УДК 531.01

© 1994 г. Л.И. Седов

О СВОЙСТВАХ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА ВЕЙЛЯ, СЛЕДУЮЩИХ ИЗ ТОЖДЕСТВ БЬЯНКИ

Для пустотных частей псевдоримановых пространств в конечных или бесконечно больших объемах четырехмерных пространств тензор Римана превращается в тензор Вейля. Из условий сплошности геометрии пространств устанавливаются виды функциональных зависимостей инвариантных компонент тензора Вейля от координатных аргументов в переменных Ферми на канонических координатных линиях глобального времени. Для полной системы независимых канонических инвариантов тензора Вейля в его различных типах в четырехмерных пространствах из условий сплошности установлены виды их функций от сопутствующих индивидуальных координат Ферми в точках псевдоримановых пространств.

Как известно, для построения различных конкретных точных решений об определении различного рода псевдоримановых пространств, содержащих пустые объемы V_4, в общих случаях необходимо в любых системах координат удовлетворить следующим тензорным уравнениям в частных производных внутри V_4, вытекающих непосредственно из тождеств Бьянки,

$$\nabla^i(R_{ij} - {}^1\!/\!{}_2 g_{ij}R) = 0, \quad \text{или} \quad R_{ij} - {}^1\!/\!{}_2 g_{ij}R = T_{ij} = 0 \tag{1}$$

Отсюда $R = 0$ и $R_{ij} = 0$.

Определение пустоты обусловлено равенством $T_{ij} = 0$ в рассматриваемых конечных или бесконечных объемах V_4 римановых пространств. Вся дальнейшая теория развита непосредственно для пустоты для тензора Вейля и легко распространяется на случай, когда $T_{ij} = \kappa g_{ij}$, где κ – постоянное число, а гауссова кривизна пространства $R = -4\kappa$ постоянна. При $\kappa = 0$ тензор Римана равняется тензору Вейля, причем $R_{ijkl} = W_{ijkl}$ и $W_{i.ks}^{.s..} = 0$.

Предлагаемая конструкция отыскания всех возможных решений системы (1) основана на использовании индивидуализации точек пространства, определенных с помощью сопутствующей системы координат ξ^α, τ, для которой метрику без ограничений общности всегда можно брать в следующем виде:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + 2g_{\alpha 4}(\xi^\alpha, \tau) d\xi^\alpha d\tau + g_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \tau) d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{2}$$

где функции $g_{ij}(\xi^\alpha, \tau)$ – компоненты метрического тензора, которые для искомых конкретных решений определяются неоднозначно, но только с точностью до преобразования координат.

Метрика вида (2) связана с введением семейства мировых линий L индивидуальных точек, для которых $\xi^\alpha = \text{const}$, а переменная координата τ является глобальным собственным временем на различных линиях L, на которых $ds^2 = c^2 d\tau^2$, четырехмерная скорость $\bar{u} = d\bar{s} / d\tau$, а абсолютное ускорение в каждой точке мировых линий L определено относительно инерциальных тетрад с постоянными базисами $e^i = \text{const}$ формулами вида

$$\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \frac{c\partial g_{\alpha 4}(\xi^\gamma, \tau)}{\partial \tau} e^\alpha = \left(\frac{du^k}{d\tau} + u^p \Gamma^k_{4p} \right) e_k$$

причем $e^i = э^i$, где базисы $э^i$ – переменные контравариантные векторы базисов в сопутствующих координатах в каждой точке семейства линий L.

Понятие о глобальном времени в римановых пространствах было введено в работах автора [1, 2] как временная координата τ в сопутствующей системе отсчета, что является непосредственным обобщением и аналогичным понятием об абсолютном универсальном времени в ньютоновской механике континуумов.

Дальнейшие этапы конструкции для получения решений системы уравнений (1) связаны с оперированием во всех точках линий L с переменными тетрадами $э^i$ и с введением еще инерциальных тетрад S с постоянными базисами e^i (вообще говоря, совпадающие либо с $э^i$ в фиксированный момент времени, либо с произвольными постоянными во всех точках пространства базисными векторами, в частности, с ортонормированными постоянными базисами, которые могут совпадать в фиксированные моменты времени с переменными и тоже ортонормированными каноническими базисами). В общем случае базисы $э^i$ и e^i связаны преобразованием вида $x^\alpha = x^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau)$, где x^α, τ – координаты в тетрадах S.

