

УДК 62-50

© 1994 г. А.М. Тарасьев

АПРОКСИМАЦИОННЫЕ СХЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ МИНИМАКСНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА – ЯКОБИ

Предлагается сеточный алгоритм построения функции (в общем случае недифференцируемой) оптимального гарантированного результата в задачах управления. В точках дифференцируемости эта функция удовлетворяет уравнению Айзекса – Беллмана – уравнению в частных производных первого порядка типа Гамильтона – Якоби. Предлагается метод конечных разностей для уравнения Гамильтона – Якоби, обладающий свойством сходимости. В отличие от классического сеточного метода, в котором аппроксимируются несуществующие, вообще говоря, градиенты искомой функции, здесь необходимо вычислять субдифференциалы локально выпуклых оболочек. Основой этого метода является понятие обобщенного минимаксного (вязкостного) решения уравнения Гамильтона – Якоби [1–4] и соответствующие инфинитезимальные конструкции: производные по направлениям и субдифференциалы, заменяющие классическую производную.

Проблема определения обобщенного решения уравнения Гамильтона – Якоби и численного построения этого решения привлекала внимание многих авторов в начале 60-х годов [5–10]. В связи с построением в начале 80-х годов общей теории обобщенного решения [1–4] возобновился интерес к вычислительным методам. Рассматривались [4, 11–13] различные аппроксимационные операторы (АО) в рамках теории вязкостных решений [3]. Была предложена [4, 13] общая схема доказательства сходимости аппроксимационных схем (АС) и получены оценки сходимости. Кроме того, рассматривались [4] явные схемы с АО типа Лакса – Фридрихса, подробно изучалась [13] неявная АС. Исследовались [12] "по существу неосциллирующие" АС с операторами типа Годунова и Лакса – Фридрихса, в которых использовались локальные аппроксимации, имеющие порядок выше первого, соответствующего кусочно-линейной аппроксимации. Рассматривались [11] операторы типа "maxmin", "minmax" в рамках схемы Годунова; указывались случаи, когда эти соотношения дают точную формулу для вязкостного решения в задаче Римана.

Предлагаемые ниже АО отличаются от упомянутых алгоритмов. Они получены в рамках теории оптимального гарантированного управления (дифференциальных игр), разрабатываемой в научной школе Н.Н. Красовского, и базируются на результатах работ [14–19]. В основе АО лежат понятия выпуклого и негладкого анализа [20–22]: локально выпуклые оболочки аппроксимируемой функции и их субдифференциалы. Для построения АО можно использовать двойственные конструкции: супердифференциалы локально вогнутых оболочек. Эти понятия естественным образом связаны с конструкциями субдифференциалов и супердифференциалов В.Ф. Демьянова [20], при помощи которых получен универсальный АО.

Ниже показано, что рассматриваемые АО удовлетворяют набору условий из [13], обеспечивающих сходимость соответствующих АС. Основное отличие этих АО от АО из работ [4, 11–13] в том, что они могут быть определены не только на элементарном "ромбе" фазового пространства. Поэтому они не связывают жестко шаги аппроксимации по времени с шагами аппроксимации в фазовом пространстве. Далее будет проведено сравнение предлагаемых АО и АО из работ [4, 11–13].

1. Функция оптимального гарантированного результата. Рассматривается управляемая система, динамика которой на отрезке времени $T = [t_0, \vartheta]$ описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v) = h(t, x) + B(t, x)u + C(t, x)v \quad (1.1)$$

$$x \in R^n, \quad u \in P \subset R^p, \quad v \in Q \subset R^q$$

Здесь x – n -мерный фазовый вектор системы, u – управляющее воздействие, v – вектор помехи. Множества P и Q – выпуклые компакты. Для правой части $f(t, x, u, v)$ системы (1.1) выполнены следующие условия.

(f1) Условие непрерывности по совокупности переменных.

(f2) Условие Липшица по переменной x :

$$\|f(t, x_1, u, v) - f(t, x_2, u, v)\| \leq L_1(D) \|x_1 - x_2\|$$

при всех $(t, x_1) \in D, (t, x_2) \in D, u \in P, v \in Q$.

(f3) Условие продолжимости решений: существует постоянная $k > 0$, такая, что

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq k(1 + \|x\|)$$

при всех $(t, x, u, v) \in T \times R^n \times P \times Q$.

(f4) Условие Липшица по переменной t :

$$\|f(t_1, x, u, v) - f(t_2, x, u, v)\| \leq L_2(D) \|t_1 - t_2\|$$

при всех $(t_1, x) \in D, (t_2, x) \in D, u \in P, v \in Q$.

Здесь множество D – компакт, $D \subset T \times R^n$.

Ставится задача управления – гарантированно минимизировать функционал

$$\gamma((x(\bullet))) = \sigma(x(\vartheta)) \quad (1.2)$$

на траекториях $x(\bullet)$ системы (1.1), т.е. необходимо найти такой позиционный способ управления $U^\circ = U^\circ(t, x)$, который реализует внешний минимум в соотношении

$$w(t_*, x_*) = \min_U \max_{x(\bullet) \in X(t_*, x_*, U)} \sigma(x(\vartheta)) \quad (1.3)$$

и соответственно определить значение $w(t_*, x_*)$, которое называется оптимальным гарантированным результатом. Здесь $X(t_*, x_*, U)$ – множество траекторий системы (1.1), выходящих из начальной позиции (t_*, x_*) и отвечающих позиционному управлению $U = U(t, x)$ [15].

Предполагается, что функция $\sigma: R^n \rightarrow R$ из функционала (1.2) удовлетворяет условию Липшица:

$$|\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| \leq L_3(D) \|x_1 - x_2\|$$

при всех $x_1 \in D, x_2 \in D$. Здесь множество D – компакт, $D \subset R^n$.

Функция, ставящая в соответствие каждой позиции $(t_*, x_*) \in T \times R^n$ оптимальный гарантированный результат $w(t_*, x_*)$, называется функцией оптимального гарантированного результата или функцией цены.

Известно, что функция цены $w(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, является почти всюду дифференцируемой функцией, которая в точках дифференцируемости удовлетворяет уравнению Айзекса – Беллмана – уравнению типа Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial w}{\partial t} + H(t, x, \frac{\partial w}{\partial x}) = 0 \quad (1.4)$$

и для которой выполнено краевое условие

$$w(\vartheta, x) = \sigma(x) \quad (1.5)$$

Здесь

$$H(t, x, s) = \langle s, h(t, x) \rangle + \min_{u \in P} \langle s, B(t, x)u \rangle + \max_{v \in Q} \langle s, C(t, x)v \rangle \quad (1.6)$$

– гамильтониан управляемой системы (1.1).

