$$(1 - 2z_c + 2z_c^2)\chi^4 + 4z_c(1 - z_c)\rho_c\chi^3 + 4c_1^2(1 - z_c)\chi^2 +$$

$$+8c_1^2 z_c\rho_c\chi - 4c_1^2(z_c\rho_c^2 - c_1^2) = 0 \quad (\chi = \rho_c - \rho_a) \tag{1.19}$$

Заметив, что при всех малых степенях χ вплоть до третьей включительно коэффициенты обращаются в нуль при $\varepsilon = 0$, ищем решение уравнения (1.19), обращающееся в нуль при $\varepsilon = 0$ в виде ряда

$$\chi = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \varepsilon^{kn/4}, \quad k = 1,2,3,4$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условиям задачи удовлетворяет $k = 3$. При этом $\chi_1 = a_1^{1/4}\rho_c$.

После вычисления $z_a = \varepsilon / 2 + o(\varepsilon)$ и $\rho_a = a(1 - a_1^{1/4}\varepsilon^{3/4} + a_1\varepsilon / 2 - o(\varepsilon))$ получаем асимптотическое представление (1.14)

$$\rho = a(1 - a_1^{1/4}\varepsilon^{3/4} + a_1\varepsilon / 2)(1 + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{z - \varepsilon / 2}) + o(\sqrt{\varepsilon(z - \varepsilon / 2)}) \tag{1.20}$$

Ряд (1.14) определяет кривую, начинающуюся в точке A (фиг. 1) с координатами $z = z_a = \sin\varphi_a$, $\rho = \rho_a$, которая после касания с прямой $x = a$ в точке C с координатами $z = z_c = \sin\varphi_c$, $\rho = \rho_c$, представляет правый кусок экстремали. Однако радиус сходимости этого ряда не включает точку $z = 1$, в которой задано левое граничное условие $\rho'(\pi/2) = 0$. Для определения левого куска экстремали вернемся к уравнению (1,4), переписав его после замены $\cos\varphi = \zeta$

$$\frac{d\rho}{d\zeta} = \frac{\rho\{\zeta\xi(\rho, \zeta) + \sqrt{1 - \zeta^2}[\rho^2(1 - \zeta^2) - \xi^2(\rho, \zeta)]^{1/2}\}}{(1 - \zeta^2)\xi(\rho, \zeta) - \zeta\sqrt{1 - \zeta^2}[\rho^2(1 - \zeta^2) - \xi^2(\rho, \zeta)]^{1/2}} \tag{1.21}$$

Поскольку правая часть (1.21) голоморфна для $\zeta^2 < 1 - z_a^2$, то можно искать решение уравнения (1.21) в виде ряда

$$\rho = h + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2n}\zeta^{2n} \tag{1.22}$$

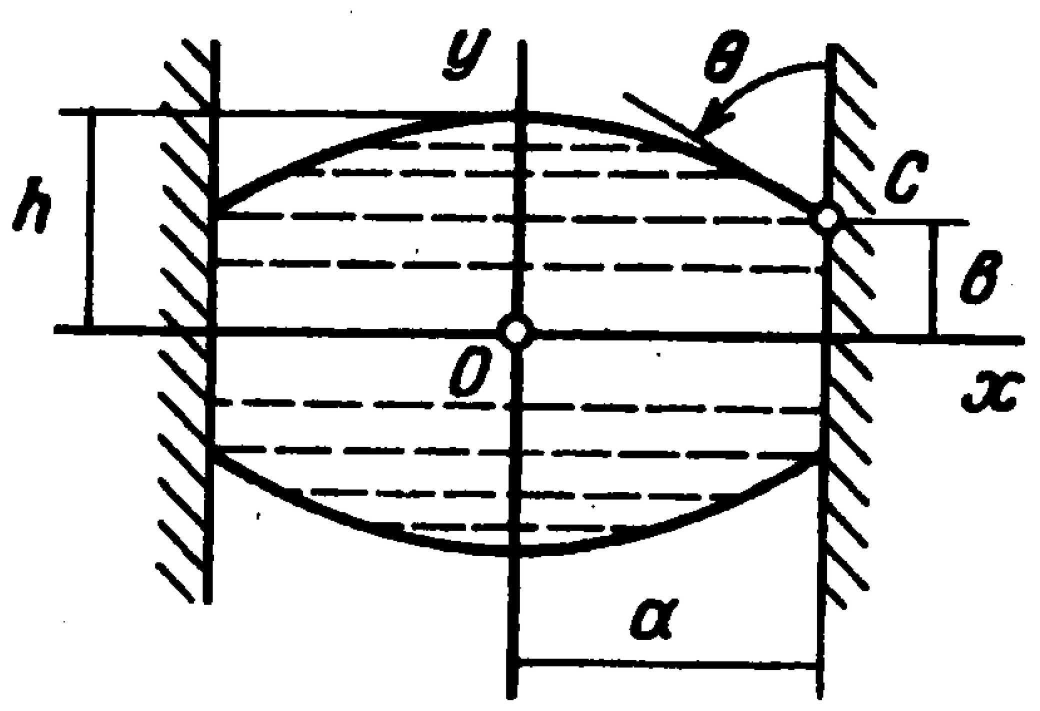
сходящегося для всех $\zeta \in [0, \zeta_c]$, $\zeta_c = \arccos\varphi_c$. (Четность степеней ζ следует из симметрии задачи и краевое условие $\rho'(\pi/2) = 0$ здесь выполняется автоматически.)