Ниже будет показано, что существуют решения уравнений (1), в которых семейство мировых линий L и система соответствующих сопутствующих координат, в которой индивидуальные точки названы равенствами $\xi^\alpha = \text{const}(\alpha)$. Линии L могут быть зафиксированы достаточно произвольно. Однако кроме этого для выделения конкретных решений потребуется еще задание дополнительных данных, формулируемых с помощью характеристических инвариантных параметров.

Обратимся теперь к установлению такого рода параметров и их свойств, извлекаемых из компонент соответствующих тензоров Римана.

А.З. Петровым в 1949 г. были введены (см. например [3]) шестимерные симметричные матрицы K, построенные из вещественных компонент тензора Римана в четырехмерном пространстве времени в соответствующих системах координат для получения фундаментальных решений уравнений (1).

$$K = \| K_{ab} \| = \begin{array}{c||ccc|ccc||c} & 14 & 24 & 34 & 23 & 31 & 12 & kl(a) \\ \hline 14 & \dots & K_{1424} & \dots & & & & \\ 24 & & & & & N & & \\ 34 & & M & & & & & \\ & & & & & & & \\ 23 & & & & \dots & K_{2331} & \dots & \\ 31 & & N & & & & & \\ 12 & & & & & M_1 = -M & & \\ \hline ij(b) & & & & & & & \end{array} \tag{3}$$

где для решений уравнений (1) M и N – симметричные трехмерные матрицы возможных трех типов. В канонических ортонормированных тетрадах для типа T_1 имеем

$$M = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{Vmatrix}, \quad N = \begin{Vmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{Vmatrix} \tag{4}$$

где $\lambda_s = -(\alpha_s + i\beta_s)$ – характерные инвариантные величины, равные корням соответствующего "векового уравнения" для матрицы K. Значения корней λ_s для данных тензоров Вейля могут быть различными в разных точках пространств.

Как было показано, для всех трех типов верны равенства

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\kappa, \qquad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \tag{5}$$

Для типа T_2, отвечающего тензору Вейля, корни двукратные: $\lambda_2 = \lambda_3$ и $\kappa = 0$; в канонических тетрадах наряду с возможными формулами (4) можно еще ввести канонические формулы

$$M = \begin{Vmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + p & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - p \end{Vmatrix}, \quad N = \begin{Vmatrix} -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & p \\ 0 & p & \beta \end{Vmatrix} \tag{6}$$

Для типа T_3 для трехкратных корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\kappa/3$ и $\beta_s = 0$, кроме матриц (4) или (6), можно еще получить решения с каноническими матрицами вида:

$$M = \begin{Vmatrix} -\kappa/3 & p & 0 \\ p & -\kappa/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa/3 \end{Vmatrix}, \quad N = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & p & 0 \end{Vmatrix} \tag{7}$$

где p – некоторые любые постоянные числа, отличные от нуля. Для любого семейства мировых линий L действительные величины α_s, β_s и κ, отвечающие некоторым решениям при учете равенств (5), в канонических ортонормированных тетрадах S в изолированных точках можно принимать произвольными.

Для известных тензоров Вейля трехмерная часть ориентации канонических тетрад S на мировых линиях L определяется алгебраическими из матриц M и N в шестимерной записи матрицы K.

Для обратной задачи о конструируемых полях тензоров Вейля канонические инерциальные тетрады S с базисами e^i вдоль мировых линий L можно задавать с помощью фиксирования дополнительного произвола, определяемого тензора Вейля, связанного с выбором трехмерной ориентации базисов $э^\alpha$ в точках линий L.

Компоненты тензора Вейля W_{ijkl} для семейства произвольно выбранных мировых линий L в соответствующей глобально определенной сопутствующей канонической системе отсчета (2) с переменными ξ^α, τ можно рассчитать в данном пространстве в тетрадах S^* с базисами $э^i$ и в преобразованных инерциальных канонических базисах e^i в тетрадах S.

В каждой точке четырехмерного псевдориманова пространства в локальных сопутствующих тетрадах с базовыми ортами $э^i$ и в инерциальных тетрадах e^i можно написать равенство $d\xi^i э_i = dx^i e_i$. Если $э_i = e_i$, то $d\xi^i = dx^i$, но базисы $э_i$ переменны как вдоль мировой линии L, так и при бесконечно малом переходе к точкам соседней мировой линии L', а инерциальные базисы e_i можно ввести локально в каждой точке по определению в качестве постоянных базисов в тетрадах S в согласии с равенствами

$$dэ_i / d\xi^k = -\Gamma^s_{ik}(\xi^\gamma, \tau)э_s, \quad de_i / dx^k = 0 \tag{8}$$

После соответствующего линейного преобразования с постоянными коэффициентами в каждой точке пространства базисы e_i и e^i можно рассматривать как одну и ту же ортонормированную инерциальную тетраду, образующую во всех точках объема V_4 пространства свои локальные неголономные системы отсчета.

