УДК 532.59

© 1994 г. В.В. Никулин

ПОЛЫЙ ВИХРЬ С ОСЕВОЙ СКОРОСТЬЮ В ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО РАДИУСА

В длинноволновом приближении рассматривается движение вращающегося слоя жидкости с неравной нулю азимутальной компонентой завихренности по стенкам круглой трубы переменного сечения. Получена система уравнений, аналогичная уравнениям вихревой мелкой воды [1-3]. Установлен строгий критерий, играющий роль, аналогичную скорости звука в газе, и разделяющий решения, имеющие качественно разное поведение. Показано сходство между движениями вращающегося слоя жидкости и течениями идеального газа в соплах.

Ранее [4] для торнадоподобных и полых вихрей, в длинноволновом приближении, получены уравнения, аналогичные уравнениям вихревой мелкой воды [1], которые затем сведены к системе интегро-дифференциальных уравнений, подобных [2, 3] (бесконечной гидродинамической системе [2]).

Ниже этот метод применяется для исследования полого вихря с осевой скоростью в трубе переменного радиуса. Подобные течения реализуются в соплах центробежных форсунок. Движение вязкой жидкости в пограничном слое в коническом сопле центробежной форсунки рассматривалось в [5].

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарное вращательно-симметричное течение идеальной несжимаемой жидкости. Сила тяжести отсутствует. Вводится цилиндрическая система координат (r, φ, z) с осью z, направленной вдоль оси симметрии. Жидкость занимает область $z \geqslant 0, r_1(z) \leqslant r \leqslant r_0(z)$, где $r_0(z)$ – радиус трубы, заданная функция от $z, r_1(z)$ – радиус свободной поверхности. Параметры течения при $z = 0$ считаются известными. Исследуется его эволюция в зависимости от координаты z.

С целью перехода к безразмерным величинам вводятся масштабы длины, скорости и плотности. За единицу длины принимается характерный масштаб изменений по оси z, за единицу скорости – величина вращательной компоненты скорости при $z = 0, r = r_0$, плотность жидкости полагается равной единице. Далее все величины, если не указано особо, берутся в безразмерном виде.

Вводятся обозначения: (u, v, w) – компоненты скорости, соответствующие (r, φ, z), p – давление, δ – безразмерное значение r_0 при $z = 0$. Считается, что $\delta \ll 1$. Для перехода к длинноволновому приближению совершаются растяжения координат и функций [4]:

$$r^2 \to \delta^2\eta, \quad z \to z, \quad 2ur \to \delta^2 q, \quad vr \to \delta A, \quad w \to w, \quad p \to p$$

При этом границы $r_1(z)$ и $r_0(z)$ переходят в $\eta_1(z)$ и $\eta_0(z)$, причем, согласно определению δ, $\eta_0(0) = 1$.

В результате уравнения движения и неразрывности принимают вид

$$qA_\eta + wA_z = 0$$

$$(\delta^2/2)(qq_\eta + q^2/(2\eta) + wq_z) - A^2/\eta = -2\eta p_\eta \tag{1.1}$$

$$qw_\eta + ww_z = -p_z, \quad q_\eta + w_z = 0$$

Индексами из независимых переменных обозначаются соответствующие частные производные.

На свободной поверхности и границе трубы ставятся краевые условия

$$p = 0, \quad q = w\eta_{1z}, \quad \eta = \eta_1(z) \tag{1.2}$$

$$q = w\eta_{0z}, \quad \eta = \eta_0(z) \tag{1.3}$$

При переходе к длинноволновому приближению слагаемые в (1.1), пропорциональные δ^2, опускаются. Полученная система преобразуется аналогично [2–4]. Вводятся новые независимые переменные $z, \nu, \nu \in [0, 1]$, по соотношениям: $z = z'$, $\eta = R(z', \nu)$, где R удовлетворяет уравнению и краевым условиям

$$wR_{z'} = q; \quad R(z', 0) = \eta_0, \quad R(z', 1) = \eta_1 \tag{1.4}$$

Начальное значение $R(0, \nu)$ – произвольная однозначная непрерывная функция, удовлетворяющая последним двумя равенствам (1.4).