Корректное определение решения задачи (1.4), (1.5) и соответствующие теоремы существования и единственности получены в рамках теории минимаксных (вязко-стных) решений уравнения Гамильтона – Якоби [1–4, 16]. Приведем одно из этих определений [16].

Определение 1. Функция $w(t, x)$, удовлетворяющая условию Липшица, называется минимаксным решением задачи (1.4), (1.5), если при всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta) \times R^n$ выполнены неравенства

$$\inf_{s \in R^n} \sup_{h \in R^n} (\langle s, h \rangle - \partial_- w(t, x)|(1, h) - H(t, x, s)) \geq 0 \quad (1.7)$$

$$\sup_{s \in R^n} \inf_{h \in R^n} (\langle s, h \rangle - \partial_+ w(t, x)|(1, h) - H(t, x, s)) \leq 0 \quad (1.8)$$

и краевое условие $w(\vartheta, x) = \sigma(x)$, $x \in R^n$.

Здесь

$$\partial_- w(t, x)|(1, h) = \liminf_{\delta \downarrow 0} \delta^{-1} (w(t + \delta, x + \delta h) - w(t, x))$$

$$\partial_+ w(t, x)|(1, h) = \limsup_{\delta \downarrow 0} \delta^{-1} (w(t + \delta, x + \delta h) - w(t, x))$$

– соответственно нижняя и верхняя производные функции w в точке (t, x) по направлению $(1, h)$.

Неравенства (1.7), (1.8) в точках дифференцируемости функции переходят в уравнение Гамильтона – Якоби (1.4), и следовательно, их можно рассматривать как обобщение этого уравнения. Предлагаемая ниже конечно-разностная схема для уравнения Гамильтона – Якоби сходится и в пределе дает функцию цены, т.е. такую функцию, которая удовлетворяет неравенствам (1.7), (1.8).

Уравнение (1.4) будем рассматривать в некоторой компактной области $G_r \subset T \times R^n$, $r > 0$, которую определим следующим образом.

Пусть $X(t_*, x_*)$ – множество всех решений $x(t)$ дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [t_*, \vartheta], \quad x(t_*) = x_* \quad (1.9)$$

где $F(\tau, y) = \text{co}\{f \in R^n: f = f(\tau, y, u, v), u \in P, v \in Q\}$, $(\tau, y) \in T \times R^n$ выпуклая оболочка правой части системы (1.1).

Пусть G – замкнутое множество, удовлетворяющее условию сильной инвариантности:

(G1) Если $(t_*, x_*) \in G$, то $(t, x(t)) \in G$ при всех $x(t) \in X(t_*, x_*)$, $t \in [t_*, \vartheta]$.

В силу условия (f3) такие компактные области G существуют.

Пусть

$$K = \max_{(t, x, u, v) \in G \times P \times Q} \|f(t, x, u, v)\|$$

– максимальная скорость системы (1.1) в области G .

Видно, что

$$K \leq \max_{(t,x) \in G} \kappa(1+\|x\|)$$

Полагаем, что число r , определяющее область G_r , удовлетворяет неравенству $r > K$. Отметим, что при любом $(t, x) \in G$ выполняется вложение $F(t, x) \subset B_r$ (B_r — шар $\{b \in R^n: \|b\| \leq r\}$).

Определим область G_r двумя условиями.

(G2) Справедливо вложение $G_r \subset G$.

(G3) Если $(t_*, x_*) \in G_r$, то $(t, x_* + (t - t_*)B_r) \subset G_r$ при всех $t \in [t_*, \vartheta]$.

Из условий (f1)–(f4) и соотношения (1.6) следует, что для гамильтониана $H(t, x, s): G_r \times R^n \rightarrow R$ выполнены следующие условия.

(H1) Условие равномерной непрерывности по совокупности переменных.

(H2) Условие Липшица по переменной x :

$$|H(t, x_1, s) - H(t, x_2, s)| \leq L_1(G_r) \|s\| \|x_1 - x_2\|$$

при всех $(t, x_1) \in G_r, (t, x_2) \in G_r, s \in R^n$.

(H3) Условие Липшица по переменной s :

$$|H(t, x, s_1) - H(t, x, s_2)| \leq K \|s_1 - s_2\| < r \|s_1 - s_2\|$$

при всех $(t, x) \in G_r, s_1 \in R^n, s_2 \in R^n$.

(H4) Условие Липшица по переменной t :

$$|H(t_1, x, s) - H(t_2, x, s)| \leq L_2(G_r) \|s\| \|t_1 - t_2\|$$

при всех $(t_1, x) \in G_r, (t_2, x) \in G_r, s \in R^n$.

(H5) Условие положительной однородности по переменной s :

$$H(t, x, \lambda s) = \lambda H(t, x, s) \text{ при всех } (t, x, s) \in G_r \times R^n, \lambda \geq 0$$

2. Аппроксимационный оператор для уравнения Гамильтона – Якоби. Пусть $t \in T, t + \Delta \in T, t < \vartheta, \Delta > 0, (t, x) \in G_r$. Полагаем, что в момент времени $t + \Delta$ задана функция $u(\bullet)$, удовлетворяющая условию Липшица в области $D_{t+\Delta} = \{x \in R^n: (t + \Delta, x) \in G_r, t + \Delta \in T\}$ с константой $L = L(D_{t+\Delta})$. Эта функция в дальнейших конструкциях играет роль аппроксимации решения $w(t + \Delta, \bullet)$. Определим оператор $u \rightarrow F(t, \Delta, u)$, аппроксимирующий уравнение Гамильтона – Якоби в окрестности точки $(t, x) \in G_r$, формулой, которую можно интерпретировать как обобщение формулы Хопфа [9, 11] или формулу программного максимина [15, 17] на локально выпуклых оболочках

$$v(x) = F(t, \Delta, u)(x) = f(x) + \sup_{y \in O(x, r\Delta)} \max_{s \in Df(y)} \{\Delta H(t, x, s) + f(y) - f(x) - \langle s, y - x \rangle\} \quad (2.1)$$

Здесь функция $v: D_t \rightarrow R$ рассматривается как аппроксимация решения $w(t, \bullet)$ в области $D_t = \{s \in R^n: (t, x) \in G_r, t \in T\}$.