Можно установить соответствие при одних и тех же координатах точек в искривленных псевдоримановых пространствах и в пространстве Минковского (при наличии топологической эквивалентности) с одинаковыми декартовыми базисами e^i в тетрадах S, но, естественно, с различными метриками.

В общем случае для тензоров Римана, а также для компонент тензора Вейля, записанных в каждой точке пространства в тетрадных базисах $э^i$ или e^i, можно написать равенства

$$W^*_{ijkl}э^iэ^jэ^kэ^l = W_{ijkl}e^ie^je^ke^l \tag{9}$$

Тождества Бьянки, выражающие условия сплошности, вытекающие из определений тензоров Римана, в каждой из тетрад $э^i$ и e^i можно написать в форме

$$\nabla_s W^*_{ijkl} + \nabla_k W^*_{ijls} + \nabla_l W^*_{ijsk} = W_{ijkl,s} + W_{ijls,k} + W_{ijsk,l} = 0 \tag{10}$$

Здесь ∇_s, ∇_k, ∇_l – символы ковариантных производных в любых системах координат, а индексы, отделенные запятой, обозначают частные производные по координатам с индексами s, k и l в тетрадах S.

В дальнейшем учтем, что в равенстве (10) принято, что $э^i = e^i$ и что $W^*_{ijkl} = W_{ijkl}$, но частные производные этих компонент по координатам различны. Вместе с этим равенство (10) имеет смысл и в том случае, когда $э^i \neq e^i$ и $W^*_{ijkl} \neq W_{ijkl}$.

Если равенства Бьянки удовлетворяются в локальных инерциальных системах тетрад, то из формул (10) очевидно, что они будут удовлетворяться в любых базисах и, в частности, в глобальных переменных ξ^α, τ и $э^i$ в точках пространства.

Рассмотрим теперь экстенсивны, составленные из перечисляемых компонент W^*_{ijkl} и W_{ijkl} в точках пространства в тетрадных координатах ξ^α, τ, $э^i$ и в координатах x^α, τ, e^i для инерциальных тетрад S на L и удовлетворяющие всем условиям алгебраической симметрии компонент тензора Римана и соответственно тензора Вейля.

Если кроме этого экстенсив непрерывных функций W_{ijkl} удовлетворяет всем равенствам (10), образующим тетрадные соотношения Бьянки, то очевидно, что совокупность W^*_{ijkl} и W_{ijkl} можно рассматривать как компоненты в лагранжевых координатах ξ^i или координатах x^i для тензора Вейля в локальных координатах в точках x^i для инерциальных базисов в тетрадах S.

В качестве некоторого экстенсива W_{ijkl} в каждых точках ξ^i для конструируемого тензора кривизны и пространства Вейля можно взять канонические элементы из матрицы K, выражающиеся через канонические элементы трехмерных матриц M и N, которые в свою очередь зависят от типов T_1, T_2 и T_3 и представляются формулами (4)–(6) через инварианты α_s и β_s в тетрадах S.

Для каждого данного типа матрица K выражается через M и N во всех точках пространства через α_s и β_s в одинаковом виде, однако α_s и β_s как функции лагранжевых координат и в соответствующих тетрадах S в переменных x^i, кроме равенств (4)–(7), должны еще обеспечивать выполнение тождеств Бьянки (10).

Обратимся теперь к установлению в каждой точке пространства дополнительных формул, ограничивающих инвариантные функции α_s и β_s как функции от x^i условиями Бьянки. Как компоненты W^*_{ijkl} в глобальных координатах ξ^α, τ, так и соответствующие компоненты W_{ijkl} в локальных инерциальных тетрадах должны удовлетворять соотношениям Бьянки при учете преобразований от переменных x^α, τ к переменным ξ^α, τ.

В локальных ортонормированных тетрадах, сопутствующих и канонических $э^i$, введем еще инерциальные тетрады S с базовыми постоянными векторами e^i, равными $э^i$.

