УДК 532.593:534.1

© 1994 г. Э.Н. Потетюнко

# ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

Строятся низкочастотные асимптотики решения задачи о волнах при гармоническом возбуждении части границы без учета сил поверхностного натяжения. Проводится обоснование асимптотических разложений, даются оценки погрешности решения.

Эта задача рассматривалась как без учета [1–4], так и с учетом сил поверхностного натяжения [5, 6][1]. В частности, в качестве начального приближения решения рассматриваемой задачи было взято [3] решение предельной задачи, соответствующей бесконечно большому значению безразмерной частоты (или отсутствию сил гравитации). Затем методом сращиваемых асимптотических разложений в точках смены граничных условий подстраивались функции большого градиента.

Ниже строятся ограниченные на бесконечности решения с разрывами первого рода (с конечным скачком) в точках смены граничных условий. В отличие от известных работ предлагается другая итерационная схема. Это связано с тем, что начальное приближение при бесконечно больших частотах, приводит к неограниченным в точках смены граничных условий деформациям свободной поверхности. При корректировке же решения методом деформированных координат возникает необходимость решать задачу о волнах при гармоническом смещении полубесконечной части верхней границы жидкости как жесткого целого. Это соответствует вытеснению бесконечного объема жидкости и приводит к необходимости прикладывать к верхней границе жидкости бесконечно большие усилия, в то время как в исходной краевой задаче таких особенностей не возникает. Это и побудило разработать другую итерационную схему, свободную от указанных особенностей.

**1. Постановка задачи.** В линейной постановке с учетом исчезающе малых диссипативных сил плоское установившееся волновое движение идеальной жидкости бесконечной глубины при гармоническом возбуждении части границы описывается следующей краевой задачей [1]:

$$\begin{aligned}
&\partial \mathbf{U}/\partial t + \mu \mathbf{U} = -\rho^{-1}\nabla \mathcal{P},\ \operatorname{div}\mathbf{U} = 0,\ \mathbf{U} = \nabla \Phi \\
&\mathcal{P} = p + \rho g z - p_0,\ \mathcal{P} = -\rho[\partial \Phi/\partial t + \mu \Phi] \\
&-\mathcal{P} + \rho g \zeta = -p_* = -\Pi(x)e^{i\omega t},\ \partial \zeta/\partial t = U_z,\ z = 0,\ |x| > a \\
&U_z = V_*(x,t) = \partial W_*(x,t)/\partial t,\ |x| \leqslant a,\ z = 0 \qquad\qquad (1.1)\\
&\lim_{r\to\infty} (\nabla \Phi) r^{1+\delta} = 0,\ \ \delta > 0,\ \ r = (x^2+z^2)^{1/2} \\
&\lim_{|x|\to\infty} |x|^{1/2+\delta}\mathbf{F} = 0,\ \ \mathbf{F} = \{\Phi, \varsigma, p_*\},\ \ \delta > 0 \\
&\mathbf{F}\left(x,z,t+\frac{2\pi}{\omega}\right) = \mathbf{F}(x,z,t)
\end{aligned}$$

---

[1] *Трепачев В.В.* Плоские волны, вызванные гармоническими колебаниями жесткой пластины на поверхности идеальной тяжелой капиллярной жидкости // Асимптотический анализ движения жидкости, вызванного возмущениями на ее границах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 25.01.1985. Ростов-на-Дону. 1985. С. 95–114.

Здесь $\mathbf{U} = \{U_x, U_z\}$ – вектор скорости частиц жидкости, $p$ – гидродинамическое давление, $P$ – динамическая часть гидродинамического давления, $\rho g(-z)$ – гидростатическая часть гидродинамического давления, $\zeta$ – возвышение свободной поверхности, $V_*(x,t) = V_0(x)e^{i\omega t}$ – скорость колебаний части верхней границы, $W_*(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$ – заданные вертикальные перемещения точек верхней границы жидкости от равновесного состояния, $p_*(p_0)$ – внешнее динамическое (статическое) давление на свободной поверхности жидкости (полагаем $p_* = 0$), $\rho$ – плотность жидкости, $\mu$ – коэффициент диссипации ($\mu > 0$), малый по величине, $2a$ – ширина возбуждаемой части верхней границы жидкости от равновесного состояния, $\omega$ – частота колебаний. Начало координат взято посередине возбуждаемой части границы в положении равновесия, ось $x$ направлена горизонтально, ось $z$ – вертикально вверх против силы тяжести.