Множество $O(x, r\Delta)$ есть окрестность точки x радиуса $r\Delta, r > K, \Delta > 0, (t, x) \in G_r$, т.е.

$$O(x, r\Delta) = \{y \in R^n: \|y - x\| < r\Delta\}$$

Функция $f(y): \bar{O}(x, r\Delta) \rightarrow R$ – локально выпуклая оболочка функции $u(y)$ в замкнутой окрестности $\bar{O}(x, r\Delta)$ точки x радиуса $r\Delta$

$$f(y) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k u(y_k) : y_k \in \bar{O}(x, r\Delta), \alpha_k \geq 0, k = 1, \dots, n+1 \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k y_k = y, \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1 \right\}, \quad y \in \bar{O}(x, r\Delta) \quad (2.2)$$

$$\bar{O}(x, r\Delta) = \{y \in R^n : \|y - x\| \leq r\Delta\}$$

Множество $Df(y)$ – субдифференциал [21, 22] выпуклой функции f в точке y , $y \in O(x, r\Delta)$

$$Df(y) = \{s \in R^n : f(z) - f(y) \geq \langle s, z - y \rangle, z \in \bar{O}(x, r\Delta)\} \quad (2.3)$$

Заметим, что в формуле (2.1) выполняется неравенство

$$f(y) - f(x) - \langle s, y - x \rangle \leq 0, \quad y \in O(x, r\Delta), \quad s \in Df(y)$$

Рассмотрим свойства локально выпуклых оболочек и субдифференциалов¹.

Лемма 1. Справедливы следующие утверждения.

1°. Для функции $f: \bar{O}(x, r\Delta) \rightarrow R$ выполняется оценка

$$|f(z) - f(y)| \leq L \left(1 + \frac{r\Delta + \|y - x\|}{r\Delta - \|y - x\|} \right) \|z - y\|$$

при всех $z \in \bar{O}(x, r\Delta)$, $y \in O(x, r\Delta)$. В частности, при $y = x$ верно неравенство

$$|f(z) - f(x)| \leq 2L\|z - x\|$$

при всех $z \in \bar{O}(x, r\Delta)$.

2°. Функция $f: \bar{O}(x, K\Delta) \rightarrow R$, $K < r$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L(1 + (r + K)/(r - K))$.

3°. Для любого субградиента $s \in Df(y)$, $y \in O(x, r\Delta)$ справедлива оценка

$$\|s\| \leq L \left(1 + \frac{r\Delta + \|y - x\|}{r\Delta - \|y - x\|} \right)$$

В частности,

$$\|s\| \leq 2L, \quad s \in Df(x)$$

$$\|s\| \leq L \left(1 + \frac{r+K}{r-K} \right), \quad s \in Df(y), \quad y \in \bar{O}(x, K\Delta)$$

Рассмотрим пример, показывающий, что условие $r > K$ существенно. Пусть $u = u(y) = -|y_2|$, $y = (y_1, y_2) \in R^2$, $x = (0, 0)$, $\Delta = 1$, $r = K = 1$, т.е. $\bar{O}(x, r\Delta) = \bar{O}(x, K\Delta) = \{y \in R^2 : (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \leq 1\}$. Видно, что $f(y) = -(1 - y_1^2)^{1/2}$, и, следовательно,

¹Доказательства всех приводимых ниже утверждений см. Тарасьев А.М. Аппроксимационные схемы построения решений основного уравнения теории управления и дифференциальных игр. Екатеринбург. 1992. 72 с. – Деп. в ВИНТИ 31.07.92. № 2543-В92.

$\partial f / \partial y_1 = y_1(1-y_1^2)^{-1/2}$. Частная производная $\partial f / \partial y_1$ неограниченно возрастает по модулю при $|y_1| \rightarrow 1$. Следовательно, функция $f(y) = -(1-y_1^2)^{1/2}$ не удовлетворяет условию Липшица в окрестности $\bar{O}(x, K\Delta)$.

Лемма 2. Пусть функция $\xi(y): \bar{O}(x, r\Delta) \rightarrow R$ является выпуклой, удовлетворяет условию Липшица и выполняется условие

$$\xi(y) > \xi(y_0), \quad y \in \bar{O}(x, K\Delta) \setminus \{y_0\}, \quad y_0 \in \partial \bar{O}(x, K\Delta)$$

$$\partial \bar{O}(x, K\Delta) = \{y \in \bar{O}(x, K\Delta): \|y - x\| = K\Delta\}, \quad r > K$$

Тогда существуют последовательность $\{y_m\}$, $y_m \in O(x, K\Delta)$, $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = y_0$, последовательность $\{l_m\}$, $l_m \in D\xi(y_m)$ и вектор $l_0 \in D\xi(y_0) \subset R^n$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = l_0$, такие, что при всех $y \in \bar{O}(x, K\Delta)$ выполняются неравенства

$$\xi(y) - \xi(y_0) \geq \langle l_0, y - y_0 \rangle \geq 0$$

Пользуясь леммами 1 и 2, можно доказать следующие свойства оператора F .

Свойство 1. Значение $v(x) = F(t, \Delta, u)(x)$ определено корректно для всех функций $u: R^n \rightarrow R$, удовлетворяющих условию Липшица, $(t, x) \in G_r$, $t \in T$, $\Delta > 0$, $t + \Delta \in T$. При этом справедливы оценки

$$\min_{y \in O(x, r\Delta)} u(y) - 2LK\Delta \leq F(t, \Delta, u)(x) \leq \max_{y \in O(x, K\Delta)} u(y)$$

Свойство 2. Для оператора F справедливы равенства

$$\begin{aligned} F(t, \Delta, u)(x) &= f(x) + \sup_{y \in O(x, r\Delta)} \max_{s \in Df(y)} \{\Delta H(t, x, s) + f(y) - f(x) - \langle s, y - x \rangle\} = \\ &= f(x) + \sup_{y \in O(x, K\Delta)} \max_{s \in Df(y)} \{\Delta H(t, x, s) + f(y) - f(x) - \langle s, y - x \rangle\} = \\ &= f(x) + \max_{y \in \bar{O}(x, K\Delta)} \max_{s \in Df(y)} \{\Delta H(t, x, s) + f(y) - f(x) - \langle s, y - x \rangle\} \end{aligned}$$

Таким образом, супремум в операторе F на множестве $O(x, r\Delta)$ совпадает с супремумом на множестве $O(x, K\Delta)$, $r > K$ и достигается на множестве $\bar{O}(x, K\Delta)$.

3. Свойства оператора F и общие условия сходимости аппроксимационных схем для уравнений Гамильтона – Якоби. Приведем свойства оператора F , определяемого формулой (2.1), которые связаны с достаточными условиями сходимости аппроксимационных схем (АС) из [4, 13]. Оператор F удовлетворяет набору достаточных условий, приведенному в этих работах. Поэтому явная АС с конечно-разностным оператором (2.1) сходится с оценкой сходимости порядка $\Delta^{1/2}$.

