УДК 532.546

© 1994 г. С.Е. Холодовский

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ В СРЕДАХ С КОЛЬЦЕВЫМИ СОПРИКАСАЮЩИМИСЯ ТРЕЩИНАМИ И ЗАВЕСАМИ

Для плоских потенциальных полей выводятся обобщенные условия сопряжения, соответствующие произвольному числу соприкасающихся кольцевых трещин и завес, которые моделируются бесконечно тонкими слоями бесконечно большой для трещин и бесконечно малой для завес проницаемости, при этом трещинно-завесная система разделяет две кусочно-однородные зоны. Посредством применения метода Фурье с последующим свертыванием интегралов Фурье строятся интегральные представления потенциалов, удовлетворяющих обобщенным условиям сопряжения, через произвольные гармонические функции, имеющие особые точки во внешней зоне. Полученные формулы обобщают известные результаты для одиночной трещины или завесы [1–3].

Во многих задачах теории фильтрации, теплопроводности, электростатики и т.д. необходимо исследовать потенциальные поля в окрестности тонких сильно- и слабопроницаемых прослоек [1–7], которые могут быть совмещенными в одной системе. Так, при экранировании загрязненных зон от внешних потоков наряду с экраном-завесой целесообразно сооружать дренаж-трещину для направления потока в обход загрязненной зоны и снижения в ней как давления, так и потока. Аналогично вертикальные дренажи и завесы под плотинами [5] экономически выгодно совмещать в одной системе. Кроме того, контакты разнородных сред, как правило, не бывают идеальными и в уточненной модели необходимо учитывать переходный слой в виде свободных и запечатанных микрослоев [2, 4].

Пусть функция $\varphi(r, \alpha)$ удовлетворяет в окрестности окружности $r = a$ уравнению

$$r\partial_r(Kr\partial_r\varphi)+K\partial_\alpha^2\varphi=0, \quad r\neq a \tag{1}$$

где $K = K_1 + (K_2 - K_1)s(r - a)$, $K_i > 0$ – постоянные; r, α – полярные координаты, $\partial_r^m = \partial^m / \partial r^m$, $s(r)$ – единичная функция Хевисайда. Выведем по индукции для функции φ обобщенные условия сопряжения при $r = a$, соответствующие произвольной комбинации примыкающих друг к другу трещин и завес, которые моделируются особенностями коэффициента K (1) типа $\delta(r - a) + 1$ для трещин и типа $[\delta(r - a) + 1]^{-1}$ для завес, $\delta(r)$ – функция Дирака. Обозначая через φ^- и φ^+ значения функции φ соответственно в зонах $D^-(r < a)$ и $D^+(r > a)$ (на линии $r = a$, $\varphi^\pm$ – предельные значения), рассмотрим обобщенные условия сопряжения в виде

$$r=a\colon\ [\varphi]=F_i(\varphi^-),\ [v_r]=G_i(\varphi^-) \tag{2}$$

где $[\cdot]$ – скачок функции $v_r = K\partial_r\varphi$, F_i и G_i – операторы, подлежащие определению. При $F_i = G_i = 0$ имеем классические условия сопряжения (идеальный контакт двух сред). Пусть при $r = a$ и $r = b = a + l$, $l > 0$ имеют место условия типа (2) и классические условия сопряжения:

$$r=a\colon\ \varphi^0-\varphi^-=F_i(\varphi^-),\ \ v_r^0-v_r^-=G_i(\varphi^-)$$

$$r=b\colon\ \varphi^+=\varphi^0,\ \ v_r^+=v_r^0 \tag{3}$$

Отсюда

$$\varphi^+|_b-\varphi^-|_a=\varphi^0|_b-(\varphi^0-F_i)|_a=\frac{l}{K_0}\upsilon_r^0\Big|_{c_1}+F_i\Big|_a \tag{4}$$

$$\upsilon_r^0|_b-\upsilon_r^-|_a=\upsilon_r^0|_b-(\upsilon_r^0-G_i)|_a=K_0l\partial_r^2\varphi^0|_{c_2}+G_i|_a \tag{5}$$

где $c_j\in[a,\,b]$; $K_0=\text{const}$, φ^0 и ϑ_r^0 – значения коэффициента K и функций φ и υ_r в слое $D_0(a<r<b)$, $\varphi|_a\equiv\varphi|_{r=a}$.