После подстановки ряда (1.22) в уравнение (1.21) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях ζ вычисляются все β_{2n}. Например, $\beta_2 = -a\varepsilon / 4 + o(\varepsilon)$.

Для определения параметров ε, l_1 воспользуемся условием склеивания левого и правого кусков экстремали при некотором значении $\varphi=\varphi_b \in [\varphi_c, \pi/2]$, т.е. условием равенства правых частей выражений (1.14), (1.22) при $\varphi=\varphi_b$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (z_b - z_a)^{k/2} = h + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2n} \zeta_b^{2n} \quad (z_b = \sin\varphi_b,\ \zeta_b = \cos\varphi_b) \tag{1.23}$$

и условием постоянства объема жидкости $(4/3)\pi R^3 = V_0 + V_1 + V_2$, где $V_0 = 2\pi a^3 z_c^2 / [3(1-z_c^2)]$ – объем пары конусов с вершинами в точке $\rho = 0$ и с



Фиг. 2

основаниями, совпадающими с площадками контакта жидкости и стенок.

$$V_1 = 2\pi \int_{\varphi_c}^{\varphi_b} F_0 d\varphi = 2\pi \int_{z_c}^{z_b} F_1 dz, \quad V_2 = 2\pi \int_{\varphi_b}^{\pi/2} F_0 d\varphi = 2\pi \int_{0}^{\zeta_b} F_2 d\zeta$$

$$F_0 = \rho^3 \sin^3\varphi - \rho' \rho^2 \cos\varphi \sin^2\varphi, \quad F_1 = \rho^2 [\rho - (1-z^2) d\rho / dz] z^2 / \sqrt{1-z^2}$$

$$F_2 = \rho^2 (\rho + \zeta d\rho / d\zeta)(1-\zeta^2)$$

где ρ для F_1 представляется рядом (1.14), а для F_2 – рядом (1.22).

Для быстрой сходимости отмеченных рядов следует выбрать значение φ_b близким или равным величине $\pi/4$. Здесь же, ограничиваясь грубой оценкой параметров ε и l_1 примем $\varphi_b = \varphi_c$. Тогда левую часть в (1.23) можно заменить на величину $a / \sqrt{1-z_c^2}$.

Упростившиеся условия примут вид

$$a(1 + a_1 \varepsilon / 2) = a[1 + \varepsilon(1 + a l_1) - \varepsilon / 4] + o(\varepsilon) \tag{1.24}$$

$$(4/3)\pi R^3 = (2/3)\pi a^3 a_1 \varepsilon + (4/3)\pi a^3 [1 + \varepsilon(11/4 + 3a l_1)] + o(\varepsilon)$$

Из (1.24) находим

$$l_1 = (a_1 - 3/2)/(2a), \quad \varepsilon = 2(R^3 / a^3 - 1)(4a_1 + 1)$$

2. Рассмотрим случай, когда капля жидкости соприкасается со стенками с известным краевым углом, точнее, при краевых условиях (фиг. 2)

$$y'(0) = 0, \quad y'(a) = -g, \quad g = \operatorname{ctg}\theta, \quad 0 < \theta \leqslant \pi/2 \tag{2.1}$$

Величина g предполагается малой, θ – краевой угол.

