

УДК 531.355

© 1994 г. В.А. Привалов, В.А. Самсонов

СОПОСТАВЛЕНИЕ СВОЙСТВ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХ РЕЖИМОВ АВТОРОТАЦИИ

Проводится сопоставление свойств установившегося свободного падения в сопротивляющейся среде авторотирующего тяжелого тела со свойствами соответствующего перманентного вращения его макета, обдуваемого в аэродинамической трубе. В обоих этих стационарных режимах относительные движения тела и среды совпадают, но тела имеют различное число степеней свободы.

В пространстве параметров строится область асимптотической устойчивости установившегося падения и проводится ее сравнение с областью устойчивости перманентного вращения [1]. Установлено, что, несмотря на различие в динамике тел, часть границ областей устойчивости совпадают. Выделяются характерные параметры, при помощи которых формируется мера отличия областей. Исследование устойчивости проводится при помощи разработанной геометрической интерпретации условий отрицательности действительных частей корней полинома третьей степени с комплексными коэффициентами, приведенных в [2].

Для динамических систем различной размерности отсутствуют какие-либо теоремы сравнения (типа теорем Кельвина–Четаева о влиянии диссипативных сил). Поэтому исследование конкретного примера может представлять интерес с методической точки зрения. Тем более, что несмотря на определенный опыт экспериментов с подвижными моделями в аэродинамических трубах [3], вопрос о соответствии поведения этих моделей и их прототипов в свободном полете остается еще слабо исследованным.

1. Математическая модель движения. Рассмотрим свободное падение динамически симметричного тела в невозмущенной атмосфере. Кроме веса Mg , к телу приложена распределенная система сил со стороны набегающего потока. Будем считать [1], что это воздействие сосредоточено на четырех лопастях, расположение которых на теле обеспечивает его авторотацию относительно оси динамической симметрии. Исследуем вопрос существования и устойчивости равномерного вертикального снижения, при котором тело вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикально ориентированной оси симметрии.

Применим квазистатическую модель воздействия среды на тело [4]. В определенных условиях она позволяет дать удовлетворительное описание даже нестационарных движений тела [5, 6].

Предположим, что система сил, действующих на j лопасть, эквивалентна равнодействующей R_j , которую можно представить в виде суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих: W_j – силы лобового сопротивления и Y_j – аналога подъемной силы. Точка O_j приложения силы R_j (центр давления) считается фиксированной точкой j -й лопасти. Тогда для скорости точки O_j имеем

$$V_j = V + \Omega \times r_j \quad (1.1)$$

где Ω – угловая скорость тела, r_j – радиус-вектор точки O_j относительно центра масс, движущегося со скоростью V .

Векторы W_j и Y_j запишем в виде

$$W_j = -\frac{1}{2}\rho c_x(\alpha_j) S V_j V_j \quad (1.2)$$

$$Y_j = \frac{1}{2}\rho c_y(\alpha_j) S (V_j \times n_j) \times V_j / \cos \alpha_j \quad (1.3)$$

где ρ – плотность атмосферы, S – характерная площадь лопасти, $c_x(\alpha_j)$, $c_y(\alpha_j)$ – безразмерные аэродинамические коэффициенты, являющиеся функциями текущего значения угла α_j атаки j лопасти, т.е., угла между вектором V_j и плоскостью, связанной с лопастью. Вектор n_j – нормаль к этой плоскости – определяет ориентацию лопасти относительно осей, связанных с телом.

Видно, что сила W_j сопротивления направлена противоположно вектору V_j скорости центра давления O_j относительно покоящейся среды, сила Y_j – ей перпендикулярна и лежит в плоскости угла атаки α_j , образованной векторами V_j и n_j .

Будем считать, что центры давления O_j лежат в одной плоскости с центром масс тела, ортогональной его оси симметрии на расстоянии r от этой оси и образуют вершины квадрата.

Сумма сил $W_j + Y_j$, приложенных к j лопасти, создает момент M_j относительно центра масс тела

$$M_j = \frac{1}{2}\rho c_x(\alpha_j) S V_j \{k(\alpha_j)(r_j \times n_j) V_j / \cos \alpha_j - (r_j \times V_j)[1 - k(\alpha_j) \operatorname{tg} \alpha_j]\} \quad (1.4)$$

$$k(\alpha_j) = c_y(\alpha_j) / c_x(\alpha_j)$$

где $k(\alpha_j)$ – аэродинамическое качество лопасти.

Моментом сил воздействия среды относительно точки O_j пренебрежем. Таким образом, силы и их моменты зависят от углов, определяющих ориентацию вектора V относительно тела, от его угловой скорости и от различия между скоростями и углами атаки разных лопастей. Дополнительный учет различия векторов скоростей в разных точках одной и той же лопасти не приведет к принципиальному изменению структуры принятой модели воздействия среды, а его вклад будет тем меньше, чем меньше размер лопасти по сравнению с размером тела.

При описании движения воспользуемся системой координат $Oxyz$, ось z которой совместим с осью динамической симметрии тела, а оси x и y направим так, чтобы центры давления O_j лежали на этих осях. Тогда для количества движения L , момента количества движения G относительно центра масс, векторов r_j и n_j имеем

$$L = lMV_x + mMV_y + nMV_z \quad (1.5)$$

$$G = lA\Omega_x + mA\Omega_y + nC\Omega_z \quad (1.6)$$

$$r_j = lr\cos\psi_j + mr\sin\psi_j \quad (1.7)$$

$$n_j = -l\cos\beta\sin\psi_j + m\cos\beta\cos\psi_j + n\sin\beta \quad (1.8)$$

Здесь M , A , C – масса, экваториальный и полярный моменты инерции тела, l , m , n – орты осей x , y , z , ψ_j – угол, принимающий значения $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \pi/2$, $\psi_3 = \pi$, $\psi_4 = -\pi/2$ и определяющий положение точки O_j , β – угол между нормалью n_j и плоскостью xOy , т.е. угол разворота j лопасти относительно соответствующей оси, V_x , V_y , V_z проекции вектора V скорости центра масс тела, Ω_x , Ω_y , Ω_z – соответствующие проекции угловой скорости Ω тела.