При таком определении R краевые условия (1.2) (для q) и (1.3) выполняются автоматически. Неизвестная граница $\eta_1(z)$ переходит в известную, $\nu = 1$, граница $\eta_0(z)$ – в $\nu = 0$. После пренебрежения слагаемыми с δ^2, в переменных z', ν, система (1.1) принимает вид (далее штрих при z' опускается)

$$wA_z = 0, \quad \left(A^2/(2R^{2)}\right)R_\nu = p_\nu$$

$$R_\nu ww_z = -R_\nu p_z + R_z p_\nu, \quad q_\nu + R_\nu w_z - R_z w_\nu = 0$$

Из первого уравнения следует, что $A = A(\nu)$. Тогда, при помощи второго уравнения интегрированием по ν от ν до 1, при учете условия на давление (1.2), исключаем p. При помощи (1.4) исключается q. В результате, после преобразований, получаем уравнения относительно w и R:

$$ww_z = \left(A_1^2/(2R_1^2)\right)R_{1z} + \left(\int_\nu^1 (2R)^{-1} A_\nu d\nu\right)_z, \quad (wR_\nu)_z = 0 \tag{1.5}$$

A_1, B_1 – значения A и R при $\nu = 1$(на свободной поверхности).

Система (1.5) решается с начальными данными при $z = 0$. Полагаем, что $w = w_0(\nu)$, $R = 1 - \varepsilon_0\nu$, при $z = 0$, где $\varepsilon_0 = 1 - \eta_1(0)$. (Здесь учтено, что $R(0, 0) = \eta_0(0) = 1$.) Далее исследуется случай, когда циркуляция A постоянна, а завихренность потока обусловлена непостоянством осевой скорости. Первоначально считается, что сечение сопла изменяется монотонно.

В этом случае справедлива следующая

Теорема. Пусть $A = 1$, функция $w_0(\nu)$ ограничена и $w_0(\nu) \geqslant \gamma > 0$, γ – постоянная, $\eta_0(z)$ – монотонная функция и

$$\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon_0(1 - \varepsilon_0)^{-2}\int_0^1 w_0^{-2} d\nu$$

$$\lambda_1 = (1 - \varepsilon_0)^2\left[1 + (1 - \varepsilon_0)\gamma^2\right]^{-2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \varepsilon_0 w_0 (w_0^2 - \gamma^2)^{-3/2} d\nu$$

Считается, что $\lambda_1 < 0$. Разделяются следующие случаи.

1°. $\lambda < 1$. Тогда, если $\eta_0'(z) > 0$, то решение существует при всех $z \to \infty$, если $\eta_0'(z) < 0$, то решение существует для $z < z_*$, где z_* – решение некоторого интегрального уравнения, причем $w_z \to \infty$, $R_z \to \infty$ при $z \to z_*$.

2°. $\lambda > 1$. Тогда, если $\eta_0(z) > 0$, то решение существует для $z \leqslant l$, где l находится из уравнения

$$\eta(1) = (1-\varepsilon_0)\left[1+(1-\varepsilon_0)\gamma^2\right]^{-1} + \int_0^1 \varepsilon_0 w_0 (w_0^2 - \gamma^2)^{-1/2} d\nu$$

причем при $z = l$ имеем, $w(\nu) = 0$ для ν, задаваемых уравнением $w_0(\nu) = \gamma$. Если $\eta_0'(z) < 0$, то решение существует для $z \leqslant z_*$, причем $w_z \to \infty$, $R_z \to \infty$ при $z \to z_*$.

Доказательство. В (1.5) полагаем $A = 1$. Система интегрируется от 0 до z. Из второго уравнения последующим интегрированием по ν выражаем R. В результате получаем

$$\psi + 1/R_1 = 1/(1-\varepsilon_0),\quad (\psi = w^2 - w_0^2) \tag{1.6}$$

$$R = \eta_0(z) - \int_0^\nu \varepsilon_0 w_0 (w_0^2 + \psi)^{-1/2} d\nu$$

Так как R_1 – значение R при $\nu = 1$, то из первого уравнения следует: $\psi = \psi(z)$, $\psi(0) = 0$ (поскольку $R_1(0) = 1 - \varepsilon_0$). После преобразований соотношение (1.6) приводится к виду

$$\eta_0(z) = f(\psi) \tag{1.7}$$

$$f(\psi) = (1-\varepsilon_0)\left[1-(1-\varepsilon_0)\psi\right]^{-1} + \int_0^1 \varepsilon_0 w_0 (w_0^2 + \psi)^{-1/2} d\nu$$