Перейдем в равенствах (4), (5) к пределу при $l\to 0$, $K_0\to\infty$ (случай трещины $r=$ $=a+0$). Из (4) при учете условий (3) следует $\varphi^0|_b\to\varphi^0|_a=(\varphi^-+F_i)|_a$. Отсюда для любого $c\in[a\,,b]$ имеем $\partial_r\varphi^0|_c\to 0$, или при учете (1) $\partial_r^2\varphi^0|_c\to-\partial_\alpha^2(\varphi^-+F_i)/a^2|_a$. При этом условия (4), (5) примут вид (2), где

$$F_{i+1}=F_i,\ \ G_{i+1}=G_i-A_ia^{-2}\partial_\alpha^2(\varphi^-+F_i) \tag{6}$$

$A_i=\lim lK_0$ – параметр трещины [7]. Аналогично при $l\to 0$, $K_0\to 0$ (случай завесы $r=a+0$) из (5), (3) для любого $c\in[a,\,b]$ следует $\upsilon_r^0|_c\to\upsilon_r^-+G_i|_a$ при этом условия (4), (5) примут вид (2), где

$$F_{i+1}=F_i+B_i(G_i+K_1\partial_r\varphi^-),\ \ G_{i+1}=G_i \tag{7}$$

$B_i=\lim l/K_0$ – параметр завесы [7].

Таким образом, обобщенные условия сопряжения имеют вид (2), где F_i и G_i при $i=0,\,1,\,2,\ldots$ строятся по рекуррентным формулам (6), (7), в которых $F_0=G_0=0$. В частности, при $i=1$ из (2) следуют известные условия для одиночной трещины и завесы [1–3], полученные из других соображений. Далее полагаем, что трещины и завесы с параметрами A_{2k-1} и B_{2k} чередуются, где $k=1,\ldots,i$, $A_1\geqslant 0$, $B_{2i}\geqslant 0$, A_{2j+1}, $B_{2j}>0$ при $j=1,\ldots,i-1$, i – фиксирован.

Пусть поле индуцируется особыми точками при $r>a$ произвольно заданной гармонической функции $f(r,\,\alpha)$. Отсюда для потенциала φ_i имеем задачу (1), (2), $\varphi_i\sim f$. Представим φ_i в виде рядов Фурье

$$\varphi_{ij}^-=\frac{f_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{2}a_{ij}^{\nu}\sigma_\nu\left(\frac{r}{a}\right)^n \tag{8}$$

$$\varphi_{ij}^+=f(r,\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{2}b_{ij}^{\nu}\sigma_\nu\left(\frac{a}{r}\right)^n;\ \ \sigma_1=\cos n\alpha,\ \ \sigma_2=\sin n\alpha$$

где ν – индекс, $j=0$ и $j=1$ соответственно при $B_{2i}>0$ и $B_{2i}=0$. Отсюда разлагая функции f и ∂_rf при $r=a$ в ряды Фурье, из условий (2) для параметров $a_{ij}^{\nu}(n),b_{ij}^{\nu}(n)$ получим систему уравнений, решение которой имеет вид

$$a_{ij}^{\nu}=\frac{2K_2a}{R_{ij}}f_\nu,\ \ b_{ij}^{\nu}=(-1)^j\left(1-\frac{2N_{ij}}{R_{ij}}\right)f_\nu$$

$$N_{i0}=(K_1+Q_i)a,\ \ N_{i1}=K_2(a+P_{i-1}n)$$

$$R_{ij}=a(K_1+K_2+Q_i)+K_2nP_{i-j} \tag{9}$$

где f_ν – коэффициенты Фурье функции $f(a,\,\alpha)$ по σ_ν, параметры Q_i и P_i строятся по рекуррентным формулам