Решение задачи (1.1) ищем в виде

$$\Phi = \varphi e^{i\omega t},\quad \varsigma = \eta e^{i\omega t},\quad i\omega\eta = \partial\varphi / \partial z|_{z=0} \tag{1.2}$$

Здесь $\varphi(x,z)$ и $\eta(x)$ – амплитудные функции для потенциала скорости и возвышения свободной поверхности.

Подставляя (1.2) в (1.1), выводим следующую краевую задачу для $\varphi$:

$$\begin{gathered}\Delta\varphi = 0\\ -\gamma\varphi + \partial\varphi/\partial z = -i\omega(\rho g)^{-1}\Pi,\ z = 0,\ |x| > a\\ \partial\varphi/\partial z = V_0(x) = i\omega W(x),\ z = 0,\ |x| \leqslant a\\ \{\varphi, \partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial z\} \to 0,\ x^2 + z^2 \to \infty\\ \gamma = (\omega^2 - i\omega\mu)/g.\end{gathered} \tag{1.3}$$

**2. Сведение исходной краевой задачи к интегральному уравнению.** Продолжим функцию $\Pi(x)$ внутрь интервала $|x| \leqslant a$, введя в рассмотрение функцию $q(x)$:

$$-\gamma\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{i\omega}{\rho g}q;\quad q(x) = \begin{cases}\Pi(x), & |x| > a\\ Q(x), & |x| < a\end{cases} \tag{2.1}$$

В данной задаче $Q(x)$ – амплитудная функция неизвестного избыточного давления, под действием которого возбуждаемая часть верхней границы жидкости деформируется по заданному закону.

Построим решение вспомогательной задачи, считая на этом этапе функцию $Q(x)$ известной [7]:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{i\omega}{\rho g}q + (2\pi)^{-1/2}\gamma\frac{i\omega}{\rho g}\int_{-\infty}^{\infty} q(u)K(x-u)du \tag{2.2}$$

$$K(z) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi z}}{|\xi| - \gamma}d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}G(\gamma|z|) - (2\pi)^{1/2}ie^{-i\gamma|z|};$$

$$G(u) = -[\cos(u)\mathrm{ci}(u) + \sin(u)\mathrm{si}(u)]$$

Здесь $\mathrm{ci}(u)$ – интегральный косинус, $\mathrm{si}\,(u)$ — интегральный синус [8]. Рассмотрим интервал $|x| \leqslant a$. Согласно граничному условию в (1.3) при $z = 0$, $|x| \leqslant a$, учитывая еще что $q(x) = 0$ при $|x| > a$, получаем интегральное уравнение относительно $Q(x)$

$$Q(x) + \rho g W(x) = -(2\pi)^{-1/2}\gamma\int_{-a}^{a} Q(u)K(x-u)du,\ |x| \leqslant a$$

Запишем интегральное уравнение (2.2) в виде

$$Q(x)+\rho gW(x)=UQ\equiv\gamma i\int_{-a}^{a}Q(u)e^{-i\gamma|x-u|}du+f(x)$$

$$f(x)=-\gamma\pi^{-1}\int_{-a}^{a}Q(u)G(\gamma|x-u|)du,\ |x|\leqslant a \tag{2.3}$$

**3. Решение интегрального уравнения при низких частотах.** Заменим исходное интегральное уравнение (2.3) «приближенным»

$$\overline{Q}(x)+\rho gW(x)=\overline{U}\ \ \overline{Q}\equiv\gamma i\int_{-a}^{a}\overline{Q}(u)e^{-i\gamma|x-u|}du \tag{3.1}$$

Оценим близость интегральных операторов исходного и «приближенного» уравнений в метрике пространства $C$

$$\left\|(U-\overline{U})Q\right\|=\|f(x)\|\leqslant\pi^{-1}|\gamma|\|Q\|\max_{x}\int_{-a}^{a}|G(\gamma|x-u|)|du$$

