ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 58, Вып. 2, 1994

УДК 539.319

© 1994 г. Германович Л.Н., Долотов М.В., Килль И.Д.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА В СЛУЧАЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Получена асимптотика при $t \to 0$ решении осесимметричной динамической задачи термоупругости для полупространства, нагреваемого источниками тепла. Оценена погрешность асимптотического представления решения.

При определенных режимах воздействия концентрированного потока энергии (лазерного луча, электронного пучка и т.п.) на твердое тело в последнем возникают температурные напряжения, которые приводят к его хрупкому разрушению [1–5]. Во многих случаях появление термоупругих напряжений обусловлено тем, что поглощенная в материале энергия приводит к возникновению внутренних источников тепла. Определение напряжений в облучаемом твердом теле является основным этапом в исследовании процесса разрушения. При использовании структурных представлений считается, что разрушение обусловлено дефектами (трещинами), развитие которых определяется макроскопическими напряжениями в микродефектном материале.

Разрушение концентрированными потоками энергии материалов со слабым поглощением не определяется лишь термоупругими напряжениями, но происходит на их фоне при малых временах воздействия [6]. Материалы с сильным поглощением также разрушаются, как правило, за небольшие времена [1]. Поэтому представляет интерес получение простого приближенного решения задачи термоупругости для малых значений времени нагрева при контроле погрешности такого решения.

Наиболее простой и естественной моделью облучаемого тела является упругое полупространство. Если характерное время разрушения $t \gg L/c$, где L – характерный размер области, охваченной разрушением, c – скорость распространения упругих возмущений, то для определения напряжений в этой области можно использовать квазистатические решения для полупространства [1, 4, 7–9]. Если $t \leqslant L/c$, то квазистатического решения, очевидно, недостаточно и следует рассматривать решение динамической задачи.

Интенсивность концентрированного потока энергии во многих случаях убывает с глубиной экспоненциально (закон Бугера [3]). Поэтому наибольший интерес представляет случай экспоненциального убывания с глубиной плотности внутренних источников тепла. Соответствующие одномерные динамические задачи термоупругости рассмотрены в работах [10–13].

В действительности, однако, интенсивность в поперечном сечении потока обычно распределена по некоторому куполообразному закону. Это естественно аппроксимировать какой-либо функцией достаточно быстро убывающей на бесконечности, что учитывает и более сложные случаи распределения интенсивности, характерные наличием нескольких "куполов" [14]. Характерный размер пятна нагрева фактически определяет поперечный размер разрушаемой области. Поэтому наибольший интерес для приложений представляет определение динамического осесимметричного напряженного состояния в теле при малых временах нагрева.

В [15] рассматривалась осесимметричная динамическая задача для полупространства с граничным условием второго рода и конечной скоростью распространения тепла. Относительно простая асимптотика получена в случае точечного источника при $t \to \infty$ для смещений в релеевской волне и при $\rho \to \infty$ (ρ – расстояние от точки приложения теплового воздействия) скачков смещений на фронтах упругих волн. Исследование напряженного состояния в окрестности приложения теплового возмущения на основании результатов этой работы затруднительно.

Ниже динамические температурные напряжения в облучаемом теле изучаются на основе модели упругого полупространства, в котором действуют осесимметрично распределенные источники тепла, убывающие с глубиной экспоненциально. При этом асимптотика при $t \to 0$ выделяется из точного решения. Работа является продолжением исследований [8, 9], где аналогичные задачи термоупругости рассмотрены в квазистатической постановке, а также работы [16], где рассмотрена аналогичная динамическая упругая бестемпературная задача.

1. В цилиндрических координатах r, φ, z рассмотрим упругое полупространство $z \geqslant 0$, которое до момента времени $t = 0$ находится в покое при температуре $T = 0$. С момента времени $t = 0$ в полупространстве действуют распределенные источники тепла с плотностью

$$q = q_0 f(r) e^{-\gamma z} \tag{1.1}$$

причем функция $f(r)$ допускает преобразование Ганкеля. На границе полупространства $z = 0$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры. Требуется найти напряжения в полупространстве с учетом динамических составляющих.

Перейдем к безразмерным величинам, полагая

$$\begin{gathered} T' = \frac{Tkc_1^2}{q_0 a^2}, \quad r' = \frac{rc_1}{a}, \quad z' = \frac{zc_1}{a}, \quad \delta' = \frac{\delta c_1}{a} \\ t' = \frac{tc_1^2}{a}, \quad h' = \frac{ha}{c_1}, \quad \alpha' = \frac{\alpha q_0 a^2}{kc_1^2}, \quad \gamma' = \frac{\gamma a}{c_1} \end{gathered} \tag{1.2}$$

где k – коэффициент теплопроводности, a – коэффициент температуропроводности, h – относительный коэффициент теплообмена, α – коэффициент линейного расширения, δ – характерный размер распределения $f(r)$, c_1 – скорость продольных упругих волн. Штрихи при написании безразмерных величин далее опускаем.

Для краевой задачи теплопроводности

$$\begin{gathered} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + f(r)e^{-\gamma z}, \quad T|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = hT|_{z=0} \\ |T(r,z,t)| < \infty, \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \end{gathered} \tag{1.3}$$

изображение температуры имеет вид [9]

$$\begin{gathered} T^*(r,z,s) = \int_0^\infty \lambda f^H(\lambda) J_0(\lambda r) F(\lambda,z,s)\,d\lambda, \quad F(\lambda,z,s) = \frac{e^{-\gamma z}}{s(\omega^2-\gamma^2)} - \frac{(\gamma+h)e^{-\omega z}}{s(\omega^2-\gamma^2)(\omega+h)} \\ T^* = L_s\{T\} = \int_0^\infty T(r,z,t)e^{-st}dt, \quad f^H(\lambda) = H_\lambda\{f(r)\} = \int_0^\infty rf(r)J_0(\lambda r)dr \\ \omega = \sqrt{s+\lambda^2}, \quad \arg\omega = 0 \ \text{при} \ s > 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

J_n – функция Бесселя первого рода.