Согласно формуле (10) в тетрадах e^i после дифференцирования по x^s в тетрадах S соотношения Бьянки приобретают вид

$$\begin{aligned}
&s=1, \quad W_{1414,1}+W_{1441,1}+W_{1411,4}=0\\
&s=2, \quad W_{1414,2}+W_{1442,1}+W_{1421,4}=0\\
&s=3, \quad W_{1414,3}+W_{1443,1}+W_{1431,4}=0\\
&s=4, \quad W_{1414,4}+W_{1444,1}+W_{1441,4}=0
\end{aligned} \tag{12}$$

При составлении производных от экстенсивов W_{ijkl} в базисах e^i в соотношениях Бьянки можно в канонических тетрадах в равенстве (10) пользоваться каноническими формулами для компонент W_{ijkl}, которые выражаются через α_s и β_s как функции от x^i.

В соотношениях (12) для компонент тензора Вейля в канонической форме учтем, что все недиагональные члены в M и N в экстенсиве W_{ijkl} в соседних точках равны нулю в T_1 или постоянным числам в T_2 и T_3. Поэтому во втором и третьем уравнениях (12) следует учесть, что во всех точках пространства и во всех типах

$$W_{1412,1}=W_{1421,4}=W_{1443,1}=W_{1431,4}=0 \tag{13}$$

Первое и четвертое равенства (12) в точном виде должны удовлетворяться тождественно, поэтому можно написать, что

$$W_{1414}=\alpha_1(\tau, x^1)$$

Иначе говоря, из соотношений (12) получится, что компонента W_{1414} может быть, вообще говоря, произвольной функцией только от переменных τ и x^1.

Аналогичным образом после дифференцирования других диагональных членов W_{2424} и W_{3434} получим равенства в канонических тетрадах S

$$W_{1414}=\alpha_1(\tau, x^1), \quad W_{2424}=\alpha_2(\tau, x^2), \quad W_{3434}=\alpha_3(\tau, x^3)$$

Теперь для тензора Вейля на основании (5) придем к формуле

$$\alpha_1(\tau, x^1)+\alpha_2(\tau, x^2)+\alpha_3(\tau, x^3)=0 \tag{14}$$

Из (14) выводим, что на всех координатных линиях x^1 при $\tau=\text{const}$, $x^2=\text{const}$, $x^3=$ $=\text{const}$ переменной может быть только $\alpha_1(x^1)$, но из (12) получим, что величина α_1 должна быть постоянной и, следовательно, независимой от x^1.

Аналогичные выводы получаются из (14) для α_2 и α_3 об их независимости от x^2 и x^3. Следовательно, три инварианта α_1, α_2 и α_3 для данного семейства мировых линий могут зависеть только от конкретного значения соответствующего глобального времени τ и рассматриваемого конкретного экземпляра тензора Вейля, причем

$$\alpha_1(\tau)+\alpha_2(\tau)+\alpha_3(\tau)=0 \tag{15}$$

Обратимся теперь к вычислению канонических значений β_1, β_2, β_3. Имеем:

$$\begin{aligned}
&s=1: \quad W_{1423,1}+W_{1431,2}+W_{1412,3}=0\\
&s=2: \quad W_{1423,2}+W_{1432,2}+W_{1422,3}=0\\
&s=3: \quad W_{1423,3}+W_{1433,2}+W_{1432,3}=0\\
&s=4: \quad W_{1423,4}+W_{1434,2}+W_{1442,3}=0
\end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда, так как

$$W_{1431,2}=W_{1412,3}=W_{1434,2}=W_{1442,3}=0$$

и из уравнений, аналогичных (16) для W_{2431} и W_{3412} можно записать, что

$$W_{1423}=\beta_1(x^2, x^3), \quad W_{2431}=\beta_2(x^3, x^1), \quad W_{3412}=\beta_3(x^1, x^2) \tag{17}$$

Согласно (5) и (17) для тензора Вейля в инерциальной тетраде S должны еще выполняться равенства

$$\beta_1(x^2, x^3) + \beta_2(x^3, x^1) + \beta_3(x^1, x^2) = 0 \tag{18}$$

Для тензоров Вейля типа D при метриках, отвечающих равным корням $\lambda_2 = \lambda_3$, верны также равенства $\beta_2 = \beta_3$. В этом случае на основании соотношений (18) в переменных x^1, x^2, x^3 получим немедленно, что $\beta_1 = -2\beta_2 = \text{const}$. Отсюда легко вывести, что для разных решений Керра с фиксированными семействами мировых линий L, представляющих собой окружности с центрами на оси симметрии, инварианты β_s могут быть разными постоянными числами на одной и той же орбитальной окружности со сходными формулами для метрик в сопутствующих системах Лагранжа.