Используя интегральные представления функций $G(z)$, $\mathrm{ci}(z)$, $\mathrm{si}(z)$ [8], получаем

$$|G(z)|\leqslant|G(z_0)|\leqslant C+\pi/2+|\ln(z_0)|+z_0^2/4$$

$$z_0=\mathrm{Re}z>0,\ C=0{,}577$$

$$\left\|(U-\overline{U})Q\right\|\leqslant 2\pi^{-1}\varepsilon M\|Q\| \tag{3.2}$$

$$M=|\ln(\varepsilon_0)|+C+\pi/2+1+\varepsilon_0^2/3$$

$$\varepsilon=|\lambda|,\ \ \varepsilon_0=\lambda_0,\ \ \lambda=\gamma a,\ \ \lambda_0=\gamma_0 a$$

$$\gamma_0=\mathrm{Re}\,\gamma=\omega^2/g$$

Тем самым показано что при низких частотах ($\varepsilon\to 0$, $\varepsilon_0\to 0$) интегральный оператор $\overline{U}$ «приближенного» уравнения бесконечно близок по норме к интегральному оператору $U$ исходного уравнения.

Решим «приближенное» интегральное уравнение (3.1). Для этого проинтегрируем уравнение (3.1) по $x$. Имеем

$$R(x)+\rho gV(x)=\gamma iJ_1+\gamma iJ_2 \tag{3.3}$$

$$R(x)=\int_0^x\overline{Q}(t)dt,\ \ V(x)=\int_0^x W(t)dt$$

$$J_1=\int_0^x\int_{-a}^{t}\overline{Q}(u)e^{-i\gamma(t-u)}dudt,\ \ J_2=\int_0^x\int_t^a\overline{Q}(u)e^{-i\gamma(u-t)}dudt$$

Двойной интеграл $J_1$ преобразуем следующим образом:

$$J_1=\int_0^x\left[\frac{d}{dt}\int_{-a}^{t}\overline{Q}(u)e^{-i\gamma(t-u)}\frac{du}{-i\gamma}+\frac{\overline{Q}(t)}{i\gamma}\right]dt=-\frac{1}{i\gamma}\int_{-a}^{x}\overline{Q}(u)e^{-i\gamma(x-u)}du+\frac{R(x)}{i\gamma}+$$

$$+\frac{1}{i\gamma}\int_{-a}^{0}\overline{Q}(u)e^{i\gamma u}du$$

Аналогично находим $J_2$. Далее умножим уравнение (3.3) на $\gamma^2$ и сложим полученное равенство с равенством, получающимся в результате дифференцирования (3.1) по $x$. Учитывая при этом, что $Q' = R''$, $W' = V''$, имеем

$$R'' - \gamma^2 R + \rho g\left[V'' + \gamma^2 V\right] = C_1$$

$$C_1 = \gamma^2 \int_0^a \left[\overline{Q}(u) - \overline{Q}(-u)\right] e^{-i\gamma u} du$$

Отсюда выводим

$$\overline{Q}(x) = D_1 \operatorname{sh}(\gamma x) + D_2 \operatorname{ch}(\gamma x) - \rho g W(x) - 2\gamma\rho g \int_0^x W(\xi) \operatorname{sh}(\gamma(x-\xi)) d\xi \tag{3.4}$$

Постоянные $D_1, D_2$ находятся из условия удовлетворения функции $\overline{Q}(x)$ интегральному уравнению (3.1). В частности при $W(x) = W_0 = \text{const} > 0$ имеем

$$\overline{Q}(x) = -\rho g W_0\left[1 - 2D^{-1} \operatorname{ch}(\lambda)\right], \ |x| \leqslant a \tag{3.5}$$

$$D(\lambda) = \operatorname{ch}(\lambda) - i \operatorname{sh}(\lambda), \ \lambda = \gamma a$$