$$Q_q=Q_{q-1}+A_{2q-1}\frac{n}{a}\left(1+P_{q-1}\frac{n}{a}\right)>0$$

$$P_q=P_{q-1}+B_{2q}(K_1+Q_q)>0;\ \ q=1,\ldots,i;\ \ P_0=Q_0=0 \tag{10}$$

Отсюда следует, что R_{ij} – многочлен степени μ относительно n, где $\mu=2i-j$ при $A_1>0$ и $\mu=2i-j-1$ при $A_1=0$, причем дроби (9) правильные и в силу неравенств (10)

$R_{ij} > 0$. (Здесь учтена связь между коэффициентами Фурье функции f и $\partial_r f$ при $r = a$, которая следует из совпадения с $f(r, \alpha)$ решений задач Дирихле и Неймана в круге $r < a$ с граничными функциями $f(a, \alpha)$ и $\partial_r f(a, \alpha)$.) Так как $f(a, \alpha) \in C^\infty$, то $\varphi_{ij}^\pm \in C^2(D^\pm)$ вне особых точек, т.е. функции (8) являются решениями поставленной задачи.

Приведем формулы (8) к квадратурам. Пусть $R_{ij}(n)$ имеет простые действительные корни, т.е.

$$R_{ij} = S_{ij} \prod_{q=1}^{\mu} (n + \gamma_q)$$

где $\gamma_q > 0$ в силу $R_{ij}(n) > 0$. Представляя функцию $f(r, \alpha)$ при $r < a$ как решение методом Фурье задачи Дирихле с граничной функцией $f(a, \alpha)$, умножая полученное разложение на $(r/a)^{\gamma-1}$ и интегрируя по r, получим формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{2} \frac{f_\nu \sigma_\nu}{n+\gamma} \left(\frac{r}{a}\right)^n = \Phi(r,\alpha,\gamma) - \frac{f_0}{2\gamma}, \quad r < a, \ \gamma > 0$$

где

$$\Phi(r,\alpha,\gamma) = \int_0^r \left(\frac{\xi}{r}\right)^\gamma \frac{1}{\xi} f(\xi,\alpha) d\xi \tag{11}$$

и аналогичную формулу при замене в (11) r на a^2/r для $r > a$.

Разлагая дроби (9) на простейшие, потенциалы (8) с точностью до аддитивной постоянной запишем в виде

$$\varphi_{ij}^- = \frac{2K_2 a}{S_{ij}} \sum_{p=1}^{\mu} \frac{1}{M_p} \Phi(r,\alpha,\gamma_p) \tag{12}$$

$$\varphi_{ij}^+ = f(r,\alpha) + (-1)^j \left[f\left(\frac{a^2}{r},\alpha\right) - \frac{2}{S_{ij}} \sum_{p=1}^{\mu} \frac{N_{ij}(-\gamma_p)}{M_p} \Phi\left(\frac{a^2}{r},\alpha,\gamma_p\right) \right]$$

$$M_p = \prod_{q=1}^{\mu} (\gamma_q - \gamma_p) \Big|_{q \neq p}$$

(функция Φ имеет вид (11)).

Если $R_{ij}(n)$ имеет корень $-\gamma_q$ кратности n_q, то потенциалы определяются формулами (12), в которых следует перейти к пределу при $\gamma_{q+p} \to \gamma_q$, $p = 1, \ldots, n_q$. В случае комплексных корней $-\gamma_q$ функции (12) действительны. С математической точки зрения формулы (12) дают интегральные представления p-гармонических функций с кусочно-постоянной характеристикой p, имеющей комбинацию особенностей типа $(\delta + 1)^{\pm 1}$ вдоль окружности $r = a$, через гармонические функции f с сохранением типа особых точек функции f.

