ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдурахманов И.М.* О возмущении фильтрационного потока одиночной трещиной // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 871–875.
2. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
3. *Гуревич А.В., Крылов А.А., Топор Д.Н.* Решение плоских задач гидродинамики пористых сред вблизи разрывных нарушений методом комплексного потенциала // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 4. С. 846–850.
4. *Максимов А.В., Повещенко Ю.Ф., Попов Ю.П., Смогунов В.В.* Численное моделирование тепловых процессов в соединениях разнородных материалов // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 7. С. 1244–1251.
5. *Нумеров С.Н., Павловская Л.Н.* Фильтрационный расчет для плотины с цементационной завесой и вертикальным дренажом в основании // Изв. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 1973. Т. 102. С. 182–194.
6. *Симоненко И.Б.* Задачи электростатики в неоднородной среде. Случай тонкого диэлектрика большой диэлектрической постоянной. I. // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 2. С. 301–309.
7. *Холодовский С.Е.* О фильтрации в пластах с кольцевыми неоднородными анизотропными зонами, трещинами и завесами // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. № 3. С. 606–608.

Чита

Поступила в редакцию
27.V.1993

УДК 539.3

© 1994 г. **Л.А. Алексеева, Г.К. Закирьянова**

ДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ ФОРМУЛЫ СОМИЛЬЯНЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СРЕД С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ АНИЗОТРОПИИ

На основе теории обощенных функций получены динамические аналоги формулы Сомильяны для нестационарной динамики линейных упругих однородных анизотропных сред. Построены их регулярные интегральные представления для решения краевых задач теории упругости при нулевых начальных данных. Предложены аналитические формулы ядер интегральных уравнений в случае плоской деформации для ортотропных сред.

При построении граничных интегральных уравнений для решения статических и динамических краевых задач используется либо формула Сомильяны, представляеющая собой соотношения, связывающие перемещения внутри рассматриваемой области и граничные значения перемещений и нагрузок, либо ее динамический аналог. В известной монографии Новацкого В. [1] вывод формул основывается на использовании теоремы взаимности Бетти. Нами динамический аналог формулы Сомильяны был получен с помощью аппарата теории обобщенных функций [2]. Поскольку динамический тензор фундаментальных напряжений содержит неинтегрируемые особенности на волновых фронтах, появилась необходимость в соответствующей регуляризации интегралов, содержащих такие ядра. Как известно, проблема регуляризации расходящихся интегралов с сингулярностями в точке рассматривалась, например, в монографии [3]. Однако, регуляризация интегральных уравнений с сингулярностями на поверхностях, к которым приводят краевые задачи для гиперболических уравнений, впервые приводится в работе [4]. Случай изотропной среды исследован в статье [5]. Численная же реализация показывает, что предложенная регуляризация удобна для слабоанизотропных сред и связана с определенными трудностями для сред с сильной анизотропией в силу наличия лакун у последних.

Ниже предлагается иной вид регулярного представления, позволяющий рассматривать среды с произвольной степенью анизотропии.

1. Постановка задачи. Рассматривается однородная упругая анизотропная среда, находящаяся в условиях плоской деформации. Уравнения движения такой среды имеют вид

$$L_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u_j(\mathbf{x},t)+G_i(\mathbf{x},t)=0, \ (\mathbf{x},t)\in R_2\times[0,\infty] \tag{1.1}$$

$$L_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial t}\right)=C_{imjl}\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l}-\rho\delta_i^j\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (i,j,m,l=1,2)$$

$$C_{ijml}=C_{mlij}=C_{jiml}=C_{ijlm};$$

где ρ – плотность среды, G_i – компоненты вектора массовых сил, C_{ijml} – упругие константы среды, образующие тензор 4 ранга, обладающий указанными выше свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов. Здесь и далее по одноименным индексам проводится суммирование от 1 до 2.

Предполагается, что область D ограничена ляпуновским контуром S [6]. Направление обхода на S выберем таким образом, чтобы среда D всегда оставалась слева.