Для оценки погрешности решения исходное и «приближенное» интегральные уравнения запишем в операторном виде

$$(I - \overline{U})\overline{Q}(x) = -\rho g W(x); \ (I - U)Q(x) = -\rho g W(x) \tag{3.6}$$

$$\overline{Q}(x) = (I - \overline{U})^{-1}(-\rho g W(x))$$

Теперь используя традиционную схему оценок [9], выводим

$$\overline{Q} = (I - \overline{U})^{-1}(-\rho g W(x)) = (I - \overline{U})^{-1}\left[(I - \overline{U}) + (\overline{U} - U)\right]Q =$$

$$= Q + (I - \overline{U})^{-1}(\overline{U} - U)((Q - \overline{Q}) + \overline{Q}).$$

Отсюда с использованием оценки (3.2) получаем

$$\left\|Q - \overline{Q}\right\| \leqslant \frac{\delta}{1-\delta}\left\|\overline{Q}\right\|, \ \delta = 2\pi^{-1}\varepsilon M\left\|(I - \overline{U})^{-1}\right\|$$

При $W(x) = W_0 = \text{const} > 0$ на основе последнего равенства в (3.6) и равенства в (3.5) устанавливаем, что $\left\|(I - \overline{U})^{-1}\right\| \leqslant 1$, и тогда окончательно для погрешности решения имеем оценку

$$\left\|Q - \overline{Q}\right\| \leqslant \alpha\rho g W_0 / (1-\alpha), \ \alpha = 2\pi^{-1}\varepsilon M \tag{3.7}$$

Приближенное решение $Q(x)$ уравнения (3.1) можно уточнить с помощью интерационной схемы на основе интегрального уравнения (2.3):

$$Q^{(n+1)}(x) = \overline{Q}(x) + f^{(n)}(x) + 2\gamma \int_0^x f^{(n)}(\xi) \operatorname{sh}(\gamma(x-\xi)) d\xi \tag{3.8}$$

$$f^{(n)}(x) = -\frac{\gamma}{\pi} \int_{-a}^{a} Q^{(n)}(u) G(\gamma|x-u|) du, \ Q^{(0)}(x) = \overline{Q}(x)$$

Входящая сюда функция $Q(x)$ определена в (3.4). При этом

$$D_{1,2} = \delta_j (b_1 \mp b_2) / \left[\operatorname{ch}(\lambda) \pm i \operatorname{sh}(\lambda)\right]; \ \delta_1 = -i, \ \delta_2 = 1$$

$$b_{1,2} = \mp\rho g\gamma i \int_{\mp a}^{0} W(\xi)\left[\mathrm{ch}(\gamma(a\pm\xi)) + i\,\mathrm{sh}(\gamma(a\pm\xi))\right]d\xi$$

Из оценки (3.2) следует, что итерационный процесс сходится и имеет место оценка

$$\left\|Q - Q^{(n+1)}\right\| \leq \alpha\left\|\overline{Q}\right\| / (1-\alpha) \tag{3.9}$$

В случае $W(x) = W_0 = \mathrm{const}$ при $n = 1$ находим

$$Q^{(2)}(x) = \rho g W_0\left\{-1 - \pi^{-1}\left[x_2\ln(x_2) - x_1\ln(-x_1)\right] - \gamma a\left[2i + \pi^{-1}2(C-1)\right] + O(\xi)\right\} \tag{3.10}$$

$$x_{1,2} = \gamma(x \mp a)$$

$$Q(x) = Q^{(2)}(x) + O(\rho g W_0\xi),\ \ \xi = |\lambda|^2|\ln(\lambda)|$$

Таким образом, избыточное давление в точках смены граничных условий имеет особенность типа $\rho$lr.$\rho$, где $\rho$ – расстояние от точки смены граничных условий. Интенсивность этой особенности пропорциональна безразмерной частоте $\gamma a$.

**4.** Определение свободной поверхности при низких частотах. Подставив выражения (3.5), (3.7) в последнее равенство в (2.1), определяем функцию $q(x)$. Затем из (2.2) вычисляем величину $\partial\varphi/\partial z\,|_{z=0}$, по которой из последнего равенства в (1.2) находим (для случая $W(x) = W_0 = \mathrm{const} > 0$)

$$\eta(x) = -\frac{1}{\rho g}\frac{\gamma}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-a}^{a}\rho g W_0\left[1 - 2D^{-1}\,\mathrm{ch}(\gamma u)\right]K(x-u)du + R_\eta \tag{4.1}$$

$$\left|R_\eta\right| \leq \frac{|\gamma|}{(2\pi)^{1/2}}\frac{1}{\rho g}\left|R_Q\right|\int_{-a}^{a}|K(x-u)|du,\ \ \left|R_Q\right| = \left|Q - \overline{Q}\right|$$