Теорема 1. Оператор $u \rightarrow F(t, \Delta, u)$, определяемый формулой (2.1), удовлетворяет следующим условиям.

(F1) Для всех $x \in D$, выполнено соотношение

$$F(t, 0, u)(x) = u(x)$$

(F2) Отображение $(t, \Delta) \rightarrow F(t, \Delta, u)$ непрерывно. При этом

$$|F(t_1, \Delta_1, u)(x) - F(t_2, \Delta_2, u)(x)| \leq 2L(r+K)|\Delta_1 - \Delta_2| + \\ + L \left(1 + \frac{r+K}{r-K} \right) K|\Delta_1 - \Delta_2| + L_2(G_r) \max\{\Delta_1, \Delta_2\} |t_1 - t_2|$$

(F3) Для всех точек $x \in D_t$ и чисел $a \in R$ справедливо равенство

$$F(t, \Delta, u+a)(x) = F(t, \Delta, u)(x) + a$$

(F4) Существует величина $C_1 \geq 0$, такая, что для всех точек $x \in D_t$ выполнено неравенство

$$|F(t, \Delta, u)(x) - u(x)| \leq C_1$$

где можно полагать $C_1 = (r+2K)L\Delta$.

(F5) Если $u_1(x) \geq u_2(x)$ при всех $x \in D_{t+\Delta}$, то

$$F(t, \Delta, u_1)(x) \geq F(t, \Delta, u_2)(x) \text{ при всех } x \in D_t$$

(F6) Существует постоянная $C_2 \geq 0$, такая, что

$$\|F(t, \Delta, u)\|_{D_t} \leq \exp(C_2\Delta)(\|u\|_{D_{t+\Delta}} + C_2\Delta)$$

$$(\|F(t, \Delta, u)\|_{D_t} = \max_{x \in D_t} |F(t, \Delta, u)(x)|, \quad \|u\|_{D_{t+\Delta}} = \max_{x \in D_{t+\Delta}} |u(x)|)$$

В силу условия (H5) можно полагать $C_2 = 0$.

(F7) Существует постоянная C_3 , такая, что для всех $x_1 \in D_t, x_2 \in D_t$

$$|F(t, \Delta, u)(x_1) - F(t, \Delta, u)(x_2)| \leq \exp(C_3\Delta)L\|x_1 - x_2\|$$

$$\left(C_3 = L_1(G_r) \left(1 + \frac{r+K}{r-K} \right) \right)$$

(F8) Существует такой параметр C_4 , что для всех дважды гладких функций $\varphi: D_{t+\Delta} \rightarrow R$ и точек $x \in D_t \subset D_{t+\Delta}$

$$\left| \frac{F(t, \Delta, \varphi)(x) - \varphi(x)}{\Delta} - H(t, x, \nabla\varphi)(x) \right| \leq C_4\Delta$$

$$\left(C_4 = \left(r^2 + 2Kr \left(2 + \frac{r+K}{r-K} \right) \right) \|\partial^2\varphi\| \right)$$

Здесь $\nabla\varphi(x)$ – градиент функции φ в точке $x \in D_t$, а $\|\partial^2\varphi\|$ – норма второй производной функции φ , т.е.

$$\|\partial^2\varphi\| = \sum_{i,j} \|\partial^2\varphi / \partial x_i \partial x_j\|, \quad \|\partial^2\varphi / \partial x_i \partial x_j\| = \max_{y \in D_{t+\Delta}} |\partial^2\varphi(y) / \partial x_i \partial x_j|$$

$$i, j = 1, \dots, n$$

Из теоремы 1 и результатов работы [4, 13], в которых была доказана сходимость АС с оператором, удовлетворяющим условиям (F1)–(F8), следует утверждение.

Теорема 2. Пусть функция w – обобщенное решение задачи (1.4), (1.5) в области G_r и для разбиения $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = \vartheta\}$ интервала T с постоянным шагом $\Delta = t_{i+1} - t_i$ ($i = 0, \dots, N-1$) определена АС с оператором F (2.1)

$$\begin{aligned} u_\Gamma(\vartheta, x) &= \sigma(x), \quad x \in D_\vartheta \\ u_\Gamma(t, x) &= F(t, t_{i+1} - t, u_\Gamma(t_{i+1}, \bullet))(x) \\ t \in [t_i, t_{i+1}), \quad x \in D_t, \quad i &= 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда АС (3.1) сходится к обобщенному решению w задачи (1.4), (1.5). Кроме того, существует постоянная C , такая, что при достаточно малых Δ

$$\begin{aligned} \|u_\Gamma - w\|_{G_r} &\leq C\Delta^{1/2} \\ (\|u_\Gamma - w\|_{G_r} = \max_{(t,x) \in G_r} |u_\Gamma(t,x) - w(t,x)|) \end{aligned} \quad (3.2)$$

4. Аппроксимационный оператор на сетке. Рассмотрим возможность аппроксимации оператора $F(t, \Delta, u)$ оператором $F^*(t, \Delta, u)$, значение которого – кусочно-линейная функция с вершинами графика в узлах фиксированной сетки.

Пусть $(\tau, x_0) \in G_r$, $h_i = \gamma_i \Delta > 0$ ($i = 1, \dots, n$). Совокупность точек $\{y = x_0 + \sum (m_i h_i e_i + \dots + m_n h_n e_n)\}$, таких, что $(\tau, y) \in G_r$ ($m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, i = 1, \dots, n$), назовем сеткой и будем обозначать $GR(\tau)$. Здесь e_i ($i = 1, \dots, n$) – орты в R^n . Пусть D_τ^* – выпуклая оболочка сетки $GR(\tau)$:

$$D_\tau^* = \{y \in R^n: y = \sum_{j=0}^n \alpha_j y_j, \quad y_j \in GR(\tau), \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = 0, \dots, n, \quad \sum_{j=0}^n \alpha_j = 1\}$$

Полагаем, что $t \in T$, $t + \Delta \in T$ и $u: D_{t+\Delta}^* \rightarrow R$ – функция, удовлетворяющая условию Липшица. Пусть Ω – некоторое фиксированное разбиение n -мерного куба на симплексы.