Ориентацию тела (а значит, и системы $Oxyz$) в пространстве определим при помощи углов φ , θ , γ . φ и θ – углы Крылова, характеризующие положение оси z симметрии тела в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\dot{\gamma}$ вокруг вертикали, проходящей через центр O масс тела.

Такая последовательность поворотов при переходе от невращающейся системы координат к системе $Oxyz$, связанной с телом, не приводит к появлению в выражениях внешних сил и моментов членов, модулированных углом собственного вращения. А это в свою очередь исключает возникновение периодических коэффициентов в уравнениях возмущенного движения, которые поэтому представляют собой стационарную систему.

Проекции угловой скорости Ω имеют вид

$$\Omega_x = \dot{\Theta} - \dot{\gamma} \sin \varphi, \quad \Omega_y = \dot{\gamma} \cos \varphi \sin \Theta + \dot{\phi} \cos \Theta$$

$$\Omega_z = \dot{\gamma} \cos \varphi \cos \Theta - \dot{\phi} \sin \Theta.$$

Для проекций скоростей V_j центров давления O_j согласно формуле (1.1) будем иметь

$$V_{xj} = V_x - r\Omega_z \sin \psi_j, \quad V_{yj} = V_y + r\Omega_z \cos \psi_j$$

$$V_{zj} = V_z + r(\Omega_x \sin \psi_j + \Omega_y \cos \psi_j)$$

Как видно из изложенного, речь идет о проектировании уравнений движения на оси, жестко связанные с телом. Это объясняется тем, что выражения для сил и моментов легче получить как функции проекций скоростей центров давления именно на связанные с телом оси. В дальнейшем, после получения линеаризованных уравнений, будет сделан переход к сопутствующей системе координат.

2. Установившееся движение. Рассмотрим движение, при котором центр масс тела снижается по вертикали, а само тело вращается вокруг вертикально ориентированной оси симметрии. Для проекций угловой Ω и линейной V скоростей тела и углов, определяющих ориентацию его оси симметрии, будем иметь

$$\Omega_x = \Omega_y = 0, \quad V_x = V_y = 0, \quad \varphi = \theta = 0 \quad (2.1)$$

В данном случае модули скоростей V_j центров давления O_j относительно среды и углы атаки α_j соответственно одинаковы между собой для всех лопастей и равны V_r и α . Для них имеют место кинематические соотношения

$$V_r = [V_z^2 + (r\Omega_z)^2]^{1/2}, \quad r\Omega_z = -V_r \sin(\alpha - \beta), \quad V_z = -V_r \cos(\alpha - \beta) \quad (2.2)$$

В результате подстановки в формулы (1.2)–(1.4) для векторов аэродинамических сил W_j , Y_j и их моментов M_j выражений (1.1), (1.7), (1.8) для V_j , r_j , p_j и преобразований при учете (2.1), (2.2) получим проекции сил и моментов суммарного воздействия среды

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = -2\rho c_x(\alpha)SV_r V_z [1 - k(\alpha) \operatorname{tg}(\alpha - \beta)]$$

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = -2r\rho c_x(\alpha)SV_r V_z [k(\alpha) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta)]$$

Если величина $\alpha = \alpha_0$ удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$k(\alpha_0) + \operatorname{tg}(\alpha_0 - \beta) = 0 \quad (2.3)$$

то момент M_z равен нулю. Если же, кроме того, вертикальная проекция $V_z = V_{z0}$, где V_{z0} – корень уравнения

$$Mg - 2\rho c_x(\alpha_0)SV_{z0}^2 / \cos^3(\alpha_0 - \beta) = 0 \quad (2.4)$$

то сумма всех внешних сил, приложенных к телу, тоже равна нулю. При этом углу атаки α_0 и скорости V_{z0} соответствуют постоянные значения угловой скорости Ω_{z0} тела и скорости V_{r0} центра давления:

$$r\Omega_{z0} = V_{z0} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \beta), \quad V_{r0} = [V_{z0}^2 + (r\Omega_{z0})^2]^{1/2}$$

Коль скоро сумма всех внешних сил и моментов равна нулю, вертикальное равномерное снижение тела со скоростью V_{z0} , вращающегося с угловой скоростью Ω_{z0} вокруг вертикальной оси симметрии, соответствует частному решению уравнений движения.

Отметим, что угол атаки α_0 в рассматриваемом установившемся падении удовлетворяет тому же трансцендентному уравнению, что и в случае перманентного вращения тела в потоке в аэродинамической трубе [1] вокруг оси симметрии, параллельной направлению потока. Следовательно, установившееся падение вращающегося тела в среде, описываемое соотношениями (2.1), (2.3), (2.4), можно поставить в соответствие авторотации в потоке тела с неподвижным центром масс. Относительное движение тела и среды в обоих случаях совпадают.

3. Устойчивость по отношению к возмущениям вертикальных составляющих линейной и угловой скоростей. Для анализа устойчивости установившегося движения (2.1), (2.3), (2.4) составим уравнения возмущенного движения. Для этого линеаризуем выражения внешних сил (1.2), (1.3), моментов (1.4), полных производных от количества движения (1.5) и момента количества движения (1.6). В результате получится совокупность уравнений, которая состоит из двух независимых между собой подсистем. Приращения $\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta \Omega_x, \Delta \Omega_y, \Delta \varphi, \Delta \theta$ удовлетворяют одной подсистеме. Другая состоит из двух уравнений относительно ΔV_z и $\Delta \Omega_z$

$$\begin{aligned} M\Delta \dot{V}_z &= -2\rho c_x S V_{r0} [\zeta(r\Delta \Omega_z + k\Delta V_z) + 2\Delta V_z(1+k^2)] \\ C\Delta \dot{\Omega}_z &= -2r\rho\eta c_x S V_{r0} (r\Delta \Omega_z + k\Delta V_z) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\xi = (c_x c'_x + c_y c'_y) / (c_x^2 + c_y^2)$$

$$\eta = 1 + k' \cos^2(\alpha - \beta), \quad \zeta = \xi - 2k$$

Здесь и далее $c_x, c_y, k, c'_x, c'_y, k'$, – значения функций $c_x(\alpha), c_y(\alpha), k(\alpha)$ и их производных по α в точке $\alpha = \alpha_0$.