Интегралы в (4.1) вычисляются при помощи интегрирования по частям и использования формул

$$dF/dz = -G(z),\ \ dG/dz = F - z^{-1},\ \ F = d(G + \ln(z))/dz$$

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{t^2+1}dt,\ \ G(z) = \int_0^\infty \frac{te^{-zt}}{t^2+1}dt,\ \ \mathrm{Re}\,z > 0 \tag{4.2}$$

В результате имеем

$$\eta(x) = Ae^{-ix_1} - A(2\pi i)^{-1}\psi_1(x) + B\psi_2(x) + R_\eta,\ \ x > a$$

$$A = W_0 D^{-1}(\lambda)\mathrm{sh}(\lambda);\ \ B = W_0(2\pi D(\lambda))^{-1}$$

$$\psi_1(x) = i\left[F(x_1) - F(x_2)\right] + G(x_1) + G(x_2)$$

$$\psi_2(x) = e^{\gamma x}\left[E_1(x_2) - E_1(x_1)\right] - e^{-\gamma x}\left[E_1(-x_2) - E_1(-x_1)\right]$$

$$E_1(z) = \int_z^\infty t^{-1}e^{-t}dt,\ \ |\arg(z)| < \pi \tag{4.3}$$

$$\left|R_\eta\right| \leq W_0\varepsilon\alpha(1 + 2M_1)/(1-\alpha),\ \ M_1 = C + \pi 2^{-1} + \left|\ln(2\varepsilon_0)\right| + \varepsilon_0^2$$

Входящие сюда величины $D(\lambda)$, $\varepsilon$, $\varepsilon_0$ и $\lambda$ описаны в (3.5), (3.2), (3.7).

Из (4.3) при $x \to a^+$ получаем значение амплитудной функции свободной поверхности в точках смены граничных условий

$$\eta(a^+) = 2\lambda\pi^{-1}W_0\left[-\ln(2\lambda)+1-C\right]+O(W_0\xi)$$

Таким образом, верхняя граница жидкости терпит конечный разрыв первого рода в точках смены граничных условий $x = \pm a$; величина скачка пропорциональна безразмерной частоте.

**5. Оценка невязки граничного условия при низких частотах в исходной задаче.** Оценим еще невязку граничного условия в (1.1) при $z = 0$, $|x| \leqslant a$, т.е. вычислим в рассматриваемом примере амплитудную функцию деформации верхней границы жидкости $\eta(x)$ при $|x| \leqslant a$ и сравним ее с заданным значением $\eta(x) = W_0$. Покажем, что

$$\eta(x) = W_0\left[1+O(\xi)\right]. \tag{5.1}$$

Из (4.1) и (2.2) при $|x| \leqslant a$ после вычисления интегралов имеем

$$\eta(x) = W_0\{2-e^{-ix_2}-e^{ix_1}+iD^{-1}(\lambda)D_1(\gamma x)\left[1-e^{-ix_2}\right]+iD^{-1}(\lambda)D_2(\gamma x)\left[1-e^{ix_1}\right]-1+$$

$$+\pi^{-1}\left[F(x_2)-F(-x_1)\right]-2^{-1}\operatorname{ch}(\gamma x)+(2\pi)^{-1}\operatorname{ch}(\lambda)\left[F(x_2)+F(-x_1)\right]+(2\pi)^{-1}\operatorname{sh}(\lambda)[G(-x_1)+$$

$$+\ln(-x_1)+G(x_2)+\ln(x_2)]+O(\xi)\} \tag{5.2}$$

Отсюда, пользуясь представлением $F(z)$ и $G(z)$ при $|z| \to 0$, приходим к (5.1).

**6. Решение интегрального уравнения при фиксированных ограниченных частотах.** Покажем, что при всех $\lambda = \gamma a$, достаточно малых по абсолютной величине ($|\lambda| < \lambda_*$) интегральный оператор $U$, заданный посредством правой части уравнения (2.3), является оператором сжатия.