Определим значение оператора $F^*(t, \Delta, u)(y): D_t^* \rightarrow R$ в точке $y \in D_t^*$ соотношением

$$F^*(t, \Delta, u)(y) = \sum_{j=0}^n \alpha_j F(t, \Delta, u)(y_j)$$

$$y \in D_t^*, \quad y_j \in GR(t), \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = 0, \dots, n, \quad \sum_{j=0}^n \alpha_j = 1, \quad y = \sum_{j=0}^n \alpha_j y_j$$

$$y_0 = x_0 + \sum (m_i h_i e_i + \dots + m_n h_n e_n)$$

$$y_j = y_0 + \sum (k_i h_i e_i + \dots + k_n h_n e_n), \quad j = 1, \dots, n, \quad k_i = 0, \pm 1$$

Коэффициенты $\alpha_j = \alpha_j(\Omega)$ и точки $y_j = y_j(\Omega)$ ($j = 0, \dots, n$) здесь и далее задаются однозначно в соответствии с разбиением Ω .

Теорема 3. Оператор $F^*(t, \Delta, u)$ удовлетворяет условиям (F1) – (F8) с параметрами

$$C_1^* = (r + 2K + \sqrt{n} \max_i \{\gamma_i\})L\Delta, \quad C_2^* = C_2 = 0$$

$$C_3^* = C_3 = L_1(G_r) \left(1 + \frac{r+K}{r-K}\right)$$

$$C_4^* = C_4 + (n \max_i \{\gamma_i^2\} + \sqrt{n}K \max_i \{\gamma_i\}) \|\partial^2 \phi\| + \sqrt{n}L_1(G_r) \max_i \{\gamma_i\} \|\nabla \phi\|$$

Теорема 4. Пусть функция w – обобщенное решение задачи (1.4), (1.5) в области G_r и для разбиения $\Gamma = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = \vartheta\}$ интервала T с постоянным шагом $\Delta = t_{i+1} - t_i$ ($i = 0, \dots, N-1$) определена АС с оператором F^*

$$u_{\Gamma}^*(\vartheta, y) = \sigma^*(y) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \sigma(y_j), \quad y \in D_{\vartheta}^*, \quad y = \sum_{j=0}^n \alpha_j y_j$$

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j = 1, \quad \alpha_j = \alpha_j(\Omega) \geq 0, \quad y_j = y_j(\Omega) \in GR(\vartheta), \quad j = 0, \dots, n$$

$$u_{\Gamma}^*(t, x) = F^*(t, t_{i+1} - t, u_{\Gamma}^*(t_{i+1}, \bullet))(x) \quad (4.1)$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}), \quad x \in D_i^*, \quad i = 0, \dots, N-1$$

Тогда АС (4.1) сходится к обобщенному решению w задачи (1.4), (1.5). Кроме того, существует постоянная C^* , такая, что при достаточно малых Δ

$$\|u_{\Gamma}^* - w\|_{G_r^*} \leq C^* \Delta^{1/2} \quad (4.2)$$

Здесь

$$\|u_{\Gamma}^* - w\|_{G_r^*} = \max_{(t,x) \in G_r^*} |u_{\Gamma}^*(t, x) - w(t, x)|$$

$$G_r^* = \{(t, x) \in G_r : t \in T, x \in D_i^*\}$$

$$C^* = 2((C_1^*)^2 + 2L_w L_{\sigma} + (L_w)^2) + (L_1(G_r) + L_2(G_r))(1 + L_w)(1 + 2(\vartheta - t_0)L_w) +$$

$$+ 2(\vartheta - t_0)C_4(1 + 18\bar{R}) + 6(\vartheta - t_0)\bar{R}$$

$$L_{\sigma} = L_3(D_{\vartheta}^*), \quad L_w = L_{\sigma} \exp(L_1(G_r)(\vartheta - t_0))$$

$$C_1^* \leq (r + 2K)L, \quad L = L_{\sigma} \exp(C_3^*(\vartheta - t_0))$$

$$\bar{R} = R + 1, \quad R = \|\sigma\|_{D_{\vartheta}^*} + C_2^*(\vartheta - t_0), \quad \|\sigma\|_{D_{\vartheta}^*} = \max_{x \in D_{\vartheta}^*} |\sigma(x)|$$

5. Алгоритмы вычисления значений оператора F . Различные типы операторов. Укажем еще несколько свойств оператора F . Введем обозначения. Пусть

$$F(t, \Delta, r_i, u)(x) = f(r_i, x) + \max_{y \in \bar{O}(x, K\Delta)} \max_{s \in Df(r_i, y)} \{\Delta H(t, x, s) +$$

$$+ f(r_i, y) - f(r_i, x) - \langle s, y - x \rangle\}, \quad i = 1, 2$$

$$F(t, \Delta, S, u)(x) = f(S, x) + \max_{y \in \bar{O}(x, K\Delta)} \max_{s \in Df(S, y)} \{\Delta H(t, x, s) + f(S, y) - f(S, x) - \langle s, y - x \rangle\}$$

Здесь $r_2 > r_1 > K$, множество $S = S(x, r_1, r_2, \Delta)$ – выпуклый многогранник, такой, что

$$\bar{O}(x, r_1 \Delta) \subset S(x, r_1, r_2, \Delta) \subset \bar{O}(x, r_2 \Delta)$$

функции $f(r_i, \bullet)$ и $f(S, \bullet)$ – выпуклые оболочки функции $u(\bullet)$ на множествах $\bar{O}(x, r_i \Delta)$ ($i = 1, 2$) и $S(x, r_1, r_2, \Delta)$ соответственно.

Свойство 3. Справедливы неравенства

$$F(t, \Delta, r_2, u)(x) \geq F(t, \Delta, S, u)(x) \geq F(t, \Delta, r_1, u)(x), \quad x \in D_i$$

Замечание 1. В силу свойства 3 АС (3.1) и (4.1) с оператором $F = F(t, \Delta, S, u)$ сходятся, так как сходятся АС (3.1) и (4.1) с операторами $F = F(t, \Delta, r_i, u)$ ($i = 1, 2$). При этом оценка сходимости составляет величину порядка $\Delta^{1/2}$.

Особенность аппроксимационного оператора F состоит в наличии задачи математического программирования в формуле (2.1). В случае, когда функция f в (2.1) кусочно-линейна, а гамильтониан $H(t, x, s)$ – кусочно-линейная, положительно-однородная функция по импульсной переменной s , эта задача математического программирования может быть редуцирована к решению серии задач линейного программирования.