Таким образом, задача свелась к нахождению неявной зависимости $\psi(z)$, даваемой (1.7). Функция $f(\psi)$ рассматривается на интервале $-\gamma_2 \leqslant \psi < 1/(1-\varepsilon_0)$. Очевидно, на этом интервале $f(\psi) > 0$. Дифференцированием можно убедиться, что $f''(\psi) > 0$. Отсюда следует, что $f'(\psi)$ – монотонно возрастающая функция. Из выражения для $f'(\psi)$ следует: $f'(-\gamma^2) = \lambda_1 < 0, f'(0) = (1-\varepsilon_0)^2(1-\lambda)$.

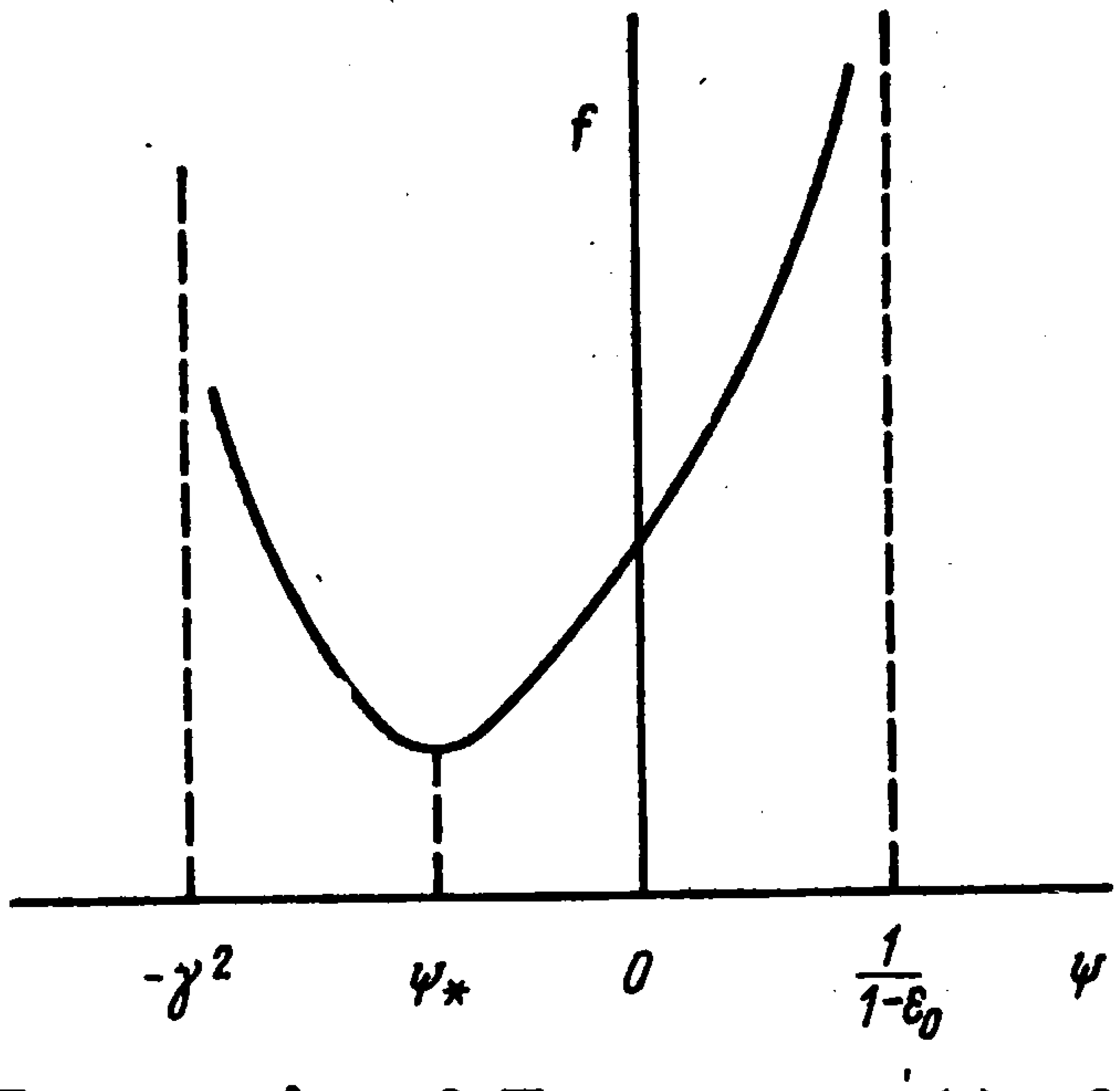
1°. Пусть $\lambda < 1$. В этом случае в силу монотонного возрастания $f'(\psi)$ и неравенства $f'(-\gamma^2) < 0$ график функции $f(\psi)$ имеет вид, качественно изображенный на фигуре. Из этого графика следует, что если $\eta_0'(z) > 0$ (сопло расширяется), то $f(\psi)$, ψ, а следовательно, w возрастают с ростом z, и решение существует при всех z. Если $\eta_0'(z) < 0$ (сопло сужается), то $f(\psi)$, ψ, а следовательно, w убывают с ростом z, и решение существует лишь для $z \leqslant z_*$, $\eta_0 \geqslant \eta_*$, $\psi \geqslant \psi_*$, где ψ_* находится из уравнения $f'(\psi_*) = 0$, а z_* и η_* – из (1.7) после подстановки в него $\psi = \psi_*$. Дифференцируя $f(\psi)$ как сложную функцию z, при счете (1.7) получаем