В конкретном случае трещины $r = a - 0$ и завесы $r = a + 0$ с параметрами A и B потенциалы (12) при $i = 1, j = 0$ примут вид

$$\varphi^- = \frac{2aK_2}{S} \int_0^r (t_1 - t_2) \frac{1}{\xi} f(\xi,\alpha) d\xi$$

$$\varphi^+ = f(r,\alpha) + f\left(\frac{a^2}{r},\alpha\right) - \frac{2}{S} \int_0^{a^2/r} (T_1 - T_2) \frac{1}{\xi} f(\xi,\alpha) d\xi$$

$$S = \rho(\gamma_2 - \gamma_1)/a, \quad \rho = K_2 AB, \quad t_i = (\xi/r)^{\gamma_i}$$

$$\gamma_i = a\rho^{-1}[M + 2A + (-1)^i (M^2 - 4K_2\rho)^{1/2}]$$

$$T_i = (K_1 a - A\gamma_i)(\xi r/a^2)^{\gamma_i}, \quad M = K_1 K_2 B - A$$

В случае особенностей функции f, расположенных при $r < a$, решение задачи (1), (2) строится аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдурахманов И.М.* О возмущении фильтрационного потока одиночной трещиной // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 871–875.
2. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
3. *Гуревич А.В., Крылов А.А., Топор Д.Н.* Решение плоских задач гидродинамики пористых сред вблизи разрывных нарушений методом комплексного потенциала // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 4. С. 846–850.
4. *Максимов А.В., Повещенко Ю.Ф., Попов Ю.П., Смогунов В.В.* Численное моделирование тепловых процессов в соединениях разнородных материалов // Дифференц, уравенния. 1982. Т. 18. № 7. С. 1244–125'.
5. *Нумеров С.Н., Павловская Л.Н.* Фильтрационный расчет для плотины с цементационной завесой и вертикальным дренажом в основании // Изв. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 1973. Т. 102. С. 182–194.
6. *Симоненко И.Б.* Задачи электростатики в неоднородной среде. Случай тонкого диэлектрика большой диэлектрич‹ской постоянной. I. // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 2. С. 301–309.
7. *Холодовский С.Е.* О фильтрации в пластах с кольцевыми неоднородными анизотропными зонами, трещинами и завесами // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. № 3. С. 606–608.

Чита

Поступила в редакцию
27.V.1993

УДК 539.3

© 1994 г. **Л.А. Алексеева, Г.К. Закирьянова**

ДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ ФОРМУЛЫ СОМИЛЬЯНЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СРЕД С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ АНИЗОТРОПИИ

На основе теории обощенных функций получены динамические аналоги формулы Сомильяны для нестационарной динамики линейных упругих однородных анизотропных сред. Построены их регулярные интегральные представления для решения краевых задач теории упругости при нулевых начальных данных. Предложены аналитические формулы ядер интегральных уравнений в случае плоской деформации для ортотропных сред.

При построении граничных интегральных уравнений для решения статических и динамических краевых задач используется либо формула Сомильяны, представляеющая собой соотношения, связывающие перемещения внутри рассматриваемой области и граничные значения перемещений и нагрузок, либо ее динамический аналог. В известной монографии Новацкого В. [1] вывод формул основывается на использовании теоремы взаимности Бетти. Нами динамический аналог формулы Сомильяны был получен с помощью аппарата теории обобщенных функций [2]. Поскольку динамический тензор фундаментальных напряжений содержит неинтегрируемые особенности на волновых фронтах, появилась необходимость в соответствующей регуляризации интегралов, содержащих такие ядра. Как известно, проблема регуляризации расходящихся интегралов с сингулярностями в точке рассматривалась, например, в монографии [3]. Однако, регуляризация интегральных уравнений с сингулярностями на поверхностях, к которым приводят краевые задачи для гиперболических уравнений, впервые приводится в работе [4]. Случай изотропной среды исследован в статье [5]. Численная же реализация показывает, что предложенная регуляризация удобна для слабоанизотропных сред и связана с определенными трудностями для сред с сильной анизотропией в силу наличия лакун у последних.