Решается вторая краевая задача, т.е. ищется решение системы уравнений (1.1) при известных граничных значениях вектора нестационарной нагрузки, которые обозначены ограниченной для любых $(\mathbf{x}, t)\in S\times[0,\infty)$ функцией $g_i(\mathbf{x}, t)$:

$$g_i(\mathbf{x},t)=\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)n_j(\mathbf{x}) \quad (i,j=1,2) \tag{1.2}$$

Здесь n_i – компоненты единичного вектора внешней нормали n к S. Компоненты вектора перемещений удовлетворяют начальным условиям

$$\partial^m u_i(\mathbf{x},t)/\partial t^m\Big|_{t=0}=u_i^m(\mathbf{x}) \quad (m=0,1) \tag{1.3}$$

Функции $u_i^1(\mathbf{x})$, $u_i^0(\mathbf{x})$ $(i=1,2)$ из класса непрерывных и непрерывнодифференцируемых функций в D: $u_i^1(\mathbf{x})\in C(D)$, $u_i^0(\mathbf{x})\in C^1(\overline{D})$, $g_i(\mathbf{x},t)$ – кусочно-непрерывна на $\overline{D}\times t$.

2. Тензоры фундаментальных решений. Будем рассматривать систему уравнений (1.1) в пространстве обобщенных функций $D_2'(R_3)$, определенных на пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций $D_2(R_2)$. При $G_i(\mathbf{x},t)=\delta_i^k\delta(\mathbf{x},t)$ система уравнений (1.1) в пространстве интегральных преобразований Фурье (по $\mathbf{x}$) – Лапласа (по t) запишется в виде

$$L_{ij}(-i\xi,p)\overline{U}_j^k(\xi,p)+\delta_i^k=0 \tag{2.1}$$

$$L_{ij}(i\xi_1,i\xi_2,p)=C_{imjl}\xi_m\xi_l-\rho p^2\delta_i^j$$

где $L_{ij}(\xi,p)$ – однородные полиномы второго порядка, соответствующие дифференциальным операторам из (1.1), $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, p – параметры используемых преобразований.

Динамический тензор Грина $U_j^k(\mathbf{x},t)$ есть решение системы уравнений (2.1) и равен сумме вычетов дробно-рациональных функций [7]:

$$U_j^k(\mathbf{x},t)=\frac{1}{\pi t}\operatorname{Im}\sum_{\substack{q=1\\ \operatorname{Im}\zeta_q>0}}^{2}R_{jk\zeta}\left(\zeta_q,1(x_1\zeta_q+x_2)/t\right)=\frac{1}{\pi t}\sum_{p=1}^{2}\tilde{U}_{jq}^k(\mathbf{x},t) \tag{2.2}$$

$$R_{jk\zeta}(u,\upsilon,w)=\frac{Q_{jk}(u,\upsilon,w)}{Q_{\zeta}(u,\upsilon,w)}, \quad u=\zeta, \ \upsilon=1, \ w=(x_1\zeta+x_2)/t$$

$$Q_{jj}(\xi,p)=-L_{kk}(\xi,p), \ Q_{jk}(\xi,p)=L_{jk}(\xi,p), \ j\neq k,$$

$$Q=Q_{11}Q_{22}-Q_{12}^2$$

Индексы после запятой означают переменную, по которой проводится дифференцирование, ζ_p – корни уравнения

$$Q(\zeta, 1, x_1\zeta + x_2) = 0 \tag{2.3}$$

Тензор Грина (2.2) удовлетворяет условиям

$U(\mathbf{x}, t) = 0$ при $t < 0$, $U(\mathbf{x}, t) \to 0$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$

В соотношениях (2.2) функция $\tilde{U}^k_{j1}(\mathbf{x},t)$ соответствует квазипродольной волне, $\tilde{U}^k_{j2}(\mathbf{x},t)$- квазипоперечной.