Введем в системе (3.1) новую независимую переменную $\tau = 2c_x \rho S V_{r0} t / M$. Тогда характеристическое уравнение преобразованной системы (3.1) примет вид

$$\kappa^2 + \kappa(\delta + \eta/P) + 2\eta(1+k^2)/P = 0$$

$$\delta = 2 + k\xi, \quad P = C / (Mr^2)$$

Приращения скоростей ΔV_z и $\Delta \Omega_z$ стремятся к нулю, если

$$\eta > 0, \quad \delta + \eta/P > 0 \quad (3.2)$$

Сопоставим эти неравенства с условиями асимптотической устойчивости стационарного значения угловой скорости вращения тела вокруг неподвижной оси, параллельной потоку [1]. Видно, что первое неравенство (3.2) обеспечивает устойчивость стационарного вращения тела в потоке. Для асимптотической устойчивости установившегося падения со скоростями V_{z0}, Ω_{z0} необходимо выполнение еще одного условия – второго неравенства (3.2). В отличие от первого оно содержит не только аэродинамические характеристики, но и параметр P , характеризующий распределение масс тела. С уменьшением P условия (3.2) асимптотической устойчивости установившегося падения приближаются к первому условию асимптотической устойчивости (3.2) вращения тела в потоке с постоянной угловой скоростью.

Отметим свойство движения тела с лопастями в форме плоских пластинок [7, 8]. Типичное поведение функций $c_x(\alpha), c_y(\alpha)$ таково, что для углов атаки α , не превосходящих $\pi/6$, величина ξ остается положительной. Поэтому для устойчивости в этом диапазоне α_0 необходимо и достаточно выполнения первого условия (3.2). Второе неравенство (3.2) дополнительных ограничений не накладывает.

4. Устойчивость вертикальной ориентации оси симметрии тела и вектора скорости его центра масс в свободном падении. Чтобы упростить систему уравнений,

описывающих малые колебания оси симметрии тела и малые изменения направления вектора скорости центра масс, введем комплексные переменные λ , ω , u и перейдем к сопутствующей системе координат с помощью замены

$$\lambda = (\Delta\theta + i\Delta\varphi) \exp(-i\Omega_{z0}t), \quad \omega = (\Delta\Omega_x + i\Delta\Omega_y) \exp(-i\Omega_{z0}t)$$

$$u = (\Delta V_x + i\Delta V_y) \exp(-i\Omega_{z0}t)$$

В результате линеаризованные уравнения могут быть приведены к виду

$$\dot{\lambda} = \omega, \quad A\dot{\omega} - iC\Omega_{z0}\omega = r\rho c_x S V_{r0} (\zeta u - r\omega\delta)$$

$$M(\dot{u} - iV_{z0}\omega) = -i\lambda Mg + \rho c_x S V_{r0} [r\omega k\eta - u(1 + \eta - k \operatorname{tg} \alpha)]$$

Для минимизации размерности пространства параметров этой системы проведем нормализацию переменных. В качестве единицы новой независимой переменной выберем $T = A(r^2\rho c_x S V_{r0})^{-1}$. За единицу угловой скорости примем величину $1/T$, а за единицу приращения линейной скорости — $|V_{z0}|$. Видно, что величина T пропорциональна характерному времени для так называемого [9] быстрого изменения угловой скорости ω .

После преобразований уравнений движения при учете соотношений (2.3), (2.4) нормализованные переменные u и ω будут удовлетворять системе

$$\dot{\lambda} = \omega, \quad \dot{\omega} + \omega(\delta + ib_1) - uN\zeta \cos(\alpha_0 - \beta) / c_x = 0$$

$$\dot{u} + \varepsilon u(1 + \eta - k \operatorname{tg} \alpha) + \omega\{i - \eta\epsilon k c_x / [N \cos(\alpha_0 - \beta)]\} + 2i\epsilon\lambda / \cos^2(\alpha_0 - \beta) = 0 \quad (4.1)$$

$$b_1 = -kCN \cos(\alpha_0 - \beta) / (Ac_x)$$

Коэффициенты системы (4.1) формируются как функции аэродинамических параметров при $\alpha = \alpha_0$, а также зависят от трех величин: C/A , $\epsilon = A/(Mr^2)$, $N = A/(\rho r^3 S)$, содержащих массовые и геометрические характеристики тела.

Характеристическое уравнение системы (4.1) имеет вид

$$\mu^3 + (a_1 + ib_1)\mu^2 + (a_2 + ib_2)\mu + ib_3 = 0 \quad (4.2)$$

где

$$a_1 = \delta + \varepsilon(1 + \eta - k \operatorname{tg} \alpha), \quad a_2 = \varepsilon[\delta(1 + \eta - k \operatorname{tg} \alpha) - k\eta\epsilon\zeta]$$

$$b_2 = [\zeta - \epsilon k(1 + \eta - k \operatorname{tg} \alpha)]N \cos(\alpha_0 - \beta) / c_x, \quad b_3 = 2\epsilon N\zeta / [c_x \cos(\alpha_0 - \beta)]$$

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости рассматриваемого установившегося падения получим как условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения (4.2). Эти условия представляют собой ограничения на соответствующие определители из коэффициентов уравнения (4.2) и могут быть приведены к виду [2]

$$a_1 > 0 \quad b_2 b_3 > 0 \quad (4.3)$$

$$b_3(a_1 b_1 b_2^2 + a_1^2 a_2 b_2 - a_1^3 b_3 - b_2^3) > 0 \quad (4.4)$$

5. Анализ ограничений на коэффициенты характеристического уравнения. Характеристическое уравнение третьей степени всегда приводимо к виду (4.2), при котором свободный член чисто мнимый. В данной задаче это произошло вследствие перехода к сопутствующей системе координат. Условия устойчивости (4.3), (4.4) накладывают ограничения на пять действительных коэффициентов a_i, b_i . Из этих коэффициентов могут быть сформированы три функции от них такие, что ограничения (4.3), (4.4) будут допускать наглядную геометрическую интерпретацию.

Способ построения таких функций неоднозначен. На конкретный выбор влияет, с одной стороны, характер зависимости коэффициентов a_i, b_i от физических параметров задачи, с другой – диапазон возможного изменения этих параметров, а, следовательно, и коэффициентов a_i, b_i . Чтобы сделать выбор в данном случае, используем уже упоминавшееся предположение о геометрии лопастей.