Для определения термоупругих потенциалов перемещений требуется решить краевые задачи для волновых уравнений

$$\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = m_0 T, \quad \left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)\Psi - \varepsilon^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.5}$$

$$\Phi|_{t=0} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi|_{t=0} = \left.\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad |\Phi| < \infty, \quad |\Psi| < \infty$$

$$m_0 = \frac{1-\nu}{1+\nu}\alpha, \quad \varepsilon^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}$$

где ν – коэффициент Пуассона, c_2 – скорость поперечных упругих волн.

Решения задач (1.5) определяются с помощью преобразования Лапласа по t и преобразований Ганкеля нулевого и первого порядка по r. Для изображений потенциалов при этом получаем

$$\Phi^*(r,z,s) = \int_0^\infty \lambda C(\lambda,s) J_0(\lambda r) e^{-R_1 z} d\lambda -$$

$$-m_0 \int_0^\infty \lambda f^H(\lambda) J_0(\lambda r) \frac{1}{s(\omega^2-\gamma^2)} \left[\frac{e^{-\gamma z}}{R_1^2-\gamma^2} - \frac{(\gamma+h)e^{-\omega z}}{(R_1^2-\omega^2)(\omega+h)} \right] d\lambda \tag{1.6}$$

$$\Psi^*(r,z,s) = \int_0^\infty \lambda D(\lambda,s) J_1(\lambda r) e^{-R_2 z} d\lambda$$

$$R_1 = \sqrt{s^2+\lambda^2}, \quad R_2 = \sqrt{\varepsilon^2 s^2 + \lambda^2}, \quad \arg R_1 = \arg R_2 = 0 \text{ при } s > 0$$

Определяя изображения напряжений, соответствующие Φ^* и Ψ^*, находим затем неизвестные функции $C(\lambda, s)$ и $D(\lambda, s)$ из граничных условий

$$\left.\sigma_{zz}^*\right|_{z=0} = \left.\sigma_{rz}^*\right|_{z=0} = 0 \tag{1.7}$$

Окончательно для изображений искомых напряжений получаем:

$$\frac{\sigma_{jj}^*}{2m_0 G} = -T^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \int_0^\infty \lambda f^H(\lambda) J_0(\lambda r) s^2 \{Q(\lambda,z,s) + \lambda^2 \xi_3 e_1\} d\lambda +$$

$$+\int_0^\infty \lambda^3 f^H(\lambda) u_j(\lambda r) \left\{ Q(\lambda,z,s) + \xi_3 \left(\lambda^2 e_{12} - \frac{\varepsilon^2 s^2}{2} e_2 \right) \right\} d\lambda, \quad j = r, \varphi$$

$$\frac{\sigma_{zz}^*}{2m_0 G} = \int_0^\infty \lambda f^H(\lambda) J_0(\lambda r) R^2 \{Q(\lambda,z,s) + \lambda^2 \xi_3 e_{12}\} d\lambda \tag{1.8}$$

$$\frac{\sigma_{rz}^*}{2m_0 G} = \int_0^\infty \lambda^2 f^H(\lambda) J_1(\lambda r) \left\{ \gamma \xi_1 e_{R\gamma} - \omega \xi_2 e_{R\omega} + \left[\frac{P(\lambda,s)}{R_2} + \lambda^2 R_1 \right] \xi_3 e_{12} \right\} d\lambda$$

$$u_r(\lambda r) = J_1(\lambda r)/(\lambda r) - J_0(\lambda r), \quad u_\varphi(\lambda r) = -J_1(\lambda r)/(\lambda r)$$

$$R^2 = \varepsilon^2 s^2/2 + \lambda^2, \quad e_1 = e^{-R_1 z}, \quad e_2 = e^{-R_2 z}, \quad e_{12} = e_1 - e_2, \quad e_{R\gamma} = e^{-R_1 z} - e^{-\gamma z}$$

$$e_{R\omega} = e^{-R_1 z} - e^{-\omega z}, \quad \xi_1 = \frac{1}{s(\omega^2-\gamma^2)(R_1^2-\gamma^2)}, \quad \xi_2 = \frac{\gamma+h}{s(\omega^2-\gamma^2)(R_1^2-\omega^2)(\omega+h)}$$

$$\xi_3 = \frac{R_2}{P(\lambda,s)}[(R_1-\gamma)\xi_1 - (R_1-\omega)\xi_2], \quad P(\lambda,s) = R^4 - \lambda^2 R_1 R_2$$

$$Q(\lambda,z,s) = \xi_1 e_{R\gamma} - \xi_2 e_{R\omega}$$

G – модуль сдвига.

Оригиналы, соответствующие изображениям (1.8), могут быть формально записаны с помощью теоремы обращения. Применение полученного таким образом решения для практических расчетов затруднительно.

2. При получении асимптотики при $t \to 0$ точного решения ограничимся функциями $f(r)$, удовлетворяющими следующему условию. Будем считать функцию $f^H(\lambda)$ экспоненциально убывающей с ростом λ. Это, в частности, обеспечивает сходимость интегралов

$$A_{mn}(r) = \int_0^\infty \lambda^m f^H(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda, \quad m = 1,2,\ldots; \; n = 0,1 \tag{2.1}$$

Заметим, что указанному условию удовлетворяют часто используемые распределения

$$f(r) = (r/\delta)^{2n} \exp[-r^2/(4\delta^2)], \quad f(r) = \delta^{2n+1}(r^2+\delta^2)^{-(2n+1)/2}, \quad n = 0,1,\ldots$$

Асимптотическое разложение σ_{zz} имеет вид

$$\frac{\sigma_{zz}}{2m_0G} \approx \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1,0}(r)\varphi_n(z,t), \quad t \to 0 \tag{2.2}$$

Метод получения разложения (2.2) продемонстрируем на примере отдельных слагаемых. Рассмотрим слагаемое

$$\sigma_{zz}^{*(1)} e^{zs} = \int_0^\infty \lambda f^H(\lambda) J_0(\lambda r) F_1(\lambda,z,s) d\lambda \tag{2.3}$$

$$F_1(\lambda,z,s) = \frac{R^2 e^{-R_1 z + zs}}{s(\omega^2-\gamma^2)(R_1^2-\gamma^2)}$$