Динамический тензор Грина $U^k_j(\mathbf{x},t)$ $(j,k = 1,2)$ (2.2) порождает тензор фундаментальных напряжений $S^k_{ij}(\mathbf{x},t)$ $(i,j,k = 1,2)$, компоненты которого определяются по закону Гука

$$S^k_{ij}(\mathbf{x},t) = C_{ijml}\partial U^k_m(\mathbf{x},t)/\partial x_l$$

Наряду с тензорами Грина и фундаментальных напряжений введем следующие тензоры:

$$\Gamma^k_i(\mathbf{x}-\mathbf{y},t,\mathbf{n}) = S^k_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)n_j = C_{ijml}\frac{\partial}{\partial x_m}U^k_l(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)n_j$$
$$T^k_i(\mathbf{x},t,\mathbf{n}) = -\Gamma^i_k(\mathbf{x},t,\mathbf{n}) \tag{2.4}$$

Отметим свойства тензоров Грина и фундаментальных напряжений, которые будут использоваться в дальнейшем

$$U^k_i(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) = U^k_i(\mathbf{y}-\mathbf{x},t),\ S^k_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) = -S^k_{ij}(\mathbf{y}-\mathbf{x},t)$$

Для построения регулярных представлений перемещений удобно ввести также следующие тензоры-свертки:

$$V^k_j(\mathbf{x},t) = U^m_j\delta(\mathbf{x},t) * \delta^k_m\delta(\mathbf{x})H(t) = U^k_j(\mathbf{x},t) * \delta(\mathbf{x})H(t)$$
$$W^k_i(\mathbf{x},t,\mathbf{n}) = T^m_i(\mathbf{x},t,\mathbf{n}) * \delta^k_m\delta(\mathbf{x})H(t) = T^k_i(\mathbf{x},t,\mathbf{n}) * \delta(\mathbf{x})H(t) \tag{2.5}$$

где

$$\delta(\mathbf{x})H(t), \varphi(\mathbf{x},t)) = \int_0^\infty \varphi(0,\tau)d\tau.$$

Заметим, что из (2.5) следует

$$\dot{V}^k_i(\mathbf{x},t) = U^k_i(\mathbf{x},t) \tag{2.6}$$

В пространстве преобразований Фурье–Лапласа имеем

$$V^k_j(\xi,p) = p^{-1}R_{jk0}(i\xi_1, i\xi_2, p)$$
$$W^k_j(\xi,p) = C_{jsml}i\xi_l n_s p^{-1}R_{mk0}(i\xi_1, i\xi_2 p) \tag{2.7}$$

где

$$R_{jk0}(u,\upsilon,w) = \frac{Q_{jk}(u,\upsilon,w)}{Q(u,\upsilon,w)}$$

В силу строгой гиперболичности (1.1) характеристическое уравнение

$$Q(i\xi_1, i\xi_2, p) = 0$$

имеет четыре чисто мнимых попарно-сопряженных корня, которые можно представить в виде

$$p_q = i|\xi|c_q,\ \overline{p}_{q+2} = p_q,\ q = 1,2 \tag{2.8}$$

где c_1, c_2 – скорости распространения квазипродольных и квазипоперечных волн в анизотропной среде.

Используя теорему о вычетах, определим для тензоров V_j^k, W_j^k обратное преобразование Лапласа по времени

$$L^{-1}\left[V_j^k\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p-i\infty}^{p+i\infty}p^{-1}R_{jk0}(i\xi_1,i\xi_2,p)\exp(pt)dp=R_{jk0}(i\xi_1,i\xi_2,0)+$$

$$+\sum_{q=1}^{4}ic_qR_{jkc}(i\xi_1,i\xi_2,i|\xi|c_q)\exp(i|\xi|c_qt)$$

$$L^{-1}\left[W_j^k\right]=C_{jsml}i\xi_l n_s L^{-1}\left[V_m^k\right] \qquad (2.9)$$

Здесь введена замена переменных $p=i\,|\,\xi\,|\,c$ и учтено, что $Q_{,p}=Q_{,c}/\xi$.