Будем считать, что лопасти подобны плоским пластинкам, а их угол β разворота не равен нулю и не превосходит некоторого $\beta_* < \pi/2$. Значение β_* выбирается так, чтобы избежать неоднозначности решения трансцендентного уравнения (2.3). Эта неоднозначность связана с тем, что при значении β , близком к $\pi/2$, диапазон углов атаки α_0 – решений уравнения (2.3) – смещается в область $\pi/6 < \alpha_0 < \pi/2$, где аэродинамическое качество $k(\alpha)$ ведет себя как функция $-\text{tg}(\alpha - \pi/2) = \text{ctg}\alpha$ и уравнение (2.3) обращается в тождество [5]. Такое поведение $k(\alpha)$, судя по результатам экспериментов [7, 8], является типичным свойством аэродинамики плоских пластинок и объясняется, по-видимому, характером обтекания их при больших углах атаки.

При таком выборе β_* решение уравнения (2.3) обычно принадлежит интервалу монотонного роста функции $k(\alpha)$ и является единственным. Кроме того, как правило, на этом интервале величины ξ и $1 - \text{ktg}\alpha_0$ положительны. В результате не только выполняются условия (3.2), (3.3) асимптотической устойчивости стационарных значений Ω_{z0}, V_{z0} , но и остаются положительными коэффициенты a_1 и a_2 .

Таким образом, для выбранной геометрии лопастей удовлетворяется часть условий устойчивости и имеет место положительность коэффициента α_2 . Это позволяет сформировать из коэффициентов a_i, b_i три действительных, не имеющих особенностей, функции $X = b_2 / a_1 \sqrt{a_2}, Y = b_3 / a_2 \sqrt{a_2}, Z = -b_1 / \sqrt{a_2}$. Их значения будем откладывать по осям координат трехмерного пространства XYZ .

Характеристическое уравнение типа (4.2) возникает при исследовании механических систем, обладающих тремя степенями свободы и определенной симметрией. Поэтому область устойчивости (ОУ) в пространстве параметров X, Y, Z , связанных с коэффициентами уравнения (4.2), представляет собой своего рода универсальный геометрический образ и заслуживает отдельного описания.

Для простоты будем рассматривать полупространство $Z > 0$ (в частности, в нашей конкретной задаче $b_1 < 0$). В полупространстве $Z > 0$ неравенство $b_2 b_3 > 0$ оставляет для ОУ лишь две его четверти, в первой из которых $X > 0, Y > 0$, а во второй – $X < 0, Y < 0$. Условие (4.4) выполняется для точек этих четвертей, лежащих соответственно ниже и выше поверхности E , уравнение которой

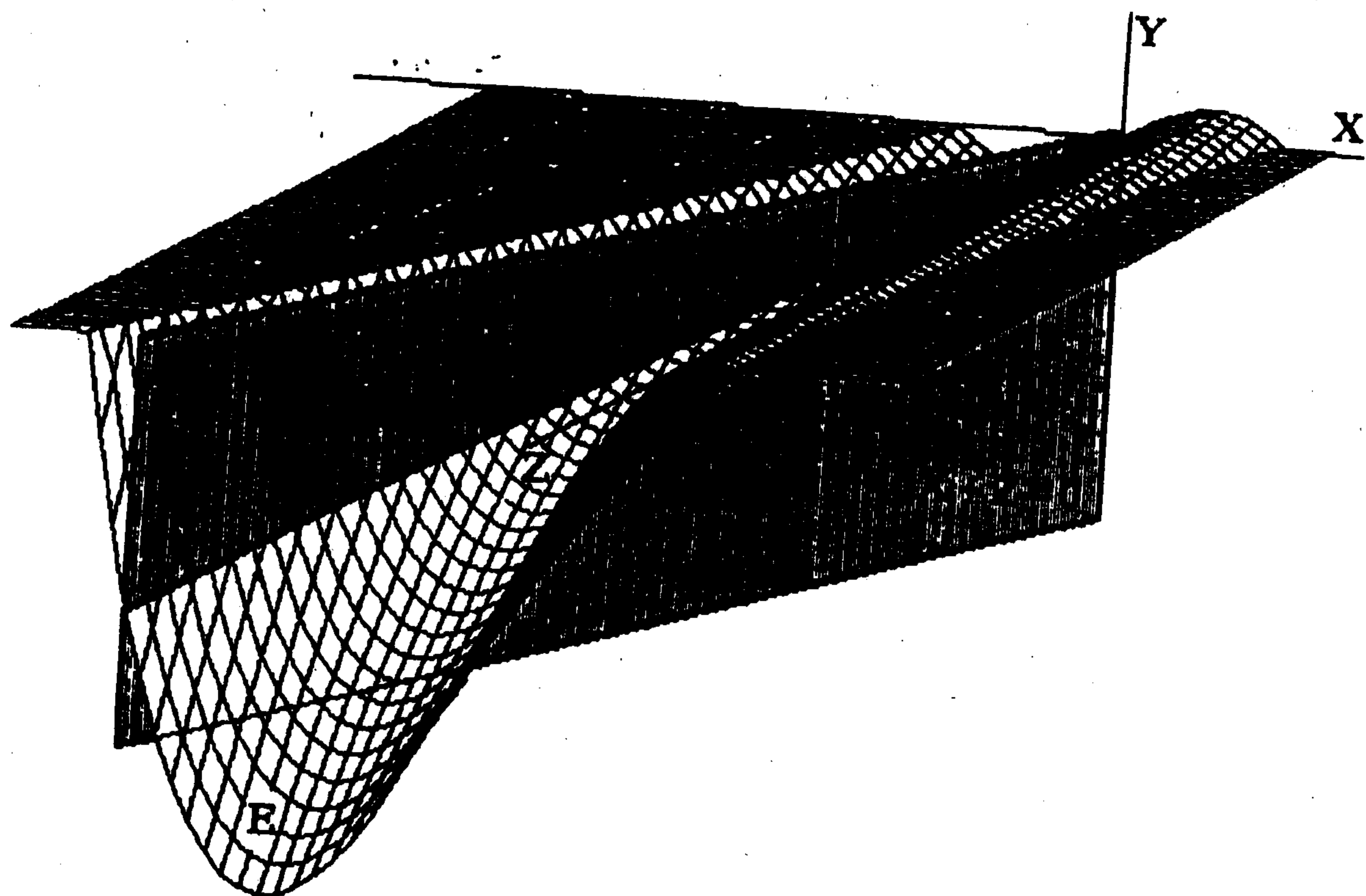
$$Y = X - ZX^2 - X^3 \quad (5.1)$$

Следовательно, ОУ в пространстве XYZ представляет собой непустое множество, заключенное между плоскостью XZ и поверхностью E при $Z \geq 0$.