После очевидных преобразований имеем выражение

$$F_1(\lambda,z,s) = \frac{\varepsilon^2 s}{2(s-\gamma^2)(s^2-\gamma^2)} \exp\left[-\frac{\lambda^2 z}{s(1+\sqrt{1+\lambda^2/s^2})}\right] \times$$

$$\times \left(1+\frac{2\lambda^2}{\varepsilon^2 s^2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{s-\gamma^2}\right)^{-1}\left(1+\frac{\lambda^2}{s^2-\gamma^2}\right)^{-1}$$

из которого следует, что ряд

$$F_1(\lambda,z,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^*(z,s)\lambda^{2n} \tag{2.4}$$

сходится при любом фиксированном значении λ и $|s| > M$. Функции $\mu_n^*(z,s)$ – правильные рациональные дроби по s и представимы в окрестности $s = \infty$ в виде рядов Лорана. По первой теореме разложения [17] имеем

$$\mu_n(z,t) = L_t^{-1}\{\mu_n^*(z,s)\} = L_t^{-1}\left\{\frac{d_n(z)}{s^{n+2}} + \ldots\right\} = \frac{d_n(z)}{(n+1)!}t^{n+1} + \ldots$$

$$\mu_{n+1}(z,t) = o(\mu_n(z,t)), \quad t \to 0, \quad n = 0,1,\ldots \tag{2.5}$$

где L_t^{-1} – оператор, обратный L_s. Подставляя (2.4) в (2.3) и интегрируя почленно по λ, получим формальное разложение

$$\sigma_{zz}^{*(1)} e^{zs} \approx \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1,0}(r)\mu_n^*(z,s)$$

Переходя в нем к оригиналам, находим при учете теоремы запаздывания

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r,z,t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1,0}(r)\mu_n(z,t-z), \quad t \to 0^*, \quad t > z \tag{2.6}$$

Можно доказать, что (2.6) действительно является асимптотическим разложением $\sigma_{zz}^{(1)}$ при $t \to 0$.

Первое условие асимптотического разложения выполнено в силу (2.5). Оценим порядок малости при $t \to 0$ величины $r_n(r, z, t)$, равной разности левой части и $n + 1$ первых слагаемых правой части соотношения (2.6). Вследствие соотношений (2.1), (2.3) будем иметь

$$r_n(r,z,t+z)=\int_0^\infty \lambda f^H(\lambda)J_0(\lambda r)L_t^{-1}\{q_n^*(\lambda,z,s)\}d\lambda$$

$$q_n^*(\lambda,z,s)=F_1(\lambda,z,s)-\sum_{k=0}^{n}\mu_k^*(z,s)\lambda^{2k}$$

причем возможность перехода к оригиналу под знаком интеграла обеспечивается равномерной сходимостью соответствующих интегралов, устанавливаемой в предположении экспоненциального убывания $f^H(\lambda)$.

Вследствие соотношений (2.4), (2.5) имеем при $|s| > M$ разложение

$$q_n^*(\lambda,z,s)=b_{n+1}(\lambda,z)/s^{n+3}+\dots$$

используя которое получаем

$$r_n(r,z,t)=o(\mu_n(z,t-z)),\quad t\to 0,\quad t>z \tag{2.7}$$

что означает выполнение второго условия асимптотического разложения.

Асимптотические разложения оригиналов слагаемых, содержащих множители $e^{-R_1 z}$, $e^{-R_2 z}$, $e^{-\gamma z}$ получаются тем же путем, что и для $\sigma_{zz}^{(1)}$, поскольку корнями уравнения $P(\lambda, s) = 0$ являются лишь $s = 0$, $s = \pm i\lambda\vartheta/\varepsilon$, $0 < \vartheta < 1$ [18]. Для изображений, имеющих множитель $(\omega + h)^{-1}$ в соотношениях, подобных (2.5), вместо первой теоремы разложения используется ее обобщение для дробных степеней s [19].

Для получения асимптотического разложения оригинала слагаемого, имеющего множитель $e^{-\omega z}$, используем метод, являющийся, по существу, обобщением метода из [20].

Этот оригинал имеет вид

$$\sigma_{zz}^{(2)}=(\gamma+h)[(\varepsilon^2/2)P_1(r,z,t)+P_2(r,z,t)] \tag{2.8}$$

$$P_k(r,z,t)=\int_0^\infty \lambda^{2k-1}f^H(\lambda)J_0(\lambda r)L_t^{-1}\left\{\frac{\zeta(z,s+\lambda^2)}{s^{2k-2}(s-1)}\right\}d\lambda,\quad k=1,2$$

$$\zeta(z,s)=e^{-z\sqrt{s}}(s-\gamma^2)^{-1}(\sqrt{s}+h)^{-1}$$

Для $P_1(r, z, t)$, используя теоремы свертывания и смещения, затем разлагая $e^{-\lambda^2\tau}$ по формуле Тейлора, меняя порядок интегрирования по λ и τ и интегрируя почленно по λ, будем иметь

$$P_1(r,z,t)=\int_0^\infty \lambda f^H(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda\int_0^t e^{t-\tau}e^{-\lambda^2\tau}L_\tau^{-1}\{\zeta(z,s)\}d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}A_{2k+1,0}(r)\rho_k(z,t)+g_n(r,z,t) \tag{2.9}$$

$$\rho_k(z,t)=\frac{(-1)^k}{k!}e^t\int_0^t\tau^kL_\tau^{-1}\{\zeta(z,s+1)\}d\tau=\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k+m}\frac{t^{k-m}}{(k-m)!}L_t^{-1}\left\{\frac{\zeta(z,s)}{(s-1)^{m+1}}\right\}$$

$$g_n(r,z,t)=e^t\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^t\tau^{n+1}L_\tau^{-1}\{\zeta(z,s+1)\}d\tau\int_0^\infty\lambda^{2n+2}f^H(\lambda)e^{-\lambda^2\vartheta_1\tau}J_0(\lambda r)d\lambda$$

$$0<\vartheta_1<1$$

Последнее выражение для $\rho_k(z, t)$ получено k-кратным интегрированием по частям, с использованием теоремы смещения.