$$\psi_z = \eta_{0z}/f_\psi \tag{1.8}$$

Отсюда и в силу того, что $\eta_0' < 0, f' \geqslant 0$, следует, что $\psi_z \to -\infty$ при $z \to z_*$. Тогда, согласно определению ψ и (1.6), имеем: $w_z \to -\infty$, $R_z \to -\infty$ при $z \to z_*$.

2°. Пусть $\lambda > 1$. В этом случае $f'(0) < 0$ и функция $f(\psi)$ имеет минимум правее начала координат. Отсюда следует, что если $\eta_0'(z) > 0$ (сопло расширяется), то $f(\psi)$ возрастает, ψ и w убывает, причем решение существует до тех пор, пока ψ не достигнет значения $-\gamma^2$. Таким образом, решение существует для $z \leqslant l$, где l вычисляется из (1.7) с $\psi = -\gamma^2$. Из определения w следует, что при $z = l$ имеем $w = 0$ для ν, задаваемых уравнением $w_0(\nu) = \gamma$.

Если $\eta_0'(z) < 0$ (сопло сужается), то $f(\psi)$ убывает, ψ и w возрастают, причем решение существует для $z \leqslant z_*$, $\eta \geqslant \eta_*$, $\psi \leqslant \psi_*$, где ψ_* находится из уравнения $f'(\psi_*) = 0$, а z_* и η_* – из (1.7) после подстановки в него $\psi = \psi_*$. Из (1.8), определения ψ и (1.6) следует, что $\psi_z \to \infty$, $w_z \to \infty$, $R_z \to \infty$ при $z \to z_*$.



Для математической общности рассмотрим случай $\lambda_1 > 0$. Физически такое течение мало реально, поскольку при этом условии функция $(w_0^2 - \gamma^2)^{-3/2}$ должна быть интегрируема на [0, 1].

Утверждение. Пусть выполнены условия теоремы за исключением неравенства $\lambda_1 < 0$. Полагаем $\lambda_1 \geqslant 0$. Тогда, если $\eta_0'(z) > 0$, то решение существует при всех $z \to \infty$ и w растет с увеличением z. Если $\eta_0'(z) < 0$, то решение существует для $z \leqslant l$, где l находится из уравнения (1.7) с $\psi = -\gamma^2$, причем w убывает с ростом z и при $z = l$, $w = 0$ для ν задаваемых уравнением $w_0(\nu) = \gamma$.

Доказательство следует из того, что функция $f(\psi)$ при $\lambda_1 \geqslant 0$ на отрезке $\left[-\gamma^2,\ 1/(1-\varepsilon_0)\right]$ монотонна.

Отметим интересный результат теоремы. Для физически важного случая $\lambda_1 < 0$ поведение течения в сужающемся и расширяющемся сопле качественно различно. В сужающемся сопле решение существует всегда только для конечных $z \leqslant z_*$, причем решение перестает существовать из-за обращения производных в бесконечность. В расширяющемся сопле, при $\lambda < 1$, решение существует при любых $z \to \infty$, при $\lambda > 1$ решение существует вплоть до $z \leqslant l$, где l находится из уравнения (1.7) с $\psi = -\gamma^2$, причем решение перестает существовать из-за обращения осевой скорости в нуль для ν, задаваемых уравнением $w_0(\nu) = \gamma$.