Действительно, пусть функция u кусочно-линейна. Тогда выпуклая оболочка $f(\bullet) = f(S, \bullet)$ функции u на выпуклом многограннике $S(x, r_1, r_2, \Delta)$ является также кусочно-линейной функцией. В частности, в окрестности $O(x, K\Delta)$ функция f представима в виде

$$f(y) = \max_j \max_n (\langle l_n^j, y - y_j \rangle + f(y_j)), \quad j = 1, \dots, N_g, \quad n = 1, \dots, N_j$$

Здесь точки y_j и вектора l_n^j таковы, что выполняются следующее условие. Существует индекс $i_0 \in J(y)$, такой, что для всех $i \in J(y)$

$$\text{co } L(y, i) \subseteq \text{co } L(y, i_0), \quad y \in O(x, K\Delta)$$

$$J(y) = \{i: \max_j \max_n (\langle l_n^j, y - y_j \rangle + f(y_j)) = \max_n (\langle l_n^i, y - y_i \rangle + f(y_i))\}$$

$$L(y, i) = \{l = l_k^i: \max_n (\langle l_n^i, y - y_i \rangle + f(y_i)) = \langle l_k^i, y - y_i \rangle + f(y_i)\}, \quad i \in J(y)$$

Субдифференциал $Df(y)$ функции f в точке $y \in O(x, K\Delta)$ определяется формулой

$$Df(y) = \text{co } L(y, i_0)$$

Если в точках y_j , $j = 1, \dots, N_g$ выполняется соотношение $i_0 = i_0(y_j) = j$, то субдифференциал $Df(y_j)$ функции f в точке $y_j \in O(x, K\Delta)$ – выпуклый многогранник, определяемый формулой

$$Df(y_j) = \text{co}\{l_n^j, n = 1, \dots, N_j\}, \quad j = 1, \dots, N_g$$

Без ограничения общности рассуждений можно полагать, что гамильтониан $H(t, x, s)$ – кусочно-линейная, положительно-однородная функция по переменной s . В частности, гамильтониан $H(t, x, s)$ удовлетворяет этим условиям, если соответствующая управляемая система линейна по управляющим переменным, а ограничения на управления – многогранники. В этом случае

$$H(t, x, s) = \langle s, h(t, x) \rangle + \min_{u \in P} \langle s, B(t, x)u \rangle + \max_{v \in Q} \langle s, C(t, x)v \rangle$$

где P и Q – выпуклые многогранники.

Пусть u_k – вершины многогранника $B(t, x)P$ и L_k^u – конусы линейности функции $s \rightarrow \min_{u \in P} \langle s, B(t, x)u \rangle$, т.е.

$$L_k^u = L_k^u(t, x) = \{s \in R^n: \langle s, u - u_k \rangle \geq 0, \quad u \in B(t, x)P\}, \quad k = 1, \dots, N_u$$

Аналогично, пусть v_m – вершины многогранника $C(t, x)Q$ и L_m^v – конусы линейности функции $s \rightarrow \max_{v \in Q} \langle s, C(t, x)v \rangle$, т.е.

$$L_m^v = L_m^v(t, x) = \{s \in R^n: \langle s, v - v_m \rangle \leq 0, \quad v \in C(t, x)Q\}, \quad m = 1, \dots, N_v$$

Свойство 4. Если функция u кусочно-линейна, а гамильтониан H – кусочно-линейная, положительно-однородная функция по переменной s , то оператор F может быть вычислен по формуле

$$F = F(t, \Delta, S, u)(x) = f(x) + \max_j \max_k \max_m \max_s \{ \Delta(\langle s, h(t, x) \rangle + \langle s, u_k \rangle + \langle s, v_m \rangle) + f(y_j) - f(x) - \langle s, y_j - x \rangle \} \quad (5.1)$$

$$s \in L_{j,k,m}(t, x) = Df(y_j) \cap L_k^u \cap L_m^v$$

В этой формуле множество $L_{j,k,m}(t, x)$ – выпуклый многогранник, а максимизируемая функция линейна по переменной s . Таким образом, вычисление значения $F(t, \Delta, u)(x)$ оператора F в точке x редуцируется к серии задач линейного программирования.

Замечание 2. Рассмотрим конечно-разностный оператор G , двойственный к оператору F (2.1)

$$G(t, \Delta, u)(x) = g(x) + \inf_{y \in O(x, r\Delta)} \min_{s \in \bar{D}g(y)} \{ \Delta H(t, x, s) + g(y) - g(x) - \langle s, y - x \rangle \} \quad (5.2)$$

$$t \in T, t + \Delta \in T, t < \vartheta, \Delta > 0, (t, x) \in G_r, r > K$$

Здесь функция $g(y): \bar{O}(x, r\Delta) \rightarrow R$ – локально вогнутая оболочка функции $u(y)$ в замкнутой окрестности $\bar{O}(x, r\Delta)$ точки x радиуса $r\Delta$

$$g(y) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k u(y_k) : y_k \in \bar{O}(x, r\Delta), \alpha_k \geq 0, k = 1, \dots, n+1 \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k y_k = y, \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1 \right\}, y \in \bar{O}(x, r\Delta)$$

множество $\bar{D}g(y)$ – супердифференциал вогнутой функции g в точке $y, y \in O(x, r\Delta)$

$$\bar{D}g(y) = \{ s \in R^n : g(z) - g(y) \leq \langle s, z - y \rangle, z \in \bar{O}(x, r\Delta) \}$$

Замечание 3. Можно показать, что оператор G удовлетворяет условиям (F1)–(F8). Следовательно, АС (3.1) и (4.1) с оператором G сходятся, и оценка сходимости составляет величину порядка $\Delta^{1/2}$.

Замечание 4. Для оператора G справедливы свойства 1–4.

Замечание 5. Справедливо неравенство

$$G(t, \Delta, u)(x) \geq F(t, \Delta, u)(x), x \in D_t$$

Замечание 6. Пусть $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ таковы, что $\alpha_i(x) \geq 0$ ($i=1,2$) и $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = 1$. Тогда оператор

$$E(t, \Delta, u)(x) = \alpha_1(x)F(t, \Delta, u)(x) + \alpha_2(x)G(t, \Delta, u)(x)$$

удовлетворяет неравенствам

$$F(t, \Delta, u)(x) \leq E(t, \Delta, u)(x) \leq G(t, \Delta, u)(x), x \in D_t \quad (5.3)$$

АС (3.1) и (4.1) с оператором E сходятся с оценкой сходимости $\Delta^{1/2}$ при любых (необязательно непрерывных) весовых функциях $x \rightarrow \alpha_1(x), x \rightarrow \alpha_2(x)$.