Видно, что первые слагаемые в соотношениях (2.9) являются преобразованием Фурье статических тензоров фундаментальных перемещений $U_j^{k(s)}$ и напряжений $T_j^{k(s)}$ [8]. Последний определяется соотношениями (2.2), если в них вместо динамического тензора Грина U_m^k подставить статический тензор $U_m^{k(s)}$.

Обозначим оригиналы вторых слагаемых в формулах (2.9) соответственно через $V_j^{k(d)}$ и $W_j^{k(d)}$ (динамические составляющие). Таким образом, имеем

$$V_j^k=U_j^{k(s)}+V_j^{k(d)},\quad W_j^k=T_j^{k(s)}+W_j^{k(d)} \qquad (2.10)$$

Найдем оригинал тензора V_j^k. Для этого удобно перейти к полярной системе координат (ξ,θ): $\xi_1=\xi\cos\theta,\ \xi_2=\xi\sin\theta$. Тогда учитывая, что ([9], с. 103)

$$\int\limits_0^\infty\alpha^{-1}e^{ib\alpha}d\alpha=-\gamma+i\pi/2-\ln(b+i0)$$

(γ – постоянная Эйлера), получим

$$V_j^k(\mathbf{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{q=1}^{4}(ic_q)^{-1}R_{jkc}(\cos\theta,\sin\theta,c_q)\ln\frac{r\cos(\theta-\varphi)}{r\cos(\theta-\varphi)-c_qt}d\theta \qquad (2.11)$$

$$r=\sqrt{x_ix_i}\ (x_1=r\cos\varphi,x_2=r\sin\varphi)$$

Для тензора $W_j^k(\mathbf{x},t,\mathbf{n})$ имеем [4]

$$W_j^k(\mathbf{x},t,\mathbf{n})=C_{jsml}\frac{1}{\pi t}\mathrm{Im}\sum_{q=1}^{2}\frac{\delta_1^l\zeta_q+\delta_2^l}{\bar{x}_1\zeta_q+\bar{x}_2}U_{mq}^k(\mathbf{x},t)n_s=$$

$$=C_{jsml}\frac{1}{\pi r}\mathrm{Im}\sum_{q=1}^{2}\frac{\delta_1^l\zeta+\delta_2^l}{\zeta_q\cos\varphi+\sin\varphi}R_{mk\zeta}\left(\zeta_q,1,r(\zeta_q\cos\varphi+\sin\varphi)/t\right) \qquad (2.12)$$

Из представлений (2.11), (2.12) следует

$$V_j^k(\mathbf{x},t)\sim O(\ln r),\ W_j^k(\mathbf{x},t,\mathbf{n})\sim O(r^{-1})\ \text{ при }\ r\to0 \qquad (2.13)$$

т.е. асимптотика этих тензоров определяется асимптотикой статических составляющих $U_j^{k(s)}$, $T_j^{k(s)}$ при $r\to0$.

Введенные тензоры являются фундаментальными решениями системы уравнений движения (1.1) с соответствующими сингулярными массовыми силами:

$$L_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial t}\right)V_j^k(\mathbf{x},t)+\delta_i^k\delta(\mathbf{x})H(t)=0$$

$$L_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial t}\right)W_j^k(\mathbf{x},t,\mathbf{n})+n_lC_{klmi}\frac{\partial}{\partial x_m}\delta(\mathbf{x})H(t)=0$$

(индексы i, j, k, m, l принимают значения 1,2).