Применяя к интегральному представлению $\rho_{k+1}(z, t)$ обобщенную теорему о среднем [21] ($L_t^{-1}\{\zeta(z,s)\} \geqslant 0$ [20]) получаем

$$\rho_{k+1}(z,t) = -\frac{\vartheta_2 t}{k+1}\rho_k(z,t), \quad 0 < \vartheta_2 < 1$$

$$\rho_{k+1}(z,t) = o(\rho_k(z,t)), \quad t \to 0 \tag{2.10}$$

$$|g_n(r,z,t)| \leqslant |\rho_{n+1}(z,t)| \int_0^\infty \lambda^{2n+2} |f^H(\lambda)| d\lambda$$

$$g_n(r,z,t) = o(\rho_n(z,t)), \quad t \to 0$$

Из (2.10) и (2.9) следует

$$P_1(r,z,t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1,0}(r)\rho_k(z,t), \quad t \to 0 \tag{2.11}$$

Асимптотическое разложение для $P_2(r, z, t)$ получается заменой в (2.11) $A_{2k+1,0}(r)$ на $A_{2k+3,0}(r)$ и двукратным интегрированием на отрезке $[0, t]$.

Складывая все асимптотические разложения слагаемых, образующих σ_{zz} и объединяя члены с одинаковыми множителями $A_{2n+1,0}(r)$ получаем соотношение (2.2).

Аналогичные разложения получаются и для остальных напряжений.

Поскольку $c_1 \sim 10^3$ м/с, $a \sim 10^{-6}$ м^2/с, из пятого соотношения (1.2) следует, что физически малым временам t могут соответствовать большие значения безразмерного времени t'. Поэтому использование асимптотики при $t' \to 0$ для получения приближенного решения требует обоснования. Рассмотрим в связи с этим некоторые особенности асимптотического разложения (2.2). Вернемся на время к обозначениям безразмерных величин штрихованными буквами. Поскольку функция $f(r)$ – безразмерная, $f(r) = f_1(r/\delta) = f_1(r'/\delta')$.

На основании (2.1) и свойств преобразования Ганкеля последовательно находим

$$f^H(\lambda) = \delta'^2 f_1^H(\lambda\delta'), \quad A_{mn}(r) = \frac{1}{\delta'^{m-1}} A_{mn}^{(0)}\left(\frac{r'}{\delta'}\right) \tag{2.12}$$

причем $A_{mn}^{(0)}(r'/\delta')$ имеет одинаковые значения в размерных и безразмерных величинах.

Изображения $\varphi_n^*(z',s) = L_s\{\varphi_n(z',t')\}$ являются коэффициентами разложения в степенной ряд по λ^2 функции

$$\varphi^*(\lambda^2, z', s) = R^2[Q(\lambda, z', s) + \lambda^2 \xi_3 e_{12}]$$

Можно показать, что функция $\varphi^*(\lambda^2, z', s)$ и все ее производные по λ^2 имеют в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ лишь устранимые особые точки.

Поведение $\varphi_n(z', t')$ при $t' \to \infty$ определяется разложением $\varphi_n^*(z', s)$ в окрестности особой точки $s = 0$. Поэтому, используя теорему 35.1 [19], можно доказать справедливость соотношений

$$\varphi_n(z',t') = t'^{2n}\psi_n(z',t') \tag{2.13}$$

где $\psi_n(z', t')$ – ограничены при $t' \to \infty$. Следовательно из (2.2), (2.12), (2.13) получаем разложение

$$\frac{\sigma_{zz}}{2m_0 G} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t'}{\delta'}\right)^{2n} A_{2n+1,0}^{(0)}\left(\frac{r'}{\delta'}\right)\psi_n(z',t'), \quad t' \to 0 \tag{2.14}$$

Поскольку $t'/\delta' = t_1 = c_1 t/\delta$, а коэффициенты при t_1^{2n} в разложении (2.14) ограничены при $t' \to \infty$, можно ожидать, что асимптотика полученная из (2.14) сохранением конечного числа слагаемых будет достаточно точной при $c_1 t/\delta \ll 1$. Окончательно качество полученной асимптотики можно установить путем оценки погрешности.

Ограничимся асимптотическими представлениями точного решения. Вновь опуская штрихи при обозначении безразмерных величин, будем иметь

$$T(r,z,t) = T^{(0)} + \delta_T = f(r)L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-\gamma z}}{s(s-\gamma^2)} - \frac{(\gamma+h)e^{-z\sqrt{s}}}{s(s-\gamma^2)(\sqrt{s}+h)}\right\} + \delta_T$$

$$\frac{\sigma_{jj}}{2m_0 G} = -k_j T^{(0)} + l_j f(r) L_t^{-1}\left\{\frac{s(e^{-zs}-e^{-\gamma z})}{(s-\gamma^2)(s^2-\gamma^2)} - \frac{(\gamma+h)(e^{-zs}-e^{-z\sqrt{s}})}{(s-\gamma^2)(s-1)(\sqrt{s}+h)}\right\} + \delta_{jj} \tag{2.15}$$

$$\frac{\sigma_{rz}}{2m_0 G} = A_{21}(r) L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-zs}-e^{-\varepsilon zs}}{s(s-\gamma^2)(s+\gamma)} - \frac{(\gamma+h)(e^{-zs}-e^{-\varepsilon zs})}{s\sqrt{s}(s-\gamma^2)(\sqrt{s}+1)(\sqrt{s}+h)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma(e^{-zs}-e^{-\gamma z})}{s(s-\gamma^2)(s^2-\gamma^2)} - \frac{(\gamma+h)(e^{-zs}-e^{-z\sqrt{s}})}{s\sqrt{s}(s-\gamma^2)(s-1)(\sqrt{s}+h)}\right\} + \delta_{rz}$$

$$j = r, \varphi, z, \quad k_r = k_\varphi = 1, \quad k_z = 0, \quad l_r = l_\varphi = \nu/(1-2\nu), \quad l_z = \varepsilon^2/2$$

Соотношения (2.15) представляют собой точные выражения для напряжений. Приближенное решение находим, отбрасывая в (2.15) погрешности δ_{ij}, $(i, j = r, \varphi, z)$, δ_T. Заметим, что температура и нормальные напряжения в приближенном решении представляют собой умноженное на $f(r)$ решение соответствующей одномерной задачи.