Такую задачу проще решать в декартовых координатах. В них первый интеграл имеет вид

$$y' = -[y^2 / (c_1 + \lambda y^2)^2 - 1]^{1/2} \tag{2.2}$$

Интегрируя его, получим

$$x = \int (y^2 + c_1 / \lambda)[-y^4 + (1/\lambda^2 - 2c_1/\lambda)y^2 - c_1^2/\lambda^2]^{-1/2} dy + c_2 \quad (2.3)$$

$$(0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 < y, \quad c_2 = \text{const})$$

Причем, вещественное решение возможно только при выполнении неравенства

$$c_1 < 1/(4\lambda) \quad (2.4)$$

В этом случае решение представляется эллиптическим интегралом

$$x = \int (y^2 + c_1/\lambda) / \sqrt{(y^2 - A^2)(h^2 - y^2)} dy + c_2 \quad (2.5)$$

В классе выпуклых решений $y(x) \leqslant h = y(0)$. Поэтому вместо (2.5) можно записать выражение

$$x = -[(1 + \lambda h)/\lambda] F(\Psi, k) + hE(\Psi, k) \quad (2.6)$$

$$\Psi = \arcsin \sqrt{(h^2 - y^2)(h^2 - A^2)}, \quad k^2 = (1 - 2\lambda h)/(\lambda^2 h^2) \quad (\lambda \leqslant (-1/(2h)))$$

используя неполные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Для определения параметров h и λ воспользуемся условиями (2.1), которые при учете (2.2) сводятся к выражению

$$b = [1 - \sqrt{1 - 4c_1\lambda(1 + g^2)}] / (2\lambda\sqrt{1 + g^2})$$

и условием постоянства объема, который теперь удобнее представить в виде

$$V = 2\pi(ab^2 + \int_b^h xy dy) \quad (2.7)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений относительно неизвестных h, λ b, надо воспользоваться соотношением (2.6) при $y(a) = b$, т.е.

$$a = \int_b^h \frac{t^2 + c_1/\lambda}{\sqrt{(t^2 - A^2)(h^2 - t^2)}} dt \quad (2.8)$$

Найти явные выражения для параметров задачи из трех последних уравнений в общем случае затруднительно, однако в случае, когда величина g мала, это сделать удается.

Рассмотрим этот случай. При $g = 0$ уравнение экстремали (1.3) допускает решение $y = b =$ $=$ const, если

$$\lambda = \frac{-1}{2b}, \quad c_1 = \frac{-1}{2} b \quad \left(b = \sqrt{\frac{V}{2\pi a}} \right)$$

Будем искать решение уравнения (1.3) при достаточно малой величине $g = \varepsilon$ в виде ряда

$$y = b + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \ldots \quad (2.9)$$

представляя значения параметров λ и c_1 также в виде рядов

$$\lambda = \frac{-1}{2b} + \varepsilon l_1 + \varepsilon^2 l_2 + \ldots; \quad c_1 = \frac{-1}{2} b + \varepsilon c_{11} + \varepsilon^2 c_{12} + \ldots \quad (2.10)$$

В результате подстановки рядов (2.9), (2.10) в уравнение (2.2) и перегруппировки слагаемых по возрастающим степеням ε под радикалом в (2.2) получится новый степенной ряд вида

$$A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + A_3\varepsilon^3 + \ldots, \quad A_1 = (c_{11} + b^2 l_1)/b \tag{2.11}$$

$$A_2 = \frac{1}{b}(3c_{11} + 2C_{12}) + b(3l_1 + 2l_2) + 2\left(l_1 - \frac{1}{b^2}c_{11}\right)\eta_1 - \frac{1}{b^2}\eta_1^2$$

т.е. уравнение (2.2) примет вид

$$\varepsilon\eta_1^1 + \varepsilon^2\eta_2^1 + \ldots = -\sqrt{\varepsilon}\sqrt{A_1 + \varepsilon A_2 + \varepsilon^2 A_3 + \ldots} \quad (\eta_k^1 = d\eta/dx) \tag{2.12}$$

Чтобы оно имело решение, необходимо выполнение равенства $A_1 = 0$. Очевидно, $A_2 \neq 0$. Будем искать решение (2.12), для которого $A_2 > 0$ при $\eta_1 = 0$. Тогда можно записать (2.12) в виде ряда

$$\eta_1' + \varepsilon\eta_2' + \ldots = -\sqrt{A_1 + \varepsilon A_3 + \varepsilon^2 A_4 + \ldots} = -\sqrt{A_2}(1 + \varepsilon B_2 + \varepsilon^2 B_3 + \ldots) \tag{2.13}$$

сходящегося в некоторой окрестности $\varepsilon = 0$.