Рассмотрим некоторые свойства поверхности E (фиг. 1). При всяком фиксированном Z величина Y – кубическая функция координаты X . Кубические параболы, по которым пересекается поверхность E с плоскостью $Z = 0$ и всеми плоскостями, параллельными $Z = 0$, пересекают ось X в точке $X = 0$ и двух других точках, соответствующих корням квадратного уравнения

$$1 - ZX - X^2 = 0 \quad (5.2)$$

Эти корни действительные и разных знаков, т.е. точки пересечения кубической параболы (5.1) с осью X расположены с разных сторон от начала координат. При $Z = 0$ корни по модулю равны единице. С ростом Z положительный корень стремится к нулю, а отрицательный – к величине $-Z$. Отсюда следует, что пересечение поверхности E с плоскостью $Y = 0$ происходит по оси Z и по гиперболе (5.2) на плоскости XZ . Асимптотами этой гиперболы являются ось Z и прямая $Z = -X$.



Фиг. 1

6. Сопоставление областей устойчивости установившегося падения и перманентного вращения. Область устойчивости перманентного вращения (ОУПВ) [1] была построена на плоскости k, ξ и часть ее границы проходит по прямой $\xi = 2k$. Часть границы области устойчивости установившегося падения (ОУУП) лежит на плоскости $Y = 0$. Видно, что эти соотношения эквивалентны. Таким образом, часть границ областей устойчивости обоих сравниваемых движений проходит по плоскости $Y = 0$. Однако ОУУП двухсвязная, т.е. часть ее лежит выше плоскости $Y = 0$ при $X > 0$, а часть – ниже при $X < 0$, тогда как ОУПВ односвязная и расположена ниже прямой $\xi = 2k$ на плоскости k, ξ или, что то же самое, ниже плоскости $Y = 0$ при $X < 0$. В этом состоит различие свойств устойчивости сравниваемых движений, ибо при $Y > 0$, т.е., при $\xi > 2k$, соответствующее перманентное вращение всегда неустойчиво. Эта неустойчивость вызвана тем, что неконсервативная позиционная сила (типа силы Магнуса) имеет дестабилизирующий характер. В свободном падении этот фактор можно полностью компенсировать при помощи перевязки степеней свободы вращательного и поступательного движений. Таким образом, в известном смысле, ОУУП оказывается шире, чем ОУПВ.

Кроме общего участка границы по плоскости $Y = 0$, ОУ обоих сравниваемых движений имеют соответственно два других, которые в общем случае не совпадают. Для перманентного вращения такой участок границы на плоскости k, ξ образует линия $\xi = 2k(1 - C/A)/(1 + k^2C/A)$ [1]. Это соотношение эквивалентно равенству $a_1b_1 = b_2$. В пространстве XYZ такое выражение равносильно уравнению вертикальной плоскости $X + Z = 0$ (см. фиг. 1) Для устойчивости перманентного вращения, в частности, необходимо чтобы $a_1b_1 - b_2 < 0$. Это означает, что ОУПВ лежит ниже плоскости $Y = 0$ при $X \leq 0$ и правее плоскости $X + Z = 0$, т.е., при $X > -Z$.

Видно, что плоскость $X + Z = 0$ пересекает поверхность E по прямой линии $X = Y, Z = -X$. Следовательно, плоскость $X + Z = 0$ разрезает часть ОУУП, лежащую ниже плоскости $Y = 0$, на два объема. Отсюда видно, что не только при $Y > 0$, но и при $Y < 0$ существует часть ОУУП, расположенная вне ОУПВ.

В то же время, часть ОУПВ, расположенная ниже поверхности E , находится вне ОУУП.

7. Параметрический анализ. Значения величин X, Y, Z определяют положение точки B с этими координатами относительно ОУ. Поэтому анализ зависимости X, Y, Z от параметров $N, \varepsilon, C/A$ может дать качественное представление о влиянии этих параметров на свойства устойчивости рассматриваемых установившихся движений.

Проследим за ролью параметра $N = A/(\rho r^3 S)$ – так называемого числа Ньютона. Видно, что абсолютные величины X, Y, Z прямо пропорциональны числу N . Таким образом, изменение N приводит к движению точки B в пространстве XYZ по лучу, проходящему через начало координат, направление которого совпадает с направлением вектора с проекциями $X/N, Y/N, Z/N$, не зависящего от N . Отсюда следует, что в зависимости от формы границы ОУ и направления введенного вектора, изменение N может оказывать двоякое влияние.

Например, если при некотором N соответствующая точка B находится в части ОУУП при $Y > 0$, то увеличение N всегда приведет к потере устойчивости. То же самое можно сказать для случая когда точка B принадлежит области ОУ при $Y < 0$ и $Z < -X$. Однако, если точка B принадлежит пересечению областей устойчивости, то увеличение N не приводит к ее потере.

Параметр $\varepsilon = A/(Mr^2)$ характеризует концентрацию массы тела относительно его "аэродинамического размера" r . Для малых значений ε влияние его изменения противоположно по сравнению с изменением N . Это связано с тем, что X, Y, Z обратно пропорциональны $\sqrt{\varepsilon}$.

При бесконечно малом ε или бесконечно большом N условие (4.4) устойчивости свободного падения эквивалентно соответствующему условию устойчивости перманентного вращения. В пространстве XYZ это, в частности, выражается в том, что с ростом Z пересечение областей устойчивости, лежащее в плоскости $Z = \text{const}$, расширяется и все меньше становятся части ОУУП, которые не принадлежат пересечению. Кроме того, если ε стремится к нулю в связи с ростом величины Mr^2 , то убывает и число $C/(Mr^2)$. В результате все условия устойчивости установившегося падения вырождаются в условия устойчивости перманентного вращения.

