

УДК 539.3

© 1994 г. Л.А. Фильштинский, М.Л. Фильштинский

### ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

В явном виде строится функция Грина для составной (кусочно-однородной) пьезокерамической плоскости с межфазной трещиной. Предполагается, что берега трещины свободны от механической нагрузки, а нормальная составляющая вектора электрической индукции и касательная составляющая вектора напряженности электрического поля непрерывны на линии трещины. Используется известное представление решения задачи электроупругости при помощи шести функций, аналитических в полуплоскостях, причем сначала строится функция Грина для составной плоскости без трещины. Решение основной задачи определяется при помощи аналитического продолжения и сводится к матричной задаче Римана на конечном отрезке. Определяются также коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины.

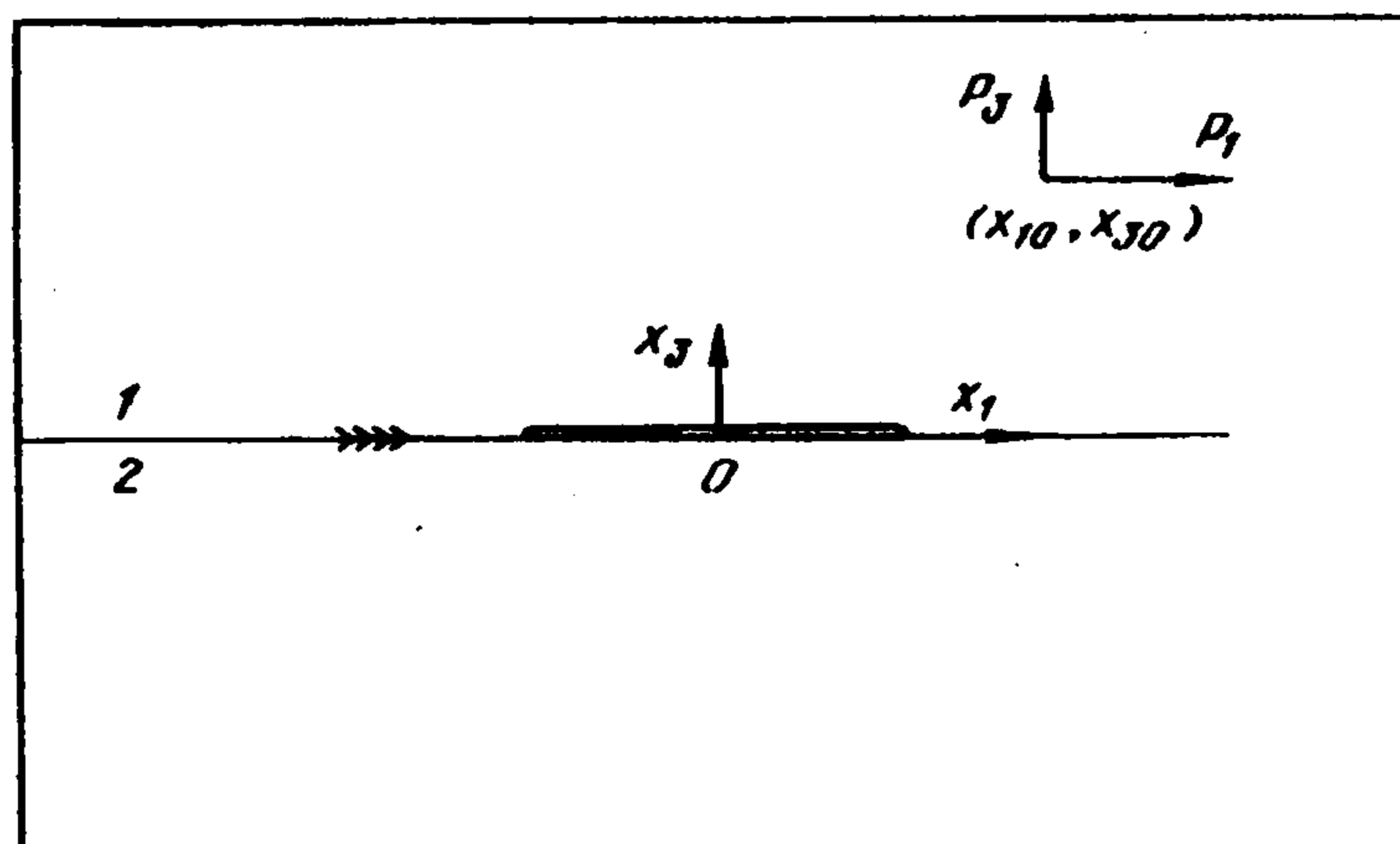
Для однородной пьезокерамической плоскости с прямолинейным разрезом функция Грина была построена в [1].

1. Рассмотрим неограниченную среду, составленную из двух разнородных пьезокерамических полуплоскостей, непрерывно скрепленных между собой вдоль участков  $x_3 = 0, |x_1| \geq a$  (фиг. 1). На участке  $x_3 = 0, |x_1| < a$  имеется отслойка, которую будем трактовать как межфазную трещину. Пусть в точке  $(x_{10}, x_{30})$  верхней полуплоскости приложена сосредоточенная сила  $P = (P_1, P_3)$  или сосредоточенный электрический заряд интенсивности  $\rho$ . Приписывая величинам, относящимся к  $r$ -й полуплоскости верхний индекс  $r$  ( $r = 1, 2$ ), запишем механические и электрические граничные условия на оси  $x_1$  в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(1)} &= \sigma_{i3}^{(2)}, \quad du_i^{(1)} = du_i^{(2)}, \quad |x_1| \geq a \quad (i = 1, 3) \\ E_1^{(1)} &= E_1^{(2)}, \quad D_3^{(1)} = D_3^{(2)}, \quad -\infty < x_1 < \infty \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{i3}^{(1)+} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(2)-} = 0, \quad |x_1| < a \quad (1.2)$$

где  $\sigma_{i3}, u_i, E_1, D_3$  – соответствующие компоненты тензора напряжения, вектора перемещения и векторов электрической напряженности и индукции; под  $\sigma^\pm$  понимаем предельные значения функции  $\sigma$  на верхнем (знак плюс) и нижнем (знак минус) берегах трещины.