Из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях ε в (2.13) получим последовательность дифференциальных уравнений

$$\eta_1' = -\sqrt{A_2}; \quad \eta_k' = -\sqrt{A_2}B_k; \quad k = 2,3,\ldots \tag{2.14}$$

с краевыми условиями

$$\eta_1'(0) = 0; \quad \eta_1'(a) = -1; \quad \eta_k'(0) = 0; \quad \eta_k'(a) = 0, \quad k > 1 \tag{2.15}$$

обеспечиваемыми выбором постоянных c_{1k}, c_{2k}, где c_{2k} – постоянные, появляющиеся при интегрировании (2.14). Фактически эти постоянные вместе с постоянными l_k определяются из условий (2.15) и условия постоянства объема

$$\int_0^a [2(b + \varepsilon\eta_1 + \ldots + \varepsilon^{k-1}\eta_{k-1})\eta_k + \varepsilon^k\eta_k^2]dx = 0, \quad k = 1,2,\ldots \tag{2.16}$$

Не касаясь здесь вопроса разрешимости краевой задачи для всех k, рассмотрим решение для $k = 1$. При $k = 1$ с учетом $A_1 = 0$ или $c_{11} + b^2 l_1 = 0$ имеем

$$\eta_1' = -\left[\frac{2}{b}c_{12} + 2bl_2 + 4l_1\eta_1 - \frac{1}{b^2}\eta_1^2\right]^{1/2} \tag{2.17}$$

а после интегрирования

$$\eta_1 = 2b^2\left[l_1 - \sqrt{l_1^2 + l_{12}}\sin(x/b + c_{21})\right], \quad l_{12} = (c_{12}/b^2 + l_2)/(2b)$$

$$c_{21} = \text{const}$$

Можно удовлетворить условию $\eta'(0) = 0$, если принять $c_{21} = -\pi/2$. Тогда

$$\eta_1 = 2b^2\left[l_1 + \sqrt{l_1^2 + l_{12}}\cos(x/b)\right]$$

Из другого граничного условия $\eta_1'(a) = -1$ получаем $\sqrt{l_1^2 + l_{12}} = 1/[2b\sin(a/b)]$, а из условия (2.16) или $\int_0^a \eta_1 dx + o(\varepsilon) = 0$ получаем $l_1 = -(b/a)\sqrt{l_1^2 + l_{12}}\sin(a/b)$.

Разрешая полученные соотношения относительно c_{11}, l_1, l_{12}, находим $c_{11} = b^2/(2a)$, $l_1 = -1/(2a)$, $l_{12} = 1/[4b^2\sin^2(a/b)] - 1/(4a^2)$ при условии $0 < a < \pi b$.

Найденные параметры удовлетворяют предположенному ранее нервенству $A_2 > 0$ при $\eta_1 = 0$, так как $\sin(a/b) < a/b$, и, следовательно, $l_{12} > 0$. В итоге асимптотическое представление экстремали будет таким:

$$y = b + \varepsilon b^2\{-1/a + \cos(x/b)/[b\sin(a/b)]\} + o(\varepsilon)$$

$$\lambda = -1/(2b) - \varepsilon/(2a) + o(\varepsilon), \quad c_1 = -b/2 + \varepsilon b^2/(2a) + o(\varepsilon) \quad (b = \sqrt{V/(2\pi a)})$$

Для приложений может представлять интерес величина силы давления капли на стенку. Ее можно вычислить, определив площадку контакта и перепад давления (например, на экваторе капли), по условию Лежандра.

Автор благодарит В.В. Румянцева, А.Т. Фоменко и участников семинара под руководством В.Г. Демина за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д.* Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
2. *Срубщик Л.С., Юдэвич В.М.* Об асимптотическом интегрировании уравнения равновесия жидкости с поверхностным натяжением в поле тяжести // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6. № 6. С. 1127–1133.
3. *Финн Р.* Явления капиллярности // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29. № 4. С. 131–152,
4. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 423 с.
5. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.
6. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.XI.1992