Таким образом, параметры ε и N могут служить мерой отличия между условиями устойчивости сравниваемых движений.

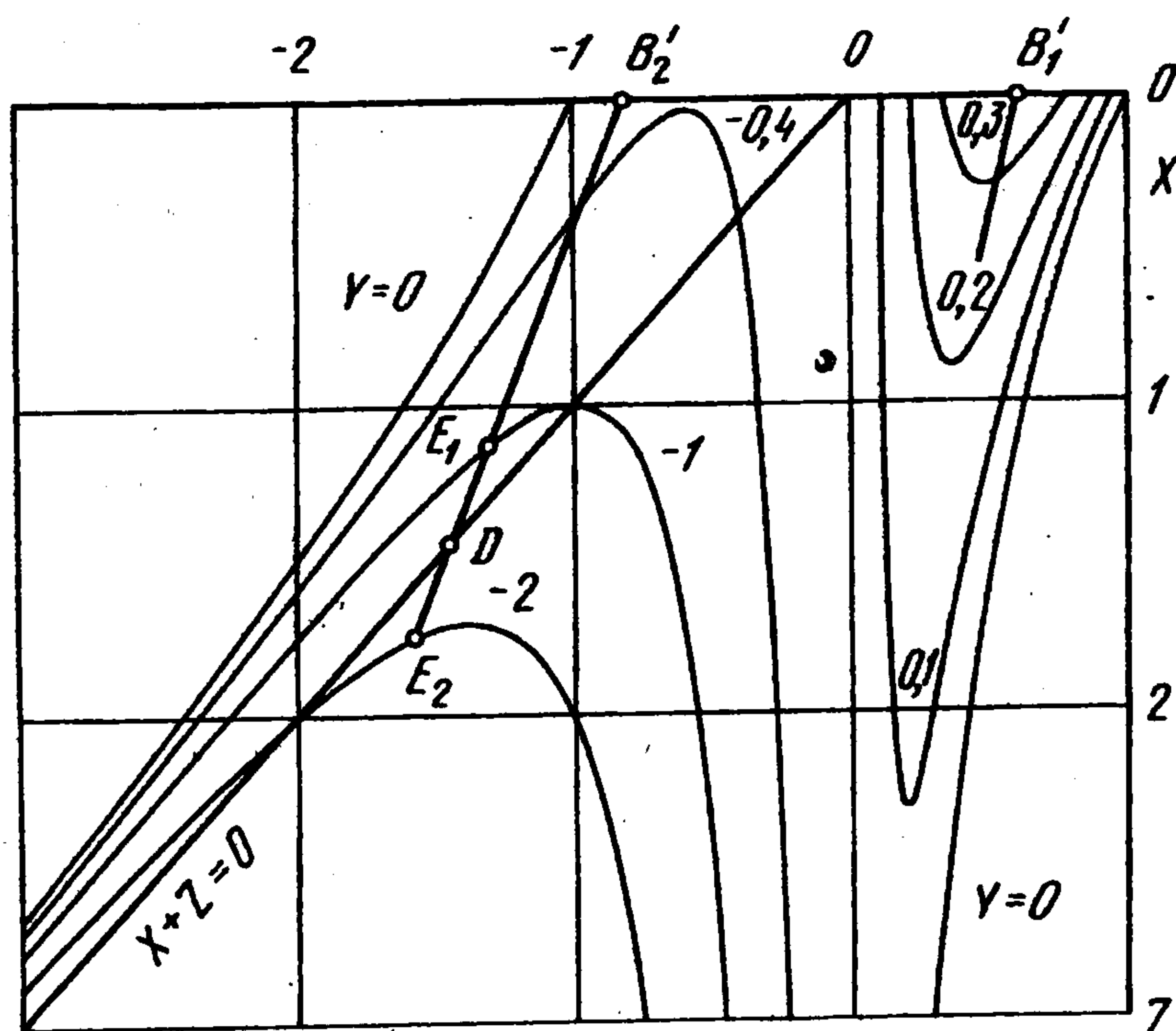
Рассмотрим влияние изменения отношения C/A моментов инерции на устойчивость установившегося падения при фиксированных значениях остальных параметров.

Величины X и Z – линейные функции отношения C/A , а величина Y от него не зависит. Поэтому при изменении C/A соответствующая точка B в пространстве XYZ перемещается по некоторой прямой в плоскости $Y = \text{const}$.

Описание этой прямой начнем с предельного случая $C/A = 0$.

Вследствие того, что при $C/A = 0$ координата Z обращается в нуль, а знаки X и Y совпадают, то начало B' прямой лежит в первой и третьей четвертях плоскости XU . От того, где находится начало B' , зависит расположение самой прямой относительно ОУ. Напомним (см. разд. 5), что в тех же четвертях находится сечение ОУУП плоскостью XU . Кроме того, параметр C/A может изменяться лишь от нуля до двух, поэтому перемещение точки B вдоль своей прямой ограничивается некоторым отрезком конечной длины. Длина и направление отрезка тоже влияют на свойства устойчивости. Наклон всех таких отрезков определяется производной

$$dZ / dX = -1 - \frac{\delta}{\varepsilon(1 + \eta - k \operatorname{tg} \alpha)}$$



Фиг. 2

Очевидно, что с ростом C/A значение Z растет, X — убывает, а угол между плоскостью $Z = 0$ и отрезками больше $\pi/4$ и не превосходит $\pi/2$. Учитывая свойства данного семейства отрезков, сопоставим их с семейством (фиг. 2) линий уровня $Y = \text{const}$, которые характеризуют рельеф поверхности E . Это позволит оценить влияние на устойчивость изменения параметра C/A .

Прежде всего рассмотрим случай, когда начало B'_1 отрезка находится в первой четверти плоскости XU (фиг. 2).

Пусть сначала B'_1 принадлежит OY . Из анализа рельефа поверх-

ности E при $X > 0, Y > 0$, ее линий уровня и наклона отрезков видно, что с ростом C/A соответствующая точка B , двигаясь от плоскости $Z = 0$, будет приближаться к поверхности E . Покинет она OY или весь ее путь закончится внутри OY , зависит от совокупности всех остальных параметров.