Замечание 7. Пусть числа γ_i удовлетворяют условию

$$K < \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i^{-2} \right)^{-1/2}, i = 1, \dots, n \quad (5.4)$$

(в частности, при $\gamma_i = \gamma$ ($i=1, \dots, n$) предполагается выполненным условие $K\sqrt{n} < \gamma$). Полагаем

$$r_1 = \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i^{-2} \right)^{-1/2}, \quad r_2 = \max_i \gamma_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$S(x, r_1, r_2, \Delta) = \text{co}\{x \pm \Delta \gamma_i e_i, \quad i=1, \dots, n\}$$

$$u(y) = \sum_{j=0}^n \alpha_j u(y_j), \quad y \in S(x, r_1, r_2, \Delta) \quad (5.5)$$

$$y_0 = x, \quad y_i = x \pm \Delta \gamma_i e_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$\alpha_j \geq 0, \quad j=0, \dots, n, \quad \sum_{j=0}^n \alpha_j = 1, \quad y = \sum_{j=0}^n \alpha_j y_j$$

Функция f в этом случае кусочно-линейна и определяется на элементарном "ромбе" $S = S(x, r_1, r_2, \Delta)$ соотношениями

$$f(x \pm \Delta \gamma_i e_i) = u(x \pm \Delta \gamma_i e_i), \quad i=1, \dots, n$$

$$f(x) = \min\{u(x), \min_i \{1/2(u(x + \Delta \gamma_i e_i) + u(x - \Delta \gamma_i e_i))\}\}$$

$$f(y) = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(y_j), \quad y \in S(x, r_1, r_2, \Delta)$$

$$y_0 = x, \quad y_i = x \pm \Delta \gamma_i e_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$\alpha_j \geq 0, \quad j=0, \dots, n, \quad \sum_{j=0}^n \alpha_j = 1, \quad y = \sum_{j=0}^n \alpha_j y_j$$

Субдифференциал $Df(x)$ функции f в точке x представляет собой прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными осям координат

$$Df(x) = \text{co}\{a_k : k=1, \dots, 2^n\}$$

$$a_k = (a_k^1, \dots, a_k^n)$$

$$a_k^i = \pm (f(x \pm \Delta \gamma_i e_i) - f(x)) (\Delta \gamma_i)^{-1}, \quad i=1, \dots, n$$

Оператор F вычисляется по формуле

$$F = F(t, \Delta, S, u)(x) = f(x) + \Delta \max_{s \in Df(x)} H(t, x, s) =$$

$$= f(x) + \Delta \max_k \max_m \max_s \{ \langle s, h(t, x) \rangle + \langle s, u_k \rangle + \langle s, v_m \rangle \} \quad (5.6)$$

$$s \in L_{k,m}(t, x) = Df(x) \cap L_k^u \cap L_m^v, \quad L_k^u = L_k^u(t, x), \quad L_m^v = L_m^v(t, x)$$

Замечание 8. Пусть выполнено условие (5.4). Тогда

$$G = G(t, \Delta, S, u)(x) = g(x) + \Delta \min_{s \in \overline{D}g(x)} H(t, x, s) =$$

$$= g(x) + \Delta \min_k \min_m \min_s \{ \langle s, h(t, x) \rangle + \langle s, u_k \rangle + \langle s, v_m \rangle \} \quad (5.7)$$

$$s \in L_{k,m}(t, x) = \overline{D}g(x) \cap L_k^u \cap L_m^v, \quad L_k^u = L_k^u(t, x), \quad L_m^v = L_m^v(t, x)$$

$$g(x \pm \Delta \gamma_i e_i) = u(x \pm \Delta \gamma_i e_i), \quad i = 1, \dots, n$$

$$g(x) = \max\{u(x), \max_i \{ \frac{1}{2}(u(x + \Delta \gamma_i e_i) + u(x - \Delta \gamma_i e_i)) \}\}$$

$$\bar{D}g(x) = \text{co}\{b_k: k = 1, \dots, 2^n\}$$

$$b_k = (b_k^1, \dots, b_k^n)$$

$$b_k^i = \pm(g(x \pm \Delta \gamma_i e_i) - g(x))(\Delta \gamma_i)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

Замечание 9. Пусть выполнено условие (5.4) и в (5.6), (5.7) $f(x) < g(x)$. Полагаем

$$\alpha_1(x) = \frac{g(x) - u(x)}{g(x) - f(x)}, \quad \alpha_2(x) = \frac{u(x) - f(x)}{g(x) - f(x)} \quad (5.8)$$

В этом случае

$$E = E(t, \Delta, S, u)(x) = \alpha_1(x)F(t, \Delta, S, u)(x) + \alpha_2(x)G(t, \Delta, S, u)(x) =$$

$$= u(x) + \Delta(\alpha_1(x) \max_{s \in Df(x)} H(t, x, s) + \alpha_2(x) \min_{s \in \bar{D}g(x)} H(t, x, s)) =$$

$$= u(x) + \Delta \left(\max_{s \in D_*u(x)} H(t, x, s) + \min_{s \in D^*u(x)} H(t, x, s) \right) \quad (5.9)$$

$$D_*u(x) = \alpha_1(x)Df(x), \quad D^*u(x) = \alpha_2(x)\bar{D}g(x)$$

Можно показать, что множество $D_*u(x)$ – субдифференциал, а множество $D^*u(x)$ – супердифференциал в смысле В.Ф. Демьянова [20] функции u (5.5) в точке x , т.е.

$$u(x+h) - u(x) = \partial u(x)|h = \lim_{\delta \downarrow 0} \delta^{-1}(u(x+\delta h) - u(x)) = \max_{s \in D_*u(x)} \langle s, h \rangle + \min_{s \in D^*u(x)} \langle s, h \rangle$$

Замечание 10. Выполняются соотношения

$$Df(x) \cap \bar{D}g(x) \neq \emptyset, \quad c \in Df(x) \cap \bar{D}g(x)$$

$$c = (c^1, \dots, c^n) \quad (5.10)$$

$$c^i = (u(x + \Delta \gamma_i e_i) - u(x - \Delta \gamma_i e_i))(2\Delta \gamma_i)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\max_{s \in Df(x)} H(t, x, s) \geq \min_{s \in \bar{D}g(x)} H(t, x, s)$$

Замечание 11. Оператор E определяется равенствами

$$E = u(x) + \Delta H(t, x, c), \quad f(x) = g(x) = u(x) \quad (5.11)$$

$$E = u(x) + \Delta \max_{s \in D_*u(x)} H(t, x, s), \quad f(x) = u(x) < g(x) \quad (5.12)$$

$$E = u(x) + \Delta \min_{s \in \bar{D}u(x)} H(t, x, s), \quad f(x) < u(x) = g(x) \quad (5.13)$$

Формулы (5.12), (5.13) могут быть интерпретированы как оператор Годунова или формулы Хопфа в задаче Римана для выпуклой и вогнутой краевой функции [5, 9, 11, 12].