3. Оценим δ_T. Из (1.4) и (2.15), используя теоремы интегрирования оригинала и смещения, получаем

$$|\delta_T| = \left|\int_0^\infty \lambda f^H(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \int_0^t (e^{-\lambda^2\tau} - 1) L_\tau^{-1}\{sF(0,z,s)\} d\tau\right| \tag{3.1}$$

Поскольку $L_t^{-1}\{sF(0,z,s)\} > 0$ как производная по t решения одномерной краевой задачи теплопроводности, получающейся из (1.3) при $f(r) = 1$, $\Delta = \partial^2/\partial z^2$ и

$$L_t^{-1}\left\{\frac{(\gamma+h)e^{-z\sqrt{s}}}{(s-\gamma^2)(\sqrt{s}+h)}\right\} \geq 0$$

как свертка положительных оригиналов [20], имеем

$$L_t^{-1}\left\{\frac{(\gamma+h)e^{-z\sqrt{s}}}{(s-\gamma^2)(\sqrt{s}+h)}\right\} < L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-\gamma z}}{s-\gamma^2}\right\} = e^{\gamma^2 t - \gamma z}$$

$$L_t^{-1}\{sF(0,z,s)\} \leq e^{\gamma^2 t - \gamma z} \tag{3.2}$$

Из (3.1), (3.2), используя неравенства $|J_0(x)| \leq 1$, $1 - e^{-\lambda^2 t} \leq \lambda^2 t$, находим

$$|\delta_T| \leq \frac{\beta_3 t^2}{2} e^{\gamma^2 t - \gamma z}, \quad \beta_n = \int_0^\infty \lambda^n |f^H(\lambda)| d\lambda, \quad n = 1, 2 \ldots \tag{3.3}$$

Как было отмечено в разд. 2 физически малым временам могут соответствовать большие значения безразмерного времени t. Чтобы получить удовлетворительные оценки погрешностей δ_{ij} $(i, j = r, \varphi, z)$ для достаточно больших интервалов t, необходимо проявлять определенную осторожность при выводе степенных оценок вида At^{μ}. Желательно получить по возможности меньшее значение μ, при котором, однако, выполнялось бы естественное условие $At^{\mu} = o(\sigma_{ij}^{(0)})$, $t \to 0$, ($\sigma_{ij}^{(0)}$ – асимптотическое представление σ_{ij}). Это соображение использовано при выводе следующих основных неравенств:

$$\left|L_t^{-1}\left\{\frac{1}{R_1+\gamma}-\frac{1}{s+\gamma}\right\}\right| \leqslant \frac{\lambda^2 t^2}{4}, \quad |L_t^{-1}\{\chi(\lambda,\gamma)\}| \leqslant \eta_0 + z(\gamma+\lambda^2 t)\eta_1$$
$$|L_t^{-1}\{\chi(\lambda,\gamma)-\chi(0,\gamma)\}| \leqslant (\lambda^2 t^2/2)\eta_0 + (\lambda^2 zt/2)[1+\gamma(t-z)]\eta_1$$
$$\left|L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-R_1 z}-e^{-R_2 z}}{R_1}\right\}\right| \leqslant \eta_1 - \eta_2 + \lambda^2 z\left(z+\frac{\varepsilon^2-1}{2\varepsilon}t\right)\eta_2$$
$$|L_t^{-1}\{\chi(\lambda,\omega)\}| \leqslant e^{t-z}\eta_0 + z[(\pi t)^{-1/2}e^{-z^2/(4t)} + \lambda^2\kappa]\eta_1 \tag{3.4}$$
$$|L_t^{-1}\{\chi(\lambda,\omega)-\chi(0,\sqrt{s})\}| \leqslant \lambda^2 t e^{t-z}\eta_0 + \lambda^2 z\kappa\eta_1, \quad |L_t^{-1}\{(R_1+\omega)^{-1}\}| \leqslant 1+2\lambda$$
$$\left|L_t^{-1}\left\{\frac{1}{R_1+\omega}-\frac{1}{s+\sqrt{s}}\right\}\right| \leqslant \lambda^2\left(2t+\frac{t^2}{2}\right), \quad \left|L_t^{-1}\left\{\frac{sR_1R_2}{P(\lambda,s)}\right\}\right| \leqslant \beta$$
$$\left|L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-R_1 z}-e^{-R_2 z}}{s}\right\}\right| \leqslant \eta_1 - \eta_2 + \frac{\lambda^2 z}{2}\left[(t-z)\eta_1 + \frac{1}{\varepsilon}(t-\varepsilon z)\eta_2\right]$$
$$|J_0^{(2n)}(x)| \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad |J_0^{(2n-1)}(x)| \leqslant \frac{2(2n-2)!!}{\pi(2n-1)!!}, \quad n=1,2,\ldots$$
$$\chi(x,y) = \frac{s(e^{-z\sqrt{s^2+x^2}} - e^{-yz})}{s^2+x^2-y^2}$$
$$\eta_1 = \eta(t-z), \quad \eta_2 = \eta(t-\varepsilon z), \quad \eta_0 = 1-\eta_1, \quad \kappa = 1+\sqrt{t/2}$$
$$\beta = \frac{2}{\varepsilon^2-1} + \frac{\varepsilon^2-1}{2\pi\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{8(\varepsilon^2-\vartheta^2)(1-\vartheta^2)}{\varepsilon^2\vartheta^6 - 6\varepsilon^2\vartheta^4 + (12\varepsilon^2-8)\vartheta^2 - 4(\varepsilon^2-1)}$$

где $\eta(x)$ – единичная функция Хевисайда, $\pm i\vartheta/\varepsilon$ – ненулевые корни уравнения $P(1, s) = 0$.