Теперь обсудим случай, когда начала отрезков по-прежнему находятся в первой четверти плоскости XU , но вне OY , т.е., выше граничной кривой $Y = X - X^3$. При этом характерной является точка локального максимума этой кривой с координатами $X = 1/\sqrt{3}, Y = 2/3\sqrt{3}$. Если, например, начало отрезка B'_1 лежит левее или выше этого максимума, т.е. координаты точки B'_1 удовлетворяют неравенствам $Y > 2/3\sqrt{3}$ или $X < 1/\sqrt{3}$, то при любых значениях C/A и всех остальных параметров отрезок будет вне OY . В противном случае, когда координаты начала отрезка удовлетворяют неравенствам $X > 1/\sqrt{3}, Y < 2/3\sqrt{3}$, при увеличении C/A могут возникнуть разные варианты. Возможен предыдущий случай отсутствия устойчивости. Но возможно и появление устойчивости, и ее сохранение до максимального значения C/A или последующая ее потеря при некотором $C/A < 2$. Чтобы внести здесь определенность, необходимы численные расчеты с учетом всех остальных параметров.

Таким образом, если начало отрезка лежит в первой четверти плоскости XU , то изменение отношения C/A может влиять на свойства устойчивости всеми возможными способами.

Иная ситуация в случае, когда начала отрезков лежат в третьей четверти плоскости XU . Известно [1], что увеличение отношения C/A от нулевого значения всегда приводит к устойчивости соответствующего перманентного вращения. Это означает, что соответствующий отрезок прямой, начавшись из точки B'_2 на плоскости $Z = 0$, всегда пересечет плоскость $X + Z = 0$ в точке D (фиг. 2).

Можно различить здесь следующие возможности.

Если начало отрезка точка B'_2 лежит в $OYU\Pi$, то он весь принадлежит этой области, а часть его будет находиться в пересечении областей устойчивости сравниваемых движений.

Можно выбрать значение координаты Y точки B'_2 начала отрезка вне областей устойчивости такие, что увеличение C/A от нуля до некоторого значения приведет к устойчивости установившегося падения, т.е. точка B пересечет поверхность E в точке E_1 . И только после прохождения плоскости $X + Z = 0$ в результате дальнейшего увеличения C/A точка попадет опять в пересечение областей устойчивости.

Таким образом, в двух предыдущих случаях увеличение отношения C/A приводит к обеспечению устойчивости, причем для устойчивости перманентного вращения требуется такое большое значение C/A , при котором заведомо устойчиво установившееся падение.

Возможна и противоположная ситуация. При определенном выборе координаты Y точки B'_2 вне ОУ путем увеличения C/A можно обеспечить устойчивость перманентного вращения, т.е. достичь плоскости $X + Z = 0$ в точке D . Удастся ли обеспечить устойчивость установившегося падения при дальнейшем увеличении C/A , т.е. достичь точки E_2 , зависит от рельефа поверхности E в направлении отрезка и значений всех остальных параметров.

8. Эволюция свойств устойчивости при изменении угла β разворота лопастей. Устойчивость установившегося падения (2.1)–(2.4) зависит не только от массовых и геометрических характеристик, которые формируют параметры ϵ , N , C/A , но и от установочного угла β лопасти. Последний, согласно (2.3), определяет величину α_0 установившегося значения угла атаки и через функции c_x , c_y входит в величины X , Y , Z .

Здесь применим прием, подобный использованному в [1]. Будем рассматривать зависимости $X(\beta)$, $Y(\beta)$, $Z(\beta)$ как параметрическое задание некоторой кривой Σ в пространстве XYZ . При монотонном изменении угла β (соответственно и α_0) изображающая точка B пройдет по кривой Σ . Ее расположение относительно ОУ даст информацию о возможном поведении тела.

Так как при $\beta = 0$ и $\alpha_0 = 0$ значения $X = Y = Z = 0$, то начало кривой Σ совпадает с началом координат. С ростом β и, согласно уравнению (2.3), α_0 координаты X , Y , Z могут стать положительными величинами. Например, при малых значениях α_0 для аэродинамических характеристик плоской круглой шайбы [7] $\xi > 2k$, что обеспечивает выполнение неравенств $X > 0$, $Y > 0$, $Z > 0$.

В связи с тем, что при $X > 0$, $Y > 0$ перманентное вращение неустойчиво, а часть ОУУП тем не менее расположена в этой части пространства XYZ , привлекает внимание вопрос о возможности прохождения линии Σ через эту зону. Иными словами, речь идет об удовлетворении условий устойчивости установившегося падения для малых значений α_0 при $\xi > 2k$. Считая, что условия $b_2 > 0$, $b_3 > 0$, $X > 0$, $Y > 0$ выполняются, перейдем к пределу в неравенстве (4.4) при $\alpha_0 \rightarrow 0$. Получим условие $a_2 b_2 > a_1 b_3$. Оно эквивалентно тому, что наклон кривой Σ в начале координат меньше соответствующего наклона поверхности E и по крайней мере начальный участок линии Σ проходит в ОУ при $X > 0$, $Y > 0$. Подставляя в получившееся условие выражения (4.3) для a_i , b_i , можно показать, что оно всегда выполняется, если $\epsilon < [k'(0) - 2]/[k'(0) + 2]$. Отсюда видно, что соответствующим подбором ϵ можно удовлетворить этому неравенству.

Для многих видов плоских пластинок [7, 8] производная $k'(\alpha)$ при $\alpha_0 = 0$ много больше единицы. В этом случае ϵ не должно превышать некоторой величины, близкой к единице. Это требование вполне может быть удовлетворено.

Таким образом, на интервале углов атаки α_0 , примыкающих к $\alpha_0 = 0$, возможна асимптотическая устойчивость установившегося падения, в то время как соответствующее перманентное вращение всегда неустойчиво.

Не будем ограничиваться локальными свойствами линии Σ . С ростом β и соответственно α_0 разность $\xi - 2k$ начнет убывать. Это приведет к уменьшению X и Y . В результате точка B при некотором $\alpha_0 = \alpha_*$ покинет ОУ при $X > 0$, $Y > 0$, а затем достигнет плоскости $X = 0$ при положительном Y . При дальнейшем росте β и α_0 величина $\xi - 2k$ обратится в нуль, т.е. обратится в нуль величина Y . Кривая Σ пересечет плоскость $Y = 0$. Сумма $X + Z$ в этой точке пересечения всегда, по принятым условиям, положительна. Таким образом, кривая Σ пересекает плоскость $Y = 0$ между прямыми $X = 0$ и $X + Z = 0$, лежащими на плоскости $Y = 0$. Так как здесь

расположен общий участок границ ОУ обоих сравниваемых движений, то непосредственно после его перехода точки кривой Σ принадлежат пересечению областей устойчивости при $X < 0, Y < 0$ и наступает асимптотическая устойчивость установившегося падения и перманентного вращения при одном и том же β и α_0 .