Замечание 12. Представим соотношение (5.9) в виде

$$E = u(x) + \Delta(\alpha_1(x) \max_{s \in Df(x)} H(t, x, s) + \alpha_2(x) \min_{s \in \bar{D}g(x)} H(t, x, s)) =$$

$$= u(x) - \beta(u(x) - f(x)) + \Delta \max_{s \in Df(x)} H(t, x, s) \quad (5.14)$$

$$\beta = \frac{\Delta(M-m)}{g(x)-f(x)}, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

$$M = \max_{s \in Df(x)} H(t, x, s), \quad m = \min_{s \in \bar{D}g(x)} H(t, x, s)$$

Учитывая соотношение (5.14), оператор E можно записать как оператор F на множестве $S_\beta = \text{co}\{x \pm \beta \Delta \gamma_i e_i, i = 1, \dots, n\}$.

$$E = E(t, \Delta, S, u)(x) = F(t, \Delta, S_\beta, u)(x) \quad (5.15)$$

С другой стороны, оператор E можно представить в виде

$$E(t, \Delta, S, u)(x) = u(x) + \beta(g(x) - u(x)) + \Delta \min_{s \in \bar{D}g(x)} H(t, x, s) = G(t, \Delta, S_\beta, u)(x) \quad (5.16)$$

Из (5.15), (5.16) получаем, что операторы F и G совпадают на множестве S_β . Это обстоятельство говорит в пользу того, что оператор (5.9) дает точное (или близкое к точному) значение решения (функции цены) в точке x для задачи с простым гамильтонианом (простым движением) и положительно-однородной функцией платы (не обязательно выпуклыми или вогнутыми). В теории уравнений в частных производных первого порядка эта задача известна как задача Римана [11].

6. Сравнение аппроксимационных операторов. Покажем связь между операторами F (5.6), G (5.7), E (5.9) и известными в теории уравнений в частных производных аппроксимационными операторами, такими как операторы Годунова и Лакса – Фридрикса.

Приведем формулу для аппроксимационного оператора Лакса – Фридрикса [10, 12]

$$LF(t, \Delta, u)(x) = \left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) u(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i (u(x + \Delta \gamma_i e_i) + u(x - \Delta \gamma_i e_i)) + \Delta H(t, x, c) \quad (6.1)$$

(вектор c определяется формулами (5.10)).

Операторы F , G и LF при $\alpha_i = 2/(2n+1)$ ($i = 1, \dots, n$) и $\gamma > nK$ связаны неравенствами

$$F(t, \Delta, u)(x) \leq LF(t, \Delta, u)(x) \leq G(t, \Delta, u)(x), \quad x \in D_i^*$$

Если $f(x) = g(x)$, то

$$F(t, \Delta, u)(x) = LF(t, \Delta, u)(x) = G(t, \Delta, u)(x) = E(t, \Delta, u)(x)$$

Рассмотрим аппроксимационный оператор Годунова [5, 12]

$$\text{GOD}(t, \Delta, u)(x) = u(x) + \Delta \underset{s_1 \in I(s_1^-, s_1^+)}{\text{ext}} \dots \underset{s_n \in I(s_n^-, s_n^+)}{\text{ext}} H(t, x, s_1, \dots, s_n) \quad (6.2)$$

$$s_i^+ = (u(x + \Delta \gamma_i e_i) - u(x)) (\Delta \gamma_i)^{-1}$$

$$s_i^- = -(u(x - \Delta \gamma_i e_i) - u(x)) (\Delta \gamma_i)^{-1}$$

$$I(a, b) = [\min(a, b), \max(a, b)]$$

$$\underset{s \in I(a, b)}{\text{ext}} = \begin{cases} \min, & a \leq b \\ \max, & a > b \end{cases}$$

Операторы F , G и GOD связаны соотношениями

$$F(t, \Delta, u)(x) \leq \text{GOD}(t, \Delta, u)(x) \leq G(t, \Delta, u)(x), \quad x \in D_i^*$$

$$F(t, \Delta, u)(x) = E(t, \Delta, u) = \text{GOD}(t, \Delta, u)(x), \quad f(x) = u(x)$$

$$G(t, \Delta, u)(x) = E(t, \Delta, u)(x) = \text{GOD}(t, \Delta, u)(x), \quad g(x) = u(x)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16032).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботин А.И.* Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 2. С. 293–297.
2. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991. 215 с.
3. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton – Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. No. 1. P. 1–42.
4. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Two approximations of solutions of Hamilton – Jacobi equations // Math. Comput. 1984. V. 43. No. 167. P. 1–19.
5. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
6. *Кружков С.Н.* К методам построения обобщенных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20. Вып. 6. С. 112–118.
7. *Олейник О.А.* О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения "исчезающей вязкости" // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. Вып. 2. С. 159–164.
8. *Fleming W.H.* The convergence problem for differential games // J. Math. Anal. Appl. 1961. V. 3. No. 1. P. 102–116.
9. *Hopf E.* Generalized solutions of non-linear equations of first order // J. Math. and Mech. 1965. V. 14. No. 6. P. 951–973.
10. *Lax P.D.* Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Comm. Pure Appl. Math. 1954. V. 7. No. 1. P. 159–193.
11. *Bardi M., Osher S.* The nonconvex multi – dimensional Riemann problem for Hamilton – Jacobi equations // SIAM J. Math. Anal. 1991. V. 22. No. 2. P. 344–351.
12. *Osher S., Shu C.-W.* High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton – Jacobi equations // SIAM J. Numer. Anal. 1991. V. 28. No. 4. P. 907–922.
13. *Souganidis P.E.* Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton – Jacobi equations // J. Different. Equat. 1985. V. 59. No. 1. P. 1–43.
14. *Красовский Н.Н.* К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 6. С. 1260–1263.
15. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
16. *Субботин А.И., Тарасьев А.М.* Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 559–564.
17. *Ушаков В.Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
18. *Guseinov H.G., Subbotin A.I., Ushakov V.N.* Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control // Probl. Control and Information Theory. 1985. V. 14. No. 3. P. 155–167.
19. *Taras'ev A.M., Uspenskii A.A., Ushakov V.N.* On construction of solving procedures in a linear control problem // The Lyapunov functions method and applications. Basel: J.C. Baltzer AG, Scient. Publ. Co. IMACS, 1990. P. 111–115.
20. *Демьянов В.Ф.* Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 112 с.
21. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
22. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.