Будем полагать, что $W(x)$ принадлежит пространству $L^2$. Решение уравнения (2.3) будем искать среди функций из $L^2$.

Пусть $Q_1$ и $Q_2$ – две произвольные функции из $L^2$. Покажем, что существует такая положительная постоянная $\alpha < 1$, что

$$\rho(UQ_1, UQ_2) \leqslant \alpha\rho(Q_1, Q_2), \quad \rho(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|$$

Полагая $\xi = Q_1 - Q_2$, $y_1 = UQ_1$, $y_2 = UQ_2$, имеем

$$|y_1(x)-y_2(x)| \leqslant |\gamma|\int_{-a}^{a}|\xi(u)|du+\pi^{-1}|\gamma|\int_{-a}^{a}|\xi(u)||G(\gamma|x-u|)du$$

Отсюда при помощи неравенства Коши–Буняковского и оценки для $G(z)$ из (3.2) получаем

$$|y_1(x)-y_2(x)| \leqslant |\gamma|\left\{(2a)^{1/2}+\pi^{-1}\left[\int_{-a}^{a}G^2(\gamma_0|x-u|)du\right]^{1/2}\right\}\|\xi\|$$

Возвышая обе части последнего неравенства в квадрат после интегрирования имеем

$$\|y_1-y_2\| \leqslant |\lambda|B\|\xi\|, \quad B = 4+2^{3/2}\pi^{-1}\int_{-1}^{1}f^{1/2}(s)ds+\pi^{-2}\int_{-1}^{1}f(s)ds$$

$$f(s) = \int_{-1}^{1}G^2(\lambda_0|s-t|)dt, \quad \lambda_0 = \gamma_0 a$$

Отсюда следует, что при $|\gamma a| < B^{-1} = \lambda_*$ оператор $U$–оператор сжатия. Тем самым в силу теоремы Банаха [9] доказывается существование и единственность решения уравнения (2.3), и это решение может быть получено методом последовательных приближений. За начальную можно взять любую функцию из $L^2$. Здесь имеется в виду единственность «с точностью до перехода к эквивалентной функции» [9].

В случае $W(x) = W_0 = \text{const} > 0$, взяв за начальную функцию $Q^{(0)} = 0$, находим

$$Q^{(1)}(x) = -\rho g W_0$$

$$Q^{(2)}(x) = -\rho g W_0 \left\{1 - e^{-ix_2} - e^{ix_1} + 1 + \pi^{-1}\left[(-F(0) + F(x_2)) + (F(-x_1) - F(0))\right]\right\} - \rho g W_0$$

$$F(z) = \mathrm{ci}(z)\sin(z) - \mathrm{si}(z)\cos(z), \quad \operatorname{Re} z > 0$$

Раскладывая функции в ряды, получаем

$$Q^{(2)}(x) = \rho g W_0 \left\{-1 - \pi^{-1}\left[x_2 \ln(x_2) - x_1 \ln(-x_1)\right] - \lambda\left[2i + 2\pi^{-1}(C-1)\right] + O(\xi)\right\}$$

что полностью совпадает с представлением (3.10) для $Q^{(2)}(x)$, выведенным другим методом.

Автор благодарит В.И. Юдовича за обсуждение результатов и ряд замечаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Хаскинд М.Д.* Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука, 1973. 327 с.
2. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. *Leppington F.G.* On the radiation and scattering of short surface wawes. Pt 1. // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. Pt 1. P. 101–119.
4. *Holford R.L.* Short surface wawes in the presence of a finite dock. Pt I, II // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1964. V. 60. Pt 4. P. 957–983; 985–1011.
5. *Трепачев В.В.* Влияние геометрии барических возмущений на характеристики капиллярно-гравитационных волн // Теоретические и экспериментальные исследования поверхностных и внутренних волн. Севастополь: Изд-во МГИ АН УССР. 1980. С. 55–64.
6. *Потетюнко Э.Н.* Волновые движения неоднородной жидкости // Вопросы волновых движений жидкости. Ростов н/Д: Рост. обл. правление науч. и инж. обществ СССР, 1989. С. 86–166.
7. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
9. *Вулих Б.З.* Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 415 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
11.V.1993