По поводу дальнейшего изменения свойств движения заметим следующее. Известно [1], что при $C/A < 1$ с ростом α_0 при некотором $\alpha_0 = \alpha_{**}$ происходит потеря устойчивости перманентного вращения. В пространстве XYZ кривая Σ пересекает границу ОУПВ – плоскость $X + Z = 0$. Расположение этой точки пересечения относительно поверхности E дает ответ на вопрос об устойчивости соответствующего падения. Вычтем ординату Y точки пересечения кривой Σ с плоскостью $X + Z = 0$ из соответствующей ординаты точки на прямой $X + Z = 0, X = Y$, по которой пересекается поверхность E с плоскостью $X + Z = 0$. Очевидно, от знака этой разности зависит, будет ли принадлежать ОУУП точка пересечения кривой Σ и плоскости $X + Z = 0$. Можно показать, что знак этой разности совпадает со знаком величины

$$2(k' - k^2 - k \operatorname{tg} \alpha_0) - \xi k(1 + 2k^2 + k \operatorname{tg} \alpha_0)$$

Видно, что эта величина заведомо отрицательна, если $k'(\alpha_{**}) \leq 0$. В этом случае рассматриваемая точка кривой Σ лежит ниже поверхности E , т.е. вне области устойчивости установившегося падения. Иными словами, точка B с ростом β и α_0 сначала пересекает поверхность E и лишь после того достигает плоскости $X + Z = 0$.

Более того, как показывают вычисления для лопастей в виде плоских пластинок, рассматриваемая разность строго отрицательна на всем диапазоне углов α_0 атаки от $\alpha_0 = \alpha_*$ до $\alpha_0 = \alpha_{**}$, т.е. от точки пересечения кривой Σ с плоскостью $Y = 0$ до пересечения с плоскостью $X + Z = 0$.

Таким образом, потере устойчивости перманентного вращения предшествует потеря устойчивости соответствующего установившегося падения.

В то же время при относительно низком аэродинамическом качестве лопастей и достаточно малых значениях C/A начальный участок кривой Σ может оказаться в ОУУП при $X < 0$ и $Y < 0$, но вне ОУПВ.

9. Типы поведения тела при потере устойчивости установившегося падения. Характер потери устойчивости при переходе через разные участки границы ОУ различен. Пусть параметры системы таковы, что соответствующая точка B в пространстве XYZ лежит вблизи участка границы на плоскости $Y = 0$ вне ОУ, т.е. при $XU < 0$. Пренебрегая величинами второго и более высокого порядка малости, для малого по модулю корня μ характеристического уравнения (4.2) будем иметь

$$\mu = -b_3(b_2 + ia_2) / \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

Если точка B находится вблизи общего участка границы ОУПВ и ОУУП, т.е. при $X < 0$, то потеря устойчивости обоих движений происходит в результате развития медленной обратной прецессии. Характер потери устойчивости у обоих движений совпадает.

Если точка B лежит вне ОУУП при $X > 0$ и $Y < 0$, то происходит развитие прямой медленной прецессии.

Другой тип движения имеет место, если точка B лежит на участке поверхности E , который служит границей ОУУП. Характеристическое уравнение (4.2) в этом случае имеет один чисто мнимый корень $\mu = -ib_2/a_1$. Два других корня вследствие выполнения условий $a_1 > 0, b_2b_3 > 0$ имеют отрицательные действительные части. Потеря устойчивости происходит в результате развития быстрой прецессии тела, подобно

тому, как нарушается устойчивость перманентного вращения, но ее угловая скорость в общем случае не совпадает с угловой скоростью эйлеровой прецессии.

Если рассматривать участок поверхности E при $X > 0, Y > 0$, то знак угловой скорости прецессии тела в свободном падении противоположен знаку эйлеровой прецессии.

В окрестности другого участка поверхности E при $X < 0, Y < 0$ знак угловой скорости быстрой прецессии тела совпадает со знаком эйлеровой прецессии. Если же, кроме того, устремить к нулю параметр ϵ , то будут близки и их абсолютные величины. Это еще одна иллюстрация свойства параметра ϵ как меры близости обоих сравниваемых движений.

Таким образом, сопоставление условий устойчивости двух в определенном смысле "аэродинамически подобных" режимов движения тела позволило установить ряд полезных свойств. Во-первых, определены некоторые общие черты поведения тела вплоть до совпадения части границ областей устойчивости. Во-вторых, указаны различия в поведении и выявлены параметры, которые могут служить мерой этих различий. Такая информация может быть полезна при интерпретации результатов экспериментов с макетами летательных аппаратов в аэродинамических трубах и перенесении их на прогнозируемое свободное движение летательного аппарата.

Существенную роль в проведенном исследовании сыграл универсальный геометрический образ – ОУ линейной механической систем с тремя степенями свободы, обладающей определенной симметрией, в пространстве параметров ее характеристического уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов В.А., Самсонов В.А. Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды // Изв. АН СССР, МТТ. 1990. № 2. С. 32–38.
2. Чеботарев Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1949. Т. 26. С. 1–332.
3. Федяевский К.К., Блюмина Л.Х. Гидродинамика отрывного обтекания тел. М.: Машиностроение, 1977. 120 с.
4. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
5. Зенкин А.Н., Привалов В.А., Самсонов В.А. О квазистатической модели воздействия среды на авторотирующее тело // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 73–78.
6. Hess F. The aerodynamics of boomerang // Scient. Amer. 1968. V. 219. № 5. P. 124–136.
7. Flachsbarth O. Messungen an ebenen und gewölbten Platten // Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen // Hrsg. von L. Prandtl und A. Betz. München; Berlin: 1932. Bd. 4. S. 96–100.
8. Табачников В.Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1621. С. 79–93.
9. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1991. 189 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.11.1993