Полученные результаты при помощи установленных свойств функции $f(\psi)$ и соотношений (1.7) обобщаются на случай немонотонного изменения сечения трубы. Так, при $\lambda < 1$ решение существует для тех z, для которых выполнены неравенства: если $\lambda_1 < 0$ (фигура), то $\eta_0(z) \geqslant f(\psi_*)$, если $\lambda_1 \geqslant 0$, то $\eta_0(z) \geqslant f(-\gamma^2)$. При $\lambda > 1$, решение существует до тех пор, пока $f(-\gamma^2) \leqslant \eta_0(z) \leqslant f(\psi_*)$.

2. Обсуждение результатов. Аналогия с течениями идеального газа. Было показано [4], что в длинноволновом приближении уравнения движения жидкости в полом вихре с постоянной циркуляцией аналогичны уравнениям вихревой мелкой воды [2, 3], и, следовательно, обладают такими же гиперболическими свойствами [3]. Используя это, найдем условие, при котором скорость характеристики дискретного спектра равна нулю. Полагая в (1.5) $A = 1$ и учитывая, что при $\nu = 0$, $R = \eta_0(z)$, получим уравнения

$$2R_1^2 w w_z - \int_0^1 R_{\nu z} d\nu = \eta_{0z}, \quad R_\nu w_z + w R_{\nu z} = 0.$$

Отсюда, аналогично известному подходу [3], получаем требуемое условие

$$-\int_0^1 \frac{R_\nu}{2w^2} d\nu = R_1^2 \tag{2.1}$$

Подстановка в (2.1) выражений для w через ψ, R_1 и R_ν, вычисленных из (1.6), показывает, что соотношение (2.1) эквивалентно условию $f'(\psi) = 0$. Таким образом, в сужающемся сопле решение перестает существовать в том месте, где скорость характеристики в неподвижной системе отсчета равна нулю.

Отметим аналогию между течениями идеального газа и слоя вращающейся жидкости в соплах. Движение жидкости при $\lambda < 1$ (фигура) аналогично сверхзвуковому течению газа, при $\lambda > 1$ (минимум функции $f(\psi)$ находится правее начала координат) – дозвуковому. В первом случае, в расширяющемся сопле происходит ускорение потока и решение существует вплоть до $z \to \infty$. В сужающемся сопле происходит замедление потока и решение перестает существовать, когда скорость газа становится равной локальной скорости звука, а для слоя жидкости скорость характеристики в неподвижной системе отсчета становится равной нулю. Математически эти условия эквивалентны, поскольку скорость звука в газе и есть скорость характеристики. Во втором случае (дозвуковой поток), в расширяющемся сопле поток замедляется, и решение существует до тех пор, пока его скорость в какой-либо точке не обратится в нуль. В сужающемся сопле происходит ускорение потока, и решение существует до тех пор, пока скорость газа не станет равной скорости звука или скорость характеристики не обратится в нуль.

В связи с этим можно предположить, что при течении вращающегося слоя жидкости, когда скорость слоя становится равной локальной скорости характеристики, должно происходить явление, подобное образованию ударных волн в газовой динамике. Это может быть «прыжок» вихря (аналогичный гидравлическому прыжку в течениях мелкой воды). Если происходит замедление потока и вертикальная скорость где-то внутри слоя обращается в нуль, то в том месте может происходить «распад» вихря.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benney D.J.* Some properties of long nonlinear waves // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. N 1. P. 45–50.
2. *Захаров В.Е.* Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функц. анализ и его приложения. 1980. Т. 14. Вып. 2. С. 15–24.
3. *Тешуков В.М.* О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. N 3. С. 555–559.
4. *Никулин В.В.* Аналог уравнений вихревой мелкой воды для полых и торнадоподобных вихрей. Высота стационарного торнадоподобного вихря // ПМТФ. 1992. N 2. С. 47–52.
5. *Taylor G.I.* The boundary layer in the converging nozzle of a swirl atomizer // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1950. V. 30. Pt. 2. P. 129–139.

Новосибирск

Поступила в редакцию
15.II.1993