

