3. Аналоги формул Кирхгофа и Сомильяны. Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – решение уравнений (1.1) в области $\{D \times t\}$, удовлетворяющее граничным и начальным условиям (1.2), (1.3). Было показано [2], что обобщенная функция $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = H(t)H_D(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнениям движения (1.1) с сингулярной массовой силой и представима в виде

$$\upsilon_i(\mathbf{x},t) = U_i^k(\mathbf{x},t) ** F_k(\mathbf{x},t) + \rho U_i^k(\mathbf{x},t) * u_k^1(\mathbf{x})H_D(\mathbf{x}) + \rho \dot{U}_i^k(\mathbf{x},t) * u_k^0(\mathbf{x})H_D(\mathbf{x}) + \tag{3.1}$$

$$+U_i^k(\mathbf{x},t) ** g_k(\mathbf{x},t)\delta_S(\mathbf{x})H(t) - C_{kjml}\dot{V}_i(\mathbf{x},t) ** \frac{\partial}{\partial x_l}(u_m(\mathbf{x},t)n_j(\mathbf{x})\delta_S(\mathbf{x})H(t))$$

$$F_k(\mathbf{x},t) = H(t)H_D(\mathbf{x})G_k(\mathbf{x},t)$$

Точкой над функцией обозначено дифференцирование по времени, звездочка соответствует свертке по $\mathbf{x}$, а две звездочки – свертке по $\mathbf{x}$, t, $g_k(\mathbf{x}, t)\ \delta_s(\mathbf{x})H(t)$ – простой слой на цилиндре $\{S * t\}$, $H_D(\mathbf{x})$ – характеристическая функция множества D [8], υ_i – компоненты векторфункции $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

Непосредственный переход к интегральной записи формул (3.1) невозможен в силу наличия сильных особенностей на подвижных волновых фронтах у функций $U_{i,l}^k, U_{i,t}^k$. Для изотропных упругих сред этот вопрос был рассмотрен [5]. На основе регуляризации подынтегральных функций на волновых фронтах был получен [4] интегральный вид записи (3.1) для анизотропных сред, а также построены [8] граничные интегральные уравнения для решения поставленной краевой задачи с нулевыми начальными условиями (1.3):

$$u_i^m(\mathbf{x}) = 0, \quad m = 0,1 \tag{3.2}$$

Однако реализация предложенной регуляризации в случае сильно анизотропных сред связана со значительными трудностями и удобна лишь для сред со слабой анизотропией. Вводимое в данной работе регулярное представление устраняет этот недостаток.

Рассмотрим общий случай анизотропии, в том числе среды с сильной анизотропией, волновые процессы в которых характеризуются наличием лакун – подвижных, но невозмущенных областей. Такие среды обладают сильными волноводными свойствами в определенных направлениях, кривые рефракции для них являются выпукло-вогнутыми [7].

Свойство дифференцирования сверток, а также соотношения (2.7) и (3.2) позволяют записать (3.1) в виде

$$\upsilon_i(\mathbf{x},t) = U_i^k(\mathbf{x},t) ** F_k(\mathbf{x},t) + U_i^k(\mathbf{x},t) ** g_k(\mathbf{x},t)\delta_s(\mathbf{x})H(t) -$$

$$-C_{kjml}\frac{\partial}{\partial x_l}V_i^k(\mathbf{x},t) ** \dot{u}_m(\mathbf{x},t)n_j(\mathbf{x})\delta_s(\mathbf{x})H(t) - C_{kjml}\frac{\partial}{\partial x_l}V_i^k(\mathbf{x},t) * u_m^0(\mathbf{x})n_j(\mathbf{x})\delta_s(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

Последнее слагаемое в силу (3.2) равно нулю.

Динамический тензор Грина для анизотропной среды (2.2) при плоской деформации имеет слабую особенность на подвижных волновых фронтах, т.е. первые два слагаемых в правой части (3.3) имеют слабую особенность на волновых фронтах. В силу (2.5) это же относится и к тензору $W_i^k(\mathbf{x}-\mathbf{y},t,\mathbf{n}(\mathbf{y}))$.