Первые четыре неравенства (3.4) выводятся при помощи известного соответствия между оригиналами изображений $g(s)$ и $g(\sqrt{s^2+\lambda^2})$ [22] и основных теорем операционного исчисления. Для первого соотношения (3.4), например, используя неравенство $|J_1(x)| \leqslant |x|/2$ имеем

$$\left|L_t^{-1}\left\{\frac{1}{R_1+\gamma}-\frac{1}{s+\gamma}\right\}\right| = \left|\lambda\int_0^t e^{-\gamma\sqrt{t^2-u^2}} J_1(\lambda u)du\right| \leqslant \frac{\lambda^2 t^2}{4}$$

При выводе следующих пяти соотношений (3.4) используется теорема обращения. Для первого из них имеем при $0 \leqslant t < z$, применяя теоремы смещения, оригиналы $L_t^{-1}\{e^{-z\sqrt{s}}\}$ и $L_t^{-1}\{e^{-z\sqrt{s}}(s-1)^{-1}\}$ из [23] и формулу (3.546.2) из [24]

$$L_t^{-1}\left\{\frac{se^{-\omega z}}{R_1^2-\omega^2}\right\} = \int_0^t e^{t-\tau}e^{-\lambda^2\tau}L_\tau^{-1}\{e^{-z\sqrt{s}}\}d\tau \leqslant L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-z\sqrt{s}}}{s-1}\right\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e_z\int_0^\infty [\exp(-x^2+2x\sqrt{t}-zx/\sqrt{t}) + \exp(-x^2-2x\sqrt{t}-zx/\sqrt{t})]dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}e_z\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{ch}[x(2\sqrt{t}-z/\sqrt{t})]dx = e^{t-z}, \quad e_z = e^{-z^2/(4t)} \tag{3.5}$$

Пусть теперь $t \geqslant z$. Изображение в пятом соотношении (3.4) – регулярная функция s в плоскости с разрезами $(-i\infty, -i\lambda]$, $[i\lambda, i\infty)$, $(-\infty, -\lambda^2]$. Применяя теорему обращения, по лемме Жордана сводим интеграл по прямой $\operatorname{Re} s = \sigma$ к совокупности интегралов по берегам разрезов. С учетом ранее выбранных ветвей радикалов (1.4), (1.6), получим при $t \geqslant z$:

$$L_t^{-1}\left\{\frac{s(e^{-R_1 z}-e^{-\omega z})}{R_1^2-\omega^2}\right\} = Q_1(\lambda,z,t) = -\frac{2}{\pi}\int_\lambda^\infty \frac{\sin(z\sqrt{y^2-\lambda^2})\sin yt}{y^2+1}dy -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_\lambda^\infty \frac{y\sin(z\sqrt{y^2-\lambda^2})\cos yt}{y^2+1}dy + \frac{1}{\pi}\int_{\lambda^2}^\infty \frac{\sin(z\sqrt{y-\lambda^2})e^{-yt}}{y+1}dy \tag{3.6}$$

Используя формулу Тейлора, формулы (3.742.1), (3.742.5) из [24] и производя замену переменной интегрирования, находим

$$Q_1(\lambda,z,t) = Q_1(0,z,t) + \lambda^2[I_1(\lambda_1^2) + I_2(\lambda_1^2)] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin zx}{x^2+1}e^{-x^2 t}dx + \lambda^2\left[\frac{z}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos zx \sin(t\sqrt{x^2+\lambda_1^2})}{(x^2+\lambda_1^2+1)\sqrt{x^2+\lambda_1^2}}dx + \right.$$

$$\left. + \frac{z}{\pi}\int_0^\infty \frac{[\cos(t\sqrt{x^2+\lambda_1^2}) - e^{-(x^2+\lambda_1^2)t}]\cos zx}{x^2+\lambda_1^2+1}dx\right], \quad 0<\lambda_1<\lambda$$

Законность дифференцирования по λ^2 интегралов в (3.6) легко доказывается. Используя формулу 74 (26) из [22] и соотношения $z/(\sqrt{t}) - 2\sqrt{t} < 0$, $(t \geqslant z)$ и $\operatorname{sh} x \leqslant xe^x$, $(x \geqslant 0)$ будем иметь аналогично (3.5)

$$|Q_1(0,z,t)| = \frac{e^t}{2}\left|e^{-z}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{t}-\frac{z}{2\sqrt{t}}\right) - e^z\operatorname{erfc}\left(\sqrt{t}+\frac{z}{2\sqrt{t}}\right)\right| =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}e_z\int_0^\infty e^{-x^2-2x\sqrt{t}}\operatorname{sh}\frac{zx}{\sqrt{t}}dx \leqslant \frac{z}{\sqrt{\pi t}}e_z \tag{3.7}$$

Объединяя соотношения (3.5), (3.6) и

$$|I_1(\lambda_1^2)| \leqslant z\sqrt{t/2}, \quad |I_2(\lambda_1^2)| \leqslant z$$

получим пятое неравенство (3.4).

Процедура получения девятого соотношения (3.4) подробно изложена в [16] для подобного оригинала.

Последние два неравенства (3.4) получаются путем дифференцирования и последующей оценки интегрального представления $J_0(x)$ [24].

Метод получения оценок δ_{ij} продемонстрируем на примере слагаемого из σ_{zz}. Для первого слагаемого в σ_{zz} и соответствующего ему асимптотического представления в (2.15) имеем

$$\delta^{(1)} = L_t^{-1}\left\{\int_0^\infty \lambda f^H(\lambda)J_0(\lambda r)Q_2^*(\lambda,z,s)d\lambda\right\} \tag{3.8}$$

$$Q_2^*(\lambda,z,s) = \frac{R^2\chi(\lambda,\gamma)}{s^2(\omega^2-\gamma^2)} - \frac{\varepsilon^2\chi(0,\gamma)}{2(s-\gamma^2)} = Q_{21}^* + Q_{22}^* + Q_{23}^* =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2(\omega^2-\gamma^2)}[\chi(\lambda,\gamma)-\chi(0,\gamma)] + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2-\gamma^2} - \frac{1}{s-\gamma^2}\right)\chi(0,\gamma) + \frac{\lambda^2\chi(\lambda,\gamma)}{s^2(\omega^2-\gamma^2)}$$

Используя теорему смещения, оценку (3.2), третье соотношение (3.4) и теорему свертывания, получим

$$|L_t^{-1}\{Q_{21}^*\}| \leqslant \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{4}e^{\gamma^2 t}\left[\frac{1}{3}(t^3\eta_0 + z^3\eta_1) + zt(t-z)\eta_1\right] = \lambda^2\delta_1 \tag{3.9}$$

Оценка $L_t^{-1}\{Q_{22}^*\}$ получается аналогично (3.1) и (3.9). С учетом (3.2) и второго неравенства (3.4) (при $\lambda = 0$), имеем

$$|L_t^{-1}\{Q_{22}^*\}| \le \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{4} e^{\gamma^2 t}[t^2 - (t-z)^2\eta_1 + \gamma z(t-z)^2\eta_1] = \lambda^2\delta_2 \tag{3.10}$$