Формула (18) позволяет ввести еще следующие упрощения. После дифференцирования по x^1 из формулы (18) получим

$$\partial\beta_2(x^1, x^3)/\partial x^1 + \partial\beta_3(x^2, x^1)/\partial x^1 = 0$$

Отсюда после дифференцирования по x^3 следует

$$\partial^2\beta_2(x^1, x^3)/\partial x^1\partial x^3 = 0$$

и поэтому $\beta_2 = \psi(x^1) + \varphi(x^3)$. Аналогично получаются формулы $\beta_3 = \psi(x^2) + f(x^1)$ и $\beta_1 = g(x^2) + h(x^3)$.

На основании формулы (18) $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \beta_1 &= f(x^2) - h(x^3) + \beta_{10} \\ \beta_2 &= h(x^3) - \varphi(x^1) + \beta_{20} \\ \beta_3 &= \varphi(x^1) - f(x^2) + \beta_{30} \end{aligned} \tag{19}$$

где β_{s0} – скалярные постоянные на мировых линиях семейства L, равные значениям $\beta_s(\xi^\alpha, \tau)$, которые отвечают в рассматриваемой точке пространства C координатам центра в инерциальной тетраде.

Таким образом, решения задач об определении различных тензоров Вейля представляются с помощью функций, которые могут быть выбраны произвольно для семейства сопутствующих мировых линий L с трехмерными каноническими тетрадами e^α скаляров $\lambda_s(\xi^\alpha, \tau) = -(\alpha_s + i\beta_s)$ и кроме этого еще с фиксированием частных примеров матриц K А.З. Петрова для типов T_1, T_2 и T_3. (Соответствующий тензор Вейля зависит от системы инерциальных канонических тетрад e^i в точках на мировых линиях семейства L.)

Дальнейшая теория состоит в конструкции вычислений глобальных функций для компонент метрики $g_{ij}(\xi^\alpha, \tau)$ в сопутствующих координатах, содержащих дополнительные произволы за счет возможных преобразований координат.

В связи с изложенной теорией очевиден следующий результат. Если все инварианты α_s и β_s задаются как любые постоянные числа независимо от координат точек пространства, но удовлетворяющие равенствам (5), то получим тензор Вейля в соответствующей сопутствующей системе координат Лагранжа ξ^α, τ.

В связи с предыдущими выкладками в этом случае очевидно, что в типе T_2, когда корни двукратны, например, при $\alpha_2 = \alpha_3$ и $\beta_2 = \beta_3$ при $p = \text{const}$, условия (5) и (15) упрощаются с сохранением своего вида, а в типе T_3 соотношения Бьянки удовлетворяются тождественно, так как все компоненты тензора Римана в канонической матрице K постоянны.

В типе N, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ при $p = 1$, в каждой точке пространства N верны формулы (6) при $\alpha_s = 0$. Поэтому соответствующие компоненты тензора Вейля в канонических матрицах всегда удовлетворяют тождествам Бьянки. Вследствие этого получается соответствующая формула (6) для компонент тензора Вейля в канонических системах.

Таким образом, основные задачи о построении римановых пространств в пустых объемах связаны с изучением тензоров Вейля в сопутствующих координатах как носителях в общей теории относительности характерных свойств явлений гравитации в областях пустоты. Однако в общем случае построенные всевозможные метрики, для которых $R_{ij} = 0$ или $R_{ij} = -\kappa g_{ij}$ и соответствующие им пространства пригодны для теории гравитации, в которой возникают дополнительные условия и ограничения.

Если задача об определении компонент метрического тензора g_{ij} и тензора Вейля W_{ijkl} в сопутствующих координатах решена, то ее решение зависит с точки зрения любого другого заданного наблюдателя в данном пространстве можно получить расчетом преобразования координат от найденного решения в сопутствующей системе к системе заданного наблюдателя при помощи алгорифма инерциальной навигации. Изложение методов расчета инерциальной навигации содержится в книге [4].

Проблема выбора конкретной системы координат, как правило, нетривиальна в теориях, оперирующих с каноническими и локальными неголономными инерциальными системами, что в приложениях имеет фундаментальное значение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17341).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л.И.* О глобальном времени в общей теории относительности // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 1. С. 44–48.
2. *Седов Л.И.* Об уравнениях инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 6. С. 1311–1314.
3. *Петров А.З.* О пространствах, определяющих поля тяготения // Докл. АН СССР. 1951. Т. 81. № 2. С. 149—152.
4. *Седов Л.И., Цыпкин А.Г.* Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма. М.: Наука, 1989. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.III.1993