Фиг. 1

Будем считать, что вектор предварительной поляризации пьезокерамики в верхней и нижней полуплоскостях направлен вдоль оси  $x_3$ . В этом случае, компоненты вектора  $U = \{U_k\} = \{\sigma_{33}, -\sigma_{13}, u'_1, u'_3, E_1, -D_3\}$  имеют вид [2]

$$U_k = 2 \operatorname{Re} \sum_{v=1}^3 c_{kv} \Phi_v(z_v) \quad (k = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.3)$$

$$c_{1v} = \gamma_v, \quad c_{2v} = \gamma_v \mu_v, \quad c_{3v} = p_v, \quad c_{4v} = q_v, \quad c_{5v} = \lambda_v, \quad c_{6v} = r_v$$

$$\lambda_v = \epsilon_{11} + \epsilon_{33} \mu_v^2, \quad p_v = s_{11} \gamma_v \mu_v^2 + s_{13} \gamma_v + d_{31} \lambda_v \mu_v$$

$$q_v = s_{33} \gamma_v / \mu_v + s_{13} \gamma_v \mu_v + d_{33} \lambda_v$$

$$r_v = \epsilon_{11} \lambda_v / \mu_v - d_{15} \gamma_v, \quad z_v = x_1 + \mu_v x_3$$

$$\lambda_v = (d_{15} - d_{33}) \mu_v - d_{31} \mu_v^3$$

Здесь  $\mu_v$  ( $\operatorname{Im} \mu_v > 0$ ,  $v = 1, 2, 3$ ) – корни характеристического уравнения

$$\{s_{33} + (s_{44} + 2s_{13}) \mu^2 + s_{11} \mu^4\} (\epsilon_{11} + \epsilon_{33} \mu^2) - \mu^2 (d_{15} - d_{33} - d_{31} \mu^2)^2 = 0$$

Коэффициенты  $s_{ij} = s_{ij}^E$  – упругие податливости, определяемые при постоянном значении электрического поля,  $d_{ij}$  – пьезоэлектрические постоянные,  $\epsilon_{ii} = \epsilon_{ii}^T$  – диэлектрические проницаемости, определяемые при постоянном значении механического напряжения [3, 4].

Таким образом, приходим к граничной задаче об определении шести функций  $\Phi_v^{(r)}(z_v^{(r)})$ , аналитических каждая в своей плоскости  $z_v^{(r)} = x_1 + \mu_v^{(r)} x_3$  ( $v = 1, 2, 3$ ;  $r = 1, 2$ ), по условиям непрерывной продолжимости компонент  $U_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) через участки  $|x_1| \geq a$  и условиям  $U_1^\pm = 0$ ,  $U_2^\pm = 0$ ,  $U_5^{(1)} = U_5^{(2)}$ ,  $U_6^{(1)} = U_6^{(2)}$  на берегах отрезка  $[-a, a]$ . Эту задачу целесообразно решать, применяя аналитическое продолжение соответствующих функций с последующим сведением ее к задачам Римана. Но сначала необходимо построить фундаментальное решение для составной плоскости без отслойки.

2. Рассмотрим кусочно-однородную пластину, составленную из двух разнородных пьезокерамических полуплоскостей, непрерывно скрепленных между собой вдоль всей оси  $x_1$ . Пусть в точке  $(x_{10}, x_{30})$  верхней полуплоскости действует сосредоточенная сила  $P = (P_1, P_3)$  или заряд  $\rho$ . Обобщая метод отражения [5] и используя результаты [6], представим решение в виде

$$\Phi_v^{(1)}(z_v^{(1)}) = \frac{A_v^{(1)}}{z_v^{(1)} - z_{v0}^{(1)}} - \sum_{m=1}^3 \frac{\overline{\alpha_{vm}^{(1)}} \overline{A_m^{(1)}}}{z_v^{(1)} - \overline{z_{m0}^{(1)}}} \quad (v = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

$$\Phi_v^{(2)}(z_v^{(2)}) = \sum_{m=1}^3 \frac{\alpha_{v+3,m}^{(1)} A_m^{(1)}}{z_v^{(2)} - z_{m0}^{(1)}}; \quad z_v^{(1)} = x_1 + \mu_v^{(1)} x_3, \quad z_{m0}^{(1)} = x_{10} + \mu_m^{(1)} x_{30}$$

Здесь

$$2 \operatorname{Im} \sum_{m=1}^3 A_m^{(1)} (\mu_m^{(1)})^{n-1} = -\frac{B_n}{h} \quad (n = 0, 1, \dots, 5) \quad (2.2)$$

$$B_0 = \frac{P_1}{2\pi \epsilon_{11}^{(1)} s_{33}^{(1)}} \left( s_{13}^{(1)} - \frac{1}{\Delta_1} \epsilon_{33}^{(1)} s_{33}^{(1)} d_{31}^{(1)} \right)$$

$$B_1 = -\frac{P_3}{2\pi\epsilon_{11}^{(1)}\Delta_1} (\epsilon_{33}^{(1)}d_{15}^{(1)} + \epsilon_{11}^{(1)}d_{31}^{(1)}) - \frac{\rho\epsilon_{33}^{(1)}}{2\pi\epsilon_{11}^{(1)}\Delta_1}$$

$$B_2 = \frac{P_1d_{31}^{(1)}}{2\pi\Delta_1}, \quad B_3 = \frac{P_3d_{33}^{(1)} + \rho}{2\pi\Delta_1}, \quad B_4 = \frac{P_1}{2\pi\Delta_1}(d_{15}^{(1)} - d_{33}^{(1)})$$

$$B_5 = \frac{P_3}{2\pi\Delta_1\Delta_2}(d_{33}^{(1)}\Delta_3 - s_{13}^{(1)}\Delta_1) + \frac{\rho\Delta_3}{2\pi\Delta_1\Delta_2}$$

$$\Delta_1 = (d_{33}^{(1)} - d_{15}^{(1)})\epsilon_{33}^{(1)} - d_{31}^{(1)}\epsilon_{11}^{(1)}, \quad \Delta_2 = s_{11}^{(1)}\epsilon_{33}^{(1)} - (d_{31}^{(1)})^2$$

$$\Delta_3 = (d_{33}^{(1)} - d_{15}^{(1)})d_{31}^{(1)} - s_{11}^{(1)}\epsilon_{11}^{(1)}$$

$\bar{A}$  – величина, комплексно сопряженная с  $A$ , постоянные  $A_m^{(1)}$  определяются из системы уравнений ( $h$  – толщина пластины).

Определитель этой системы

$$\Delta = -8i \operatorname{Im} \mu_1 \operatorname{Im} \mu_2 \operatorname{Im} \mu_3 |\mu_1 \mu_2 \mu_3|^{-2} \times \\ \times |(\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)(\mu_2 - \bar{\mu}_1)(\mu_3 - \bar{\mu}_1)(\mu_3 - \bar{\mu}_2)| \neq 0$$

Для вычисления величин  $\alpha_{vm}^{(1)}$  привлечем условия сопряжения (1.1) на всей оси  $x_1$ . Подстановка функций (2.1) в эти условия приводит к соотношениям, однозначно определяющим матрицу  $\|\alpha_{vm}^{(1)}\|$  ( $v = 1, 2, \dots, 6; m = 1, 2, 3$ )

$$\sum_{v=1}^3 (\overline{c_{kv}^{(1)}} \alpha_{vm}^{(1)} + c_{kv}^{(2)} \alpha_{v+3,m}^{(1)}) = c_{km}^{(1)} \quad (m = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, 6). \quad (2.3)$$

Этим завершается построение фундаментального решения (2.1).

Если сосредоточенная сила приложена в точке  $(x'_{10}, x'_{30})$  нижней полуплоскости, то фундаментальное решение имеет вид

$$\Phi_v^{(1)}(z_v^{(1)}) = \sum_{m=1}^3 \frac{\alpha_{v+3,m}^{(2)} A_m^{(2)}}{z_v^{(1)} - z_{m1}^{(2)}}, \quad z_{m1}^{(2)} = x'_{10} + \mu_m^{(2)} x'_{30} \quad (2.4)$$

$$\Phi_v^{(2)}(z_v^{(2)}) = \frac{A_v^{(2)}}{z_v^{(2)} - z_{v1}^{(2)}} - \sum_{m=1}^3 \frac{\overline{\alpha_{vm}^{(2)}} \overline{A_m^{(2)}}}{z_v^{(2)} - \bar{z}_{m1}^{(2)}} \quad (v = 1, 2, 3)$$

причем  $A_v^{(2)}$ ,  $\alpha_{vm}^{(2)}$  определяются соответственно из уравнений (2.2), (2.3), в которых у всех величин верхние индексы 1 и 2 необходимо поменять местами.

3. Решение основной задачи, поставленной в разд. 1, будем разыскивать в виде

$$W_v^{(r)}(z_v^{(r)}) = \Phi_v^{(r)}(z_v^{(r)}) + \Psi_v^{(r)}(z_v^{(r)}) \quad (v = 1, 2, 3; r = 1, 2) \quad (3.1)$$

причем функции  $\Phi_v^{(r)}(z_v^{(r)})$  определены в (2.1)–(2.3), а  $\Psi_v^{(r)}(z_v^{(r)})$ , учитывающие возмущения, вносимые межфазной трещиной, подлежат определению.

Используем идею аналитического продолжения  $\Psi_v^{(r)}(z_v^{(r)})$  следующим образом. Функции  $\Psi_v^{(1)}(z)$  ( $\Psi_v^{(2)}(z)$ ) аналитически продолжим через участки  $|x_1| \geq a$  в нижнюю (верхнюю) полуплоскость при помощи функций  $\overline{\Psi_v^{(1)}}(z)$  ( $\overline{\Psi_v^{(2)}}(z)$ ), удовлетворяющих соотношению  $\overline{\Psi_v^{(1)+}}(x_1) = \overline{\Psi_v^{(1)-}}(x_1)$  ( $\overline{\Psi_v^{(2)-}}(x_1) = \overline{\Psi_v^{(2)+}}(x_1)$ ). При этом учитываем

определение  $\bar{\Psi}(z) = \overline{\Psi(\bar{z})}$ , а под  $\Psi^\pm(x_1)$  понимаем соответствующие предельные значения функции  $\Psi(z)$ . С учетом сказанного получаем из (1.3)

$$U_k^+(x_1) = \sum_{\nu=1}^3 \left\{ c_{k\nu}^{(1)} \Psi_\nu^{(1)+}(x_1) + \overline{c_{k\nu}^{(1)}} \overline{\Psi_\nu^{(1)-}}(x_1) \right\} + 2 \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^3 c_{k\nu}^{(1)} \Phi_\nu^{(1)}(x_1) \quad (3.2)$$

$$U_k^-(x_1) = \sum_{\nu=1}^3 \left\{ c_{k\nu}^{(2)} \Psi_\nu^{(2)-}(x_1) + \overline{c_{k\nu}^{(2)}} \overline{\Psi_\nu^{(2)+}}(x_1) \right\} + 2 \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^3 c_{k\nu}^{(2)} \Phi_\nu^{(2)}(x_1)$$

Введем функции

$$F_k(z) = \begin{cases} f_k(z) = \sum_{\nu=1}^3 \{ c_{k\nu}^{(1)} \Psi_\nu^{(1)}(z) - \overline{c_{k\nu}^{(2)}} \overline{\Psi_\nu^{(2)}}(z) \}, & x_3 > 0 \\ f_k(z) = \sum_{\nu=1}^3 \{ c_{k\nu}^{(2)} \Psi_\nu^{(2)}(z) - \overline{c_{k\nu}^{(1)}} \overline{\Psi_\nu^{(1)}}(z) \}, & x_3 < 0 \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots, 6) \quad (3.3)$$

В силу равенств (1.3) и непрерывной продолжимости функций  $U_k$  ( $k=1, 2, 5, 6$ ) через линию раздела сред, получаем

$$f_k^+(x_1) - f_k^-(x_1) = U_k^+(x_1) - U_k^-(x_1) = 0 \quad (3.4)$$

Следовательно, функции  $f_k(z)$  ( $k=1, 2, 5, 6$ ) с элементами  $f_k(z)$  при  $\operatorname{Im} z > 0$  и  $f_k(z)$  при  $\operatorname{Im} z < 0$  аналитичны в полной  $z$ -плоскости и их можно положить равными нулю.

Из соотношений (3.3) следуют предельные равенства

$$\sum_{\nu=1}^3 \{ c_{k\nu}^{(1)} \Psi_\nu^{(1)+}(x_1) - \overline{c_{k\nu}^{(2)}} \overline{\Psi_\nu^{(2)+}}(x_1) \} = f_k^+(x_1) \quad (3.5)$$

$$\sum_{\nu=1}^3 \{ \overline{c_{k\nu}^{(1)}} \overline{\Psi_\nu^{(1)-}}(x_1) - c_{k\nu}^{(2)} \Psi_\nu^{(2)-}(x_1) \} = -f_k^-(x_1) \quad (k=1, 2, \dots, 6)$$

которые в силу (3.2), (3.4) и граничных условий  $U_k^+ = U_k^- = 0$  ( $k=1, 2$ ) приводят к следующей матричной задаче Римана на интервале  $(-a, a)$ :

$$Bf^+(x_1) - \bar{B}f^-(x_1) = R(x_1) \quad (3.6)$$

$$B = \| \| b_{ij} \| \| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{26} \end{vmatrix} = AC_*^{-1}, \quad R(x_1) = \begin{vmatrix} N_1 \\ N_2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)} & c_{13}^{(1)} & \overline{c_{11}^{(2)}} & \overline{c_{12}^{(2)}} & \overline{c_{13}^{(2)}} \\ c_{21}^{(1)} & c_{22}^{(1)} & c_{23}^{(1)} & \overline{c_{21}^{(2)}} & \overline{c_{22}^{(2)}} & \overline{c_{23}^{(2)}} \end{vmatrix}, \quad N_k = -4 \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^3 c_{k\nu}^{(2)} \Phi_\nu^{(2)}(x_1)$$

$$C_* = \begin{vmatrix} c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)} & c_{13}^{(1)} & -\overline{c_{11}^{(2)}} & -\overline{c_{12}^{(2)}} & -\overline{c_{13}^{(2)}} \\ c_{21}^{(1)} & c_{22}^{(1)} & c_{23}^{(1)} & -\overline{c_{21}^{(2)}} & -\overline{c_{22}^{(2)}} & -\overline{c_{23}^{(2)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{61}^{(1)} & c_{62}^{(1)} & c_{63}^{(1)} & -\overline{c_{61}^{(2)}} & -\overline{c_{62}^{(2)}} & -\overline{c_{63}^{(2)}} \end{vmatrix}, \quad f^\pm(x_1) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3^\pm \\ f_4^\pm \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Подберем теперь векторы  $(\rho_{k1}, \rho_{k2})$  и числа  $\lambda_k$  ( $k=1, 2$ ) таким образом, чтобы они были собственными векторами и соответствующими характеристическими числами следующих однородных систем:

$$\rho_{k1}(\bar{b}_{13} + \lambda_k b_{13}) + (-1)^{k-1} \rho_{k2}(\bar{b}_{23} + \lambda_k b_{23}) = 0 \quad (k=1, 2) \quad (3.7)$$

$$\rho_{k1}(\bar{b}_{14} + \lambda_k b_{14}) + (-1)^{k-1} \rho_{k2}(\bar{b}_{24} + \lambda_k b_{24}) = 0 \quad (k=1, 2) \quad (3.8)$$

Тогда (3.6) сведется к двум скалярным задачам Римана

$$\rho_k^+(x_1) + \lambda_k \rho_k^-(x_1) = N_k^*(x_1), \quad |x_1| < a \quad (k=1,2) \quad (3.9)$$

$$\rho_k(x_1) = \sum_{j=3}^4 d_{kj} f_j(x_1), \quad d_{kj} = \frac{2i \operatorname{Im}(b_{1j} \bar{b}_{2j})}{\bar{b}_{2j} + \lambda_k b_{2j}} \quad (j=3,4)$$

$$N_k^* = \rho_{k1} N_1(x_1) + (-1)^{k-1} \rho_{k2} N_2(x_1)$$

Фигурирующие в (3.9) характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2$  находятся из условий нетривиальной разрешимости систем (3.7), (3.8). Эти условия сводятся к следующему квадратному уравнению:

$$\lambda_{1,2}^2 + 2r_1 \lambda_{1,2} + r_2 = 0 \quad (3.10)$$

$$r_1 = \frac{\operatorname{Re}(\bar{b}_{13} b_{24} - \bar{b}_{23} b_{14})}{b_{13} b_{24} - b_{14} b_{23}}, \quad r_2 = \frac{\bar{b}_{13} \bar{b}_{24} - \bar{b}_{23} \bar{b}_{14}}{b_{13} b_{24} - b_{14} b_{23}}$$

Очевидно, корни уравнения (3.10) можно представить так:

$$\lambda_1 = \frac{1}{R} e^{-i\Theta}, \quad \lambda_2 = R e^{-i\Theta}, \quad \Theta = -\frac{1}{2} \arg r_2 \quad (3.11)$$

$$\operatorname{Im} R = 0, \quad 0 \leq \Theta < 2\pi$$

Решая задачи (3.9), находим [7]

$$\rho_k(z) = \{D_k(z) + M_k\} X_k(z) \quad (k=1,2) \quad (3.12)$$

$$D_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{N_k^*(x) dx}{(x-z) X_k(x)}, \quad \gamma_2 = \bar{\gamma}_1$$

$$X_k(z) = (z+a)^{-\gamma_k} (z-a)^{\gamma_k-1}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2} - \frac{\Theta}{2\pi} + \frac{i}{2\pi} \ln R$$

где  $X_k(x) = X_k^+(x)$  – значения канонических функций  $X_k(z)$  на верхнем берегу разреза,  $M_k$  – произвольные комплексные постоянные.

Для фиксации этих постоянных необходимо позаботиться, во-первых, чтобы вектор перемещения был непрерывно продолжим через участки  $|x_1| \geq a$  (в условия сопряжения входят производные от перемещений). Это условие будет выполнено, если между  $M_1$  и  $M_2$  имеет место соотношение  $\bar{M}_2 = \lambda_1 M_1$ . Далее привлечем условия однозначности перемещений в составной плоскости

$$\int_c du_i = - \int_{-a}^a d[u_i] = 0 \quad (i=1,2) \quad (3.13)$$

где  $c$  – произвольный замкнутый контур, охватывающий отрезок  $[-a, a]$  оси  $x_1$ ,  $[u]$  – скачок функции  $u$  при переходе через разрез.

Вводя сюда выражение  $u_i(x_1)$  из (1.3) и учитывая соотношения (3.1), (3.12), находим после преобразований

$$M_i = \frac{2}{1 + \lambda_i} \sum_{m=1}^3 (A_m^{(1)} \Omega_{i1}^{(m)} + \overline{A_m^{(1)}} \overline{\Omega_{i2}^{(m)}}) \quad (i=1,2) \quad (3.14)$$

$$\Omega_{11}^{(m)} = \Omega_{22}^{(m)} = - \sum_{v=1}^3 \sum_{j=1}^2 \rho_{1j} c_{jv}^{(2)} \alpha_{v+3,m}^{(1)} \quad (m=1,2,3)$$

$$\Omega_{21}^{(m)} = \Omega_{12}^{(m)} = \sum_{v=1}^3 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \rho_{2j} c_{jv}^{(2)} \alpha_{v+3,m}^{(1)} \quad \rho_{k1} = 1$$

$$\rho_{k2} = (-1)^k (\bar{b}_{13} + \lambda_k b_{13})(\bar{b}_{23} + \lambda_k b_{23})^{-1} \quad (k=1,2)$$

Выразим теперь искомые функции через  $f_k(z)$  из равенств (3.3). Имеем

$$\Psi_v^{(1)}(z) = \sum_{j=3}^4 l_{vj} f_j(z), \quad \text{Im } z > 0 \quad (v=1,2,3)$$

$$\Psi_v^{(2)}(z) = - \sum_{j=3}^4 \bar{l}_{v+3,j} f_j(z), \quad \text{Im } z < 0$$

где  $l_{mj}$  ( $m = 1, 2, \dots, 6; j = 3, 4$ ) – элементы матрицы  $C_*^{-1}$ .

Подставляя сюда функции  $f_3(z), f_4(z)$ , найденные из уравнений (3.12), выполняя необходимые квадратуры и учитывая формулы (3.14), находим окончательно

$$\begin{aligned} \Psi_v^{(r)}(z_v^{(r)}) &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^2 \left\{ \left( \frac{1 - X_n(z_v^{(r)}) X_n^{-1}(z_{m0}^{(1)})}{z_v^{(r)} - z_{m0}^{(1)}} + X_n(z_v^{(r)}) \right) \Omega_{n1}^{(m)} \times \right. \\ &\times \gamma_{nv}^{(r)} A_m^{(1)} + \left. \left( \frac{1 - X_n(z_v^{(r)}) X_n^{-1}(\bar{z}_{m0}^{(1)})}{z_v^{(r)} - \bar{z}_{m0}^{(1)}} + X_n(z_v^{(r)}) \right) \overline{\Omega_{n2}^{(m)} \gamma_{nv}^{(r)} A_m^{(1)}} \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\gamma_{nv}^{(r)} = \frac{2L_{nv}^{(r)}}{(1 + \lambda_n) d_0}, \quad d_0 = d_{13} d_{24} - d_{14} d_{23}$$

$$L_{nv}^{(1)} = \sum_{j=3}^4 (-1)^{n-j} m_{nj} l_{vj}, \quad L_{nv}^{(2)} = - \sum_{j=3}^4 (-1)^{n-j} m_{nj} \bar{l}_{v+3,j}$$

$$m_{n3} = \frac{d_{14} d_{24}}{d_{n4}}, \quad m_{n4} = \frac{d_{13} d_{23}}{d_{n3}} \quad (v=1,2,3; r=1,2)$$

Таким образом, функция Грина для составной пьезокерамической плоскости с межфазной трещиной определяется в явном виде по соотношениям (3.1), (2.1) и (3.15). Из аналитического представления функции Грина следует, что механические напряжения, а также компоненты электрического поля в вершинах межфазной трещины имеют степенные особенности, усиленные осцилляцией в малых окрестностях точек  $x_1 = \pm a$ . Это явление имеет место и для составных изотропных сред [8].

4. Для определения коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах межфазной трещины оставим в выражениях (3.15) лишь члены, содержащие канонические функции  $X_n(z)$ . Тогда получим в окрестности точек  $x_1 = \pm a$ :

при  $x_1 > a$

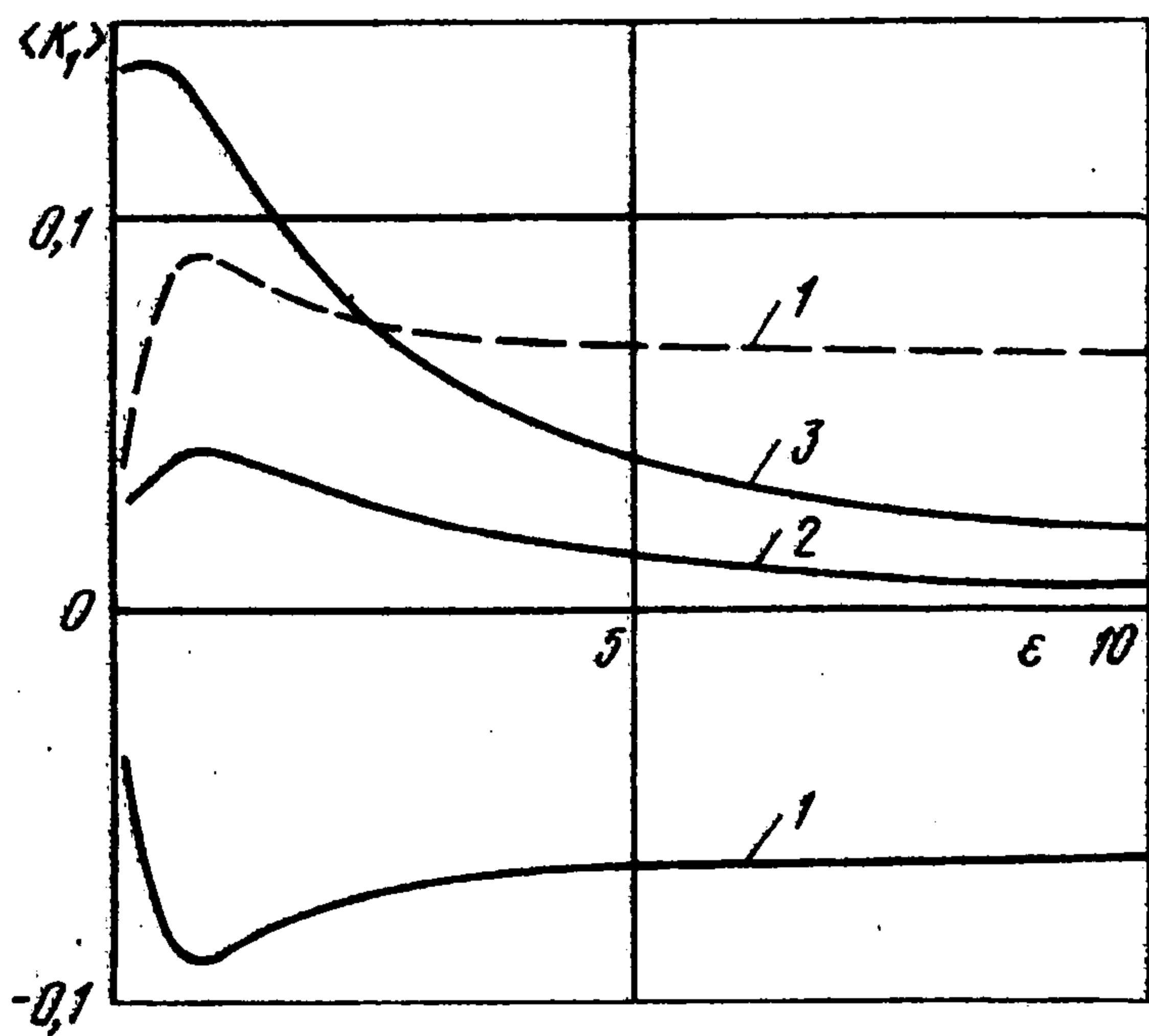
$$\{V_k^{(r)}\} = 4 \text{Re} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^2 A_m^{(1)} \left\{ \frac{(x_1 - a)^{\gamma_n - 1}}{(2a)^{\gamma_n}} \Omega_{1n}^{(m)} D_{kn} \left[ \left( \frac{z_{m0}^{(1)} + a}{z_{m0}^{(1)} - a} \right)^{\gamma_n} + 1 \right] \right\} + O(1) \quad (4.1)$$

при  $x_1 < -a$

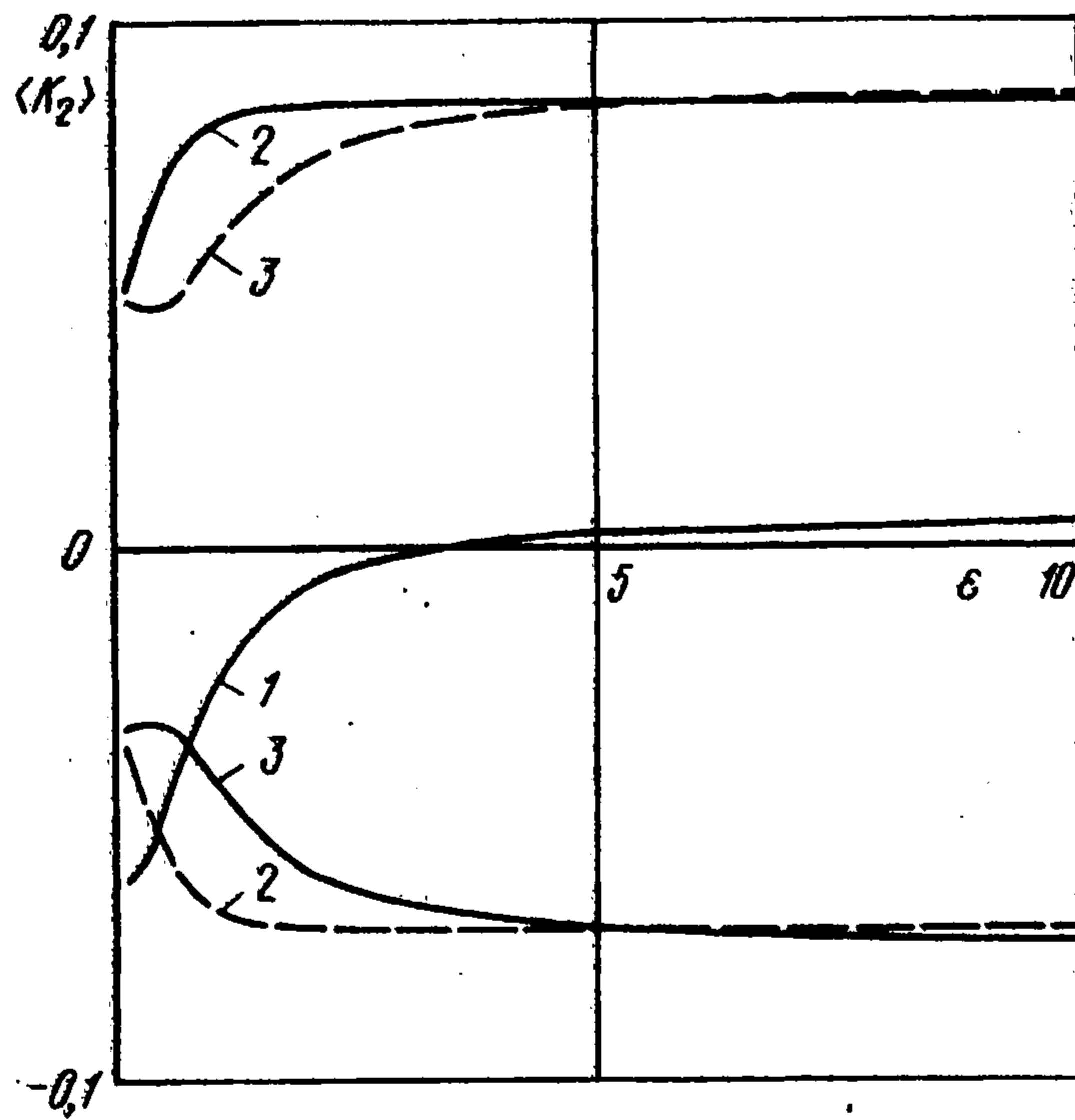
$$\{V_k^{(r)}\} = -4 \text{Re} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^2 A_m^{(1)} \left\{ \frac{(x_1 + a)^{-\gamma_n}}{(2a)^{1-\gamma_n}} \Omega_{1n}^{(m)} D_{kn} \left[ \left( \frac{z_{m0}^{(1)} - a}{z_{m0}^{(1)} + a} \right)^{1-\gamma_n} + 1 \right] \right\} + O(1)$$

$$V_1^{(r)} = \sigma_{33}^{(r)}, \quad V_2^{(r)} = -\sigma_{13}^{(r)} \quad (r=1,2)$$

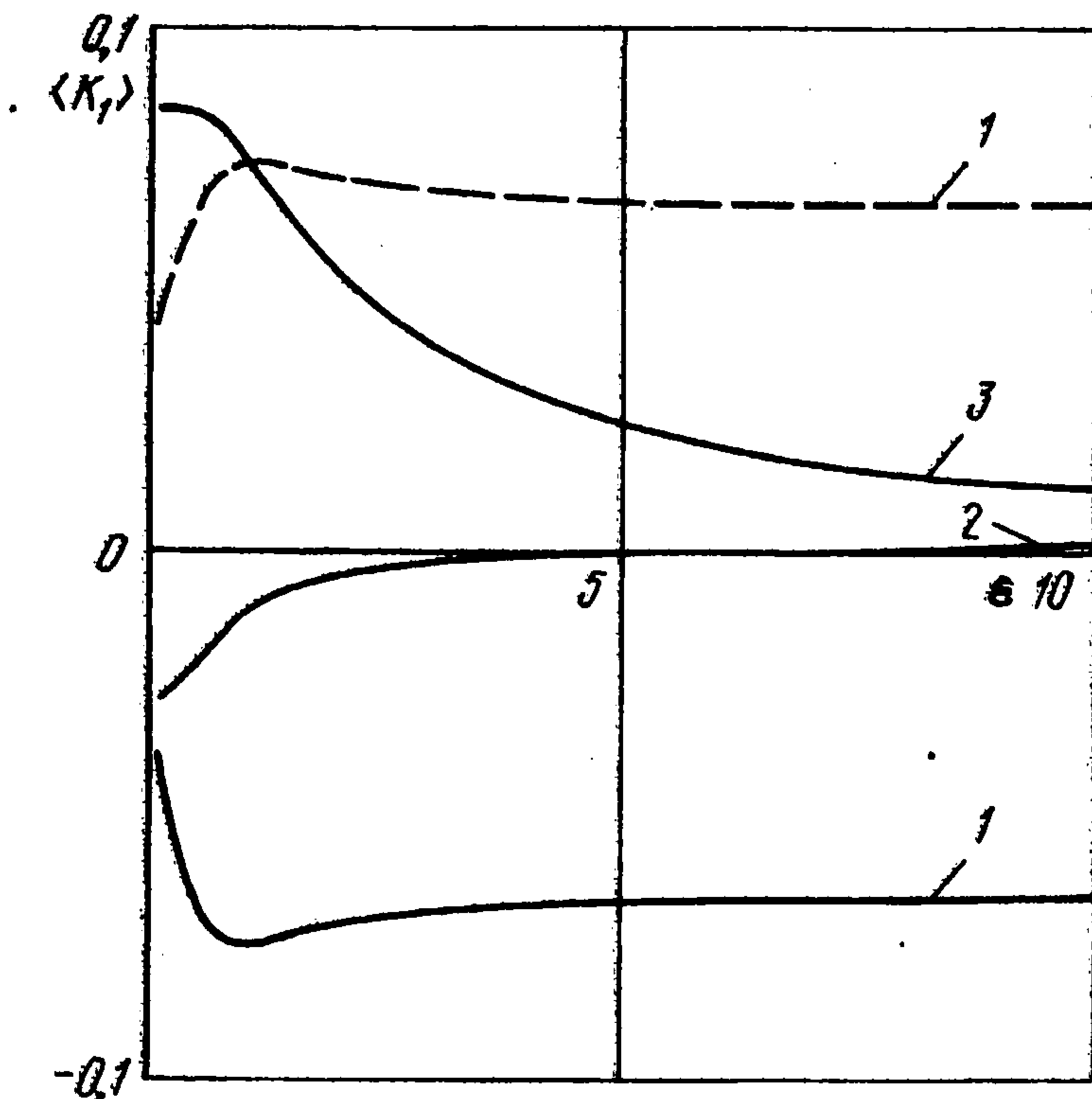
$$D_{k1}^{(1)} = \sum_{v=1}^3 \sum_{j=3}^4 (-1)^{j-1} c_{kv}^{(1)} l_{vj} m_{1j}, \quad D_{k2} = \bar{D}_{k1}, \quad D_{k1} = D_{k1}^{(1)} d_0^{-1}$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Как и следовало ожидать, полученные выражения для  $V_k^{(r)}$  не зависят от  $r$ . Коэффициенты интенсивности механических напряжений определим в соответствии с выписанной выше асимптотикой следующим образом. В вершине  $x_1 = a$

$$K_j^+ = \lim \left\{ \left( \frac{x_1}{a} - 1 \right)^{1/2 + \Theta/(2\pi)} \sigma_j(x_1) \right\} = \frac{\Lambda}{ah} \langle K_j^+ \rangle, \quad x_1 \rightarrow a \quad (x_1 > a) \quad (4.2)$$

$$\sigma_1(x_1) = \sigma_{33}, \quad \sigma_2(x_1) = \sigma_{13}, \quad B_m^{(1)} = h \left[ P_1^2 + P_3^2 + \left( \frac{\rho}{d_{33}^{(1)}} \right)^2 \right]^{-1/2} A_m^{(1)}$$

$$\langle K_j^+ \rangle = 4 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^3 B_m^{(1)} \sum_{n=1}^2 \frac{\Omega_{1n}^{(m)} D_{jn}}{2^{\gamma_n}} \left\{ \left( \frac{z_{m0}^{(1)} + a}{z_{m0}^{(1)} - a} \right)^{\gamma_n} + 1 \right\} \quad (j=1,2)$$

В вершине  $x_1 = -a$

$$K_j^- = \lim \left\{ \left| \frac{x_1}{a} + 1 \right|^{1/2 - \Theta/(2\pi)} \sigma_j(x_1) \right\} = \frac{\Lambda}{ah} \langle K_j^- \rangle, \quad x_1 \rightarrow -a \quad (x_1 < -a) \quad (4.3)$$

$$\langle K_j^- \rangle = -4 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^3 B_m^{(1)} \sum_{n=1}^2 \frac{\Omega_{1n}^{(m)} D_{jn}}{2^{1-\gamma_n}} \left\{ \left( \frac{z_{m0}^{(1)} - a}{z_{m0}^{(1)} + a} \right)^{1-\gamma_n} + 1 \right\}$$

Здесь  $\Lambda = P$  при  $P = \sqrt{P_1^2 + P_3^2} > 0$ ,  $\rho = 0$  и  $\Lambda = \rho/d_{33}^{(1)}$  при  $\rho \neq 0$ ,  $P = 0$ .

При вычислении указанных пределов было принято [8], что  $\operatorname{Im} \gamma_1 \cdot \ln |x_1 \pm a| \approx 0$ . Расчеты подтверждают справедливость этого приближенного равенства.

В "микроскопической" окрестности вершины физическая некорректность решения, связанная с тем обстоятельством, что напряжения бесконечное число раз меняют знак, все же остается.

5. Указанный подход без принципиальных изменений распространяется и на случай отнесенной к декартовой системе  $x_1 O x_2$  составной анизотропной плоскости с межфазной трещиной на границе раздела. Функция Грина определяется формулами (3.15), где суммирование по  $m$  ведется от 1 до 2, а коэффициенты  $c_{kv}$  ( $k, v = 1, 2$ ) таковы:  $c_{1v} = 1$ ,  $c_{2v} = \mu_v$ ,  $c_{3v} = \alpha_{11} \mu_v^2 - a_{16} \mu_v + a_{12}$ ,  $c_{4v} = a_{12} \mu_v - a_{26} + a_{12} / \mu_v$  ( $a_{ik}$  — упругие параметры материала,  $\mu_v$  — соответствующие им характеристические числа [9]). Под  $\sigma_1, \sigma_2$  в (4.2), (4.3) подразумеваются теперь компоненты тензора напряжения  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{12}$  соответственно ( $\rho = 0$ ).

6. В качестве примера рассмотрим пару PZT-5 (верхняя полуплоскость), BaTiO<sub>3</sub> (нижняя полуплоскость) с межфазной трещиной  $x_3 = 0$ ,  $-a < x_1 < a$ , нагруженную сосредоточенной силой ( $P_1, P_3$ ) или зарядом  $\rho$  в точке  $x_{10} = 0$ ,  $x_{30} = H > 0$ . Изменение величины  $\langle K_1^\pm \rangle$  в функции от параметра  $\varepsilon = H/a$  показано на фиг. 2, где кривые 1–3 построены для случаев  $P_1 \neq 0, P_3 = \rho = 0$ ;  $\rho \neq 0, P_1 = P_3 = 0$  и  $P_3 \neq 0, P_1 = \rho = 0$  соответственно. Сплошные кривые характеризуют  $\langle K_1^- \rangle$ , штриховые —  $\langle K_1^+ \rangle$ . Аналогичные результаты для величины  $\langle K_2^\pm \rangle$  представлены на фиг. 3.

Если поменять местами компоненты пары, то результаты изменятся. Для этого случая на фиг. 4 приведены данные для величины  $\langle K_1^\pm \rangle$ . В расчетах полагали  $P/h = 1$ ,  $\rho/(d_{33}^{(1)} h) = 1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белокопытова Л.В., Иваненко О.А., Фильштинский Л.А. Сосредоточенная сила или заряд в пьезокерамической пластине с трещиной // Упругость и пластичность. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. С. 12–19.
2. Белокопытова Л.В., Иваненко О.А., Фильштинский Л.А. Передача нагрузки от упругого ребра к полубесконечной пьезокерамической пластинке // Изв. АН АрмССР. Сер. Механика. 1981. Т. 34. № 5. С. 41–51.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
4. Гринченко В.Т., Улитко А.ф., Шульга А.Н. Электроупругость. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Киев: Наук. думка. 1989. 279 с.
5. Морс Ф.М., Фейсбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 920 с.
6. Фильштинский Л.А. Краевые задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 72–79.
7. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения: Граничные задачи теории функции и некоторые приложения к математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
8. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
9. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.

Сумы

Поступила в редакцию  
11.V.1993