Используя теорему интегрирования оригинала, аналогично (3.10) находим

$$|L_t^{-1}\{Q_{23}^*\}| \le (\lambda^2/6)e^{\gamma^2 t}[t^3 - (t-z)^3\eta_1 + z(\gamma+\lambda^2 t)(t-z)^3\eta_1] = \lambda^2\delta_3 + \lambda^4\delta_4 \tag{3.11}$$

Из (3.8)–(3.11) получим оценку

$$|\delta^{(1)}| \le \beta_3(\delta_1+\delta_2+\delta_3) + \beta_5\delta_4$$

Производя аналогичные вычисления для оставшихся слагаемых и остальных напряжений, окончательно получаем:

$$|\delta_T| \le \beta_3(t^2/2)e^{\gamma^2 t - \gamma z}$$

$$|\delta_{jj}| \le \frac{1}{2}k_j\beta_3 t^2 e^{\gamma^2 t-\gamma z} + \frac{1}{2}l_j\beta_3 e^{\gamma^2 t}\left\{2p_1(2) + p_3(2) + \frac{1}{3}p_3(3) + \right.$$

$$+ z\left[t + \gamma(t-z) + 2\kappa + \frac{8}{3\sqrt{\pi}}e_z\sqrt{t-z}\right](t-z)\eta_1\right\} +$$

$$+\frac{1}{6}w_j\beta_3 e^{\gamma^2 t}\left\{2p_1(3) + \frac{16z}{5\sqrt{\pi}}e_z(t-z)^{5/2}\eta_1 + z\left[\gamma + \frac{\beta_5}{\beta_3}(t+\kappa)\right](t-z)^3\eta_1\right\} +$$

$$+\frac{1}{6}k_j\beta e^{\gamma^2 t}\left\{l_j\zeta_3(t-z)^3\eta_1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\zeta_3 + \frac{1}{2\varepsilon}\zeta_5 z(t-\varepsilon z)\right](t-\varepsilon z)^3\eta_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{20}w_j\left[\zeta_5 p_2(5) + \frac{1}{2}\zeta_7 z p_4(6)\right]\right\} + \frac{1}{12}(1-k_j)\beta e^{\gamma^2 t}\left\{\varepsilon^2\left[\zeta_3 p_2(3) + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\zeta_5 z\left(z + \frac{\varepsilon^2-1}{2\varepsilon}t\right)(t-\varepsilon z)^3\eta_2\right] + \frac{1}{10}\left[\zeta_5 p_2(5) + \frac{1}{2}\zeta_7 z p_4(6)\right]\right\}, \quad j = r, \varphi, z$$

$$|\delta_{rz}| \le \frac{1}{2}r\beta_5 e^{\gamma^2 t}\left\{\frac{5}{6}p_2(3) + \frac{1}{16}p_2(4) + \frac{z}{3}\left(1 + \frac{\beta_6}{\beta_5}\right)p_4(3) + \right. \tag{3.12}$$

$$+\frac{1}{12}\gamma\left[\frac{1}{2}p_1(4) + p_3(2)p_1(3) + \frac{1}{2}zt(2+\gamma+2\gamma t)(t-z)^3\eta_1\right] +$$

$$+\frac{2}{7\sqrt{\pi}}p_1\left(\frac{7}{2}\right) + \frac{5}{16}ze_z(t-z)^3\eta_1 + p_3(1)\left[\frac{8}{15\sqrt{\pi}}p_1\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{\beta_6}{6\beta_5}p_1(3)\right] +$$

$$\left. +\kappa z\left[\frac{8}{15\sqrt{\pi}} + \frac{\beta_6}{6\beta_5}\sqrt{t-z}\right](t-z)^{5/2}\eta_1\right\} + \frac{1}{48}\beta r e^{\gamma^2 t}\left\{\zeta_5 p_2(4) + \frac{1}{2}\zeta_7 z p_4(5)\right\}$$

$$p_1(x) = t^x - (t-z)^x\eta_1, \quad p_2(x) = (t-z)^x\eta_1 - (t-\varepsilon z)^x\eta_2$$

$$p_3(x) = t^x\eta_0 + z^x\eta_1, \quad p_4(x) = (t-z)^x\eta_1 + \frac{1}{\varepsilon}(t-\varepsilon z)^x\eta_2$$

$$w_r = w_\varphi = \frac{1}{2}, \quad w_z = 1, \quad \zeta_n = 3\beta_n + 2\beta_{n+1}, \quad e_z = e^{-z^2/4t}$$

4. Рассмотрим пример. Пусть в безразмерных переменных $f(r) = \delta^3/(r^2 + \delta^2)^{3/2}$, $\gamma = 2{,}5\cdot 10^{-9}$, $h = 1{,}4\cdot 10^{-6}$, $\nu = 0.3$, $\delta = 4\cdot 10^9$. Тогда $f^H(\lambda) = \delta^2 e^{-\lambda\delta}$, $A_{mn}(r)$ выражаются в элементарных функциях [24], $\beta_k = k!/\delta^{k-1}$, $k = 1, 2,\ldots$ Для $t = t_0 = 1{,}5\cdot 10^8$, $r = \delta/2$, $0 \leqslant z \leqslant 2t_0$ относительные погрешности асимптотических представлений нормальных напряжений (2.15), вычисленные в соответствии с (3.12), не превосходят 5%.

Для σ_{rz} из (2.15) формула (3.12) дает удовлетворительную (до 8%) относительную погрешность в окрестностях фронтов упругих волн.

Вычисления показывают, что при всех $0 < t \leqslant t_0$ максимальные значения нормальных напряжений на три порядка превосходят максимальные значения σ_{rz}. Следовательно, в расчетах, связанных с исследованием напряженного состояния при малых временах нагрева, можно использовать умноженное на $f(r)$ решение соответствующей одномерной задачи.