Итак, все свертки в соотношении (3.3) существуют. При учете выражения (2.10) имеем

$$\int_0^t W_i^k(\mathbf{x}-\mathbf{y},\tau,\mathbf{n}(\mathbf{y}))\dot{u}_k(\mathbf{y},t-\tau)d\tau = T_i^{k(c)}(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{n}(\mathbf{y}))u_k(\mathbf{y},t) + \int_0^t W_i^{k(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{y},\tau,\mathbf{n}(\mathbf{y}))\dot{u}_k(\mathbf{y},t-\tau)d\tau$$

$$H(t)H_D(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x},t) = \int_D\int_0^t U_i^k(\mathbf{x}-\mathbf{y},\tau)G_k(\mathbf{y},t-\tau)d\tau\, dD(\mathbf{y}) + \int_S\int_0^t U_i^k(\mathbf{x}-\mathbf{y},\tau)g_k(\mathbf{y},t-\tau)d\tau\, dS(\mathbf{y}) +$$

$$+\int_S\int_0^t W_i^k(\mathbf{x}-\mathbf{y},\tau,\mathbf{n}(\mathbf{y}))\dot{u}_k(\mathbf{y},t-\tau)d\tau\, dS(\mathbf{y})$$

Таким образом, для $\mathbf{x} \notin S$ при выполнении (3.2) соотношения (3.3) могут быть записаны в следующем интегральном виде

$$H(t)H_D(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x},t)=\int\limits_{D}\int\limits_{0}^{t}U_i^k(\mathbf{x}-\mathbf{y},\tau)\,G_k(\mathbf{y},t-\tau)d\tau\ \ dD(\mathbf{y})+\int\limits_{D}\int\limits_{0}^{t}U_i^k(\mathbf{x}-\mathbf{y},\tau)\,g_k(\mathbf{y},t-\tau)d\tau\ \ dS(\mathbf{y})+$$

$$+\int\limits_{S}T_i^{k(c)}(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{n}(\mathbf{y}))\,u_k(\mathbf{y},t)dS(\mathbf{y})-\int\limits_{S}\int\limits_{0}^{t}W_i^{k(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{y},\tau,\mathbf{n}(\mathbf{y}))\,\dot{u}_k(\mathbf{y},t-\tau)d\tau\ \ dS(\mathbf{y}) \qquad (3.4)$$

Т.е. получена формула, которая позволяет по заданным значениям функций $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$, $g_i(\mathbf{x},t)$ на границе S определять значения перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ в области D. Выражение (3.4) является динамическим аналогом формулы Сомильяны для анизотропной среды.

Эти формулы получены для обобщенных функций. Согласно лемме дю Буа-Реймона [10] между локально интегрируемыми функциями и регулярными обобщенными функциями существует взаимно однозначное соответствие. И поскольку в полученных соотношениях справа и слева стоят регулярные обобщенные функции, эти равенства справедливы и в обычном смысле для $\mathbf{x} \notin S$.

Формула (3.4) с учетом определения $H_D(\mathbf{x})$ дает сингулярные граничные интегральные уравнения для решения основных нестационарных краевых задач теории упругости анизотропных сред, в том числе сильноанизотропных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975, 872 с.
2. *Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К.* Нестационарные уравнения движения анизотропных сред в пространстве обобщенных функций. Формулы Кирхгофа и Сомильяны / Изв. АН КазССР. сер. физ.-мат. 1991. № 1. с. 70–74.
3. *Гельфанд И.М. и Шилов Е.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, 1959, 470 с.
4. *Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.А., Закирьянова Г.К.* Регулярные представления формул Кирхгофа и Сомильяны для нестационарной динамики анизотропных сред на волновых фронтах // Вестник АН КазССР. 1991. № 3. с. 58–62.
5. *Алексеева Л.А.* Аналоги формул Кирхгофа и Сомильяны в плоских задачах эластодинамики // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 298–308.
6. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
7. *Payton R.G.* Two-dimensional anisotropic elastic waves emanating from a point source // Proc. Camb. Phil. Soc. 1971. V. 70. P. 191–210.
8. *Закирьянова Г.К.* Регулярные представления формул Кирхгофа и Сомильяны для нестационарной динамики анизотропных сред на контуре // Вестник АН КазССР. 1992. № 3. С. 79–84.
9. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
10. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.

Алма-Ата

Поступила в редакцию
12.V.1993