5. Часть оригиналов из (2.15) имеется в таблицах [19, 22]. Остальные оригиналы приводятся ниже:

$$L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-z\sqrt{s}}}{s(s-\gamma^2)(\sqrt{s}+h)}\right\} = \frac{1}{\gamma^2}\left\{\frac{1}{2(\gamma+h)}e^{\gamma^2 t-\gamma z}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}-\gamma\sqrt{t}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(\gamma-h)}e^{\gamma^2 t+\gamma z}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}+\gamma\sqrt{t}\right)-\frac{1}{h}\operatorname{erfc}\frac{z}{2\sqrt{t}}\right\}+\frac{1}{h(\gamma^2-h^2)}e^{h^2 t+hz}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}+h\sqrt{t}\right).$$

$$L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-z\sqrt{s}}}{(s-\gamma^2)(s-1)(\sqrt{s}+h)}\right\} = \frac{1}{\gamma^2-1}\left\{\frac{1}{2(\gamma+h)}e^{\gamma^2 t-\gamma z}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}-\gamma\sqrt{t}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{2(\gamma-h)}e^{\gamma^2 t+\gamma z}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}+\gamma\sqrt{t}\right)-\frac{1}{2(h+1)}e^{t-z}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)-$$

$$\left.-\frac{1}{2(h-1)}e^{t+z}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)\right\}+\frac{h}{(h^2-1)(\gamma^2-h^2)}e^{h^2 t+hz}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}+h\sqrt{t}\right).$$

$$L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-z\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}(s-\gamma^2)(s-1)(\sqrt{s}+h)}\right\} = \frac{2}{\gamma^2 h}\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-z^2/(4t)}-\frac{1}{\gamma^2 h}\left(z+\frac{1}{h}\right)\operatorname{erfc}\frac{z}{2\sqrt{t}}-$$

$$-\frac{1}{h^2(h^2-1)(\gamma^2-h^2)}e^{h^2 t+hz}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}+h\sqrt{t}\right)-\frac{1}{2(\gamma^2-1)}\left\{\frac{1}{h+1}e^{t-z}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{h-1}e^{t+z}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)-\frac{1}{\gamma^3(\gamma+h)}e^{\gamma^2 t-\gamma z}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}-\gamma\sqrt{t}\right)-$$

$$\left.-\frac{1}{\gamma^3(\gamma-h)}e^{\gamma^2 t+\gamma z}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}+\gamma\sqrt{t}\right)\right\}$$

$$L_t^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s}(s-\gamma^2)(\sqrt{s}+1)(\sqrt{s}+h)}\right\} = -\frac{2}{\gamma^2 h}\sqrt{\frac{t}{\pi}}+\frac{h+1}{\gamma^2 h^2}+\frac{1}{\gamma^3(\gamma+1)(\gamma+h)}e^{\gamma^2 t}-$$

$$-\frac{\gamma^2+h}{\gamma^3(\gamma^2-1)(\gamma^2-h^2)}e^{\gamma^2 t}\operatorname{erfc}\gamma\sqrt{t}-\frac{1}{(\gamma^2-1)(h-1)}e^{t}\operatorname{erfc}\sqrt{t}+\frac{1}{h^2(\gamma^2-h^2)(h-1)}e^{h^2 t}\operatorname{erfc}h\sqrt{t}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lauriello P.J., Chen Y.* Thermal fracturing of hard rock // Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech. 1973. V. 40. N 4. P. 909–914.
2. *Avery R.T., Keefe D., Brekke T.L., Finnie I.* Hard-rock tunneling using pulsed electron beams // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1975. V. NS–22. N 3. P. 1798–1801.
3. *Соболь Э.Н., Углов А.А.* Лазерная обработка горных пород // Физика и химия обработки материалов. 1983. № 2. С. 3–17.
4. *Rauenzahn R.M., Tester J.W.* Rock failure mechanisms of flame. Jet thermal spallation drilling.

Theory and experimental testing // Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr. 1989. V. 26. N 5. P. 381–399.

5. *Дмитриев А.П., Гончаров С.А., Германович Л.Н.* Термическое разрушение горных пород. М.: Недра, 1990. 255 с.
6. *Баренблатт Г.И., Всеволодов Н.Н., Миркин Л.И., Пилипецкий Н.Ф., Райзер Ю.П.* О разрушении прозрачных материалов под действием лазерного излучения. Возникновение газовых пузырьков и расклинивание материала газовым давлением // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 5. Вып. 3. С. 85–87.
7. *Даниловская В.И., Шефтер Э.М.* Температурные поля и напряжения, возникающие в упругом полупространстве под действием осесимметричного лучистого потока // Физика и химия обработки материалов. 1969. № 3. С. 13–19.
8. *Германович Л.Н.* О температурных напряжениях в упругом полупространстве с источниками тепла // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 74–85.
9. *Германович Л.Н., Килль И.Д., Цодокова Н.С.* О термоупругих напряжениях в полупространстве, нагреваемом концентрированным потоком энергии // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 675–684.
10. *Даниловская В.И.* Температурное поле и температурные напряжения, возникающие в упругом полупространстве вследствие потока лучистой энергии, падающей на границу полупространства // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 3. С. 129–132.
11. *Skinner D.R., Wendlandt B.C.H., Macdonald J.A.* Stress-wave distribution in a semi-infinite body due to an arbitrary heat flux at the surface // J. Phys. D. Appl. Phys. 1974. V. 7. N 2. P. 209–215.
12. *Бакеев А.А., Соболев А.П., Яковлев В.И.* Исследование термоупругих напряжений, возникающих в поглощающем слое вещества под действием лазерного импульса // ПМТФ. 1982. № 6. С. 92–98.
13. *Strikwerda J.S., Scott A.M.* Thermoelastic response to a short laser pulse // Thermal Stres. 1984. V. 7. P. 1–17.
14. *Tomlinson W.J., Gordon J.P., Smith P.W., Kaplan A.E.* Reflection of a gaussian beam at a nonlinear interface // Appl. Optics. 1982. V. 21. N 11. P. 2041–2051.
15. *Бойко М.С.* Обобщенная динамическая задача термоупругости для полупространства, нагреваемого лазерным излучением // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 470–475.
16. *Долотов М.В., Килль И.Д.* Об асимптотике решения динамической задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 109–116.
17. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
18. *Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И.* О задаче Лемба в случае полупространства // Учен. зап. ЛГУ. 1960. № 135. Сер. мат. Вып. 21. С. 71–118.
19. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и *Z*-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
20. *Германович Л.Н., Килль И.Д.* О термонапряжениях в упругом полупространстве // ПМТФ. 1983. № 3. С. 159–164.
21. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1959. 807 с.
22. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований: Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 343 с.
23. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
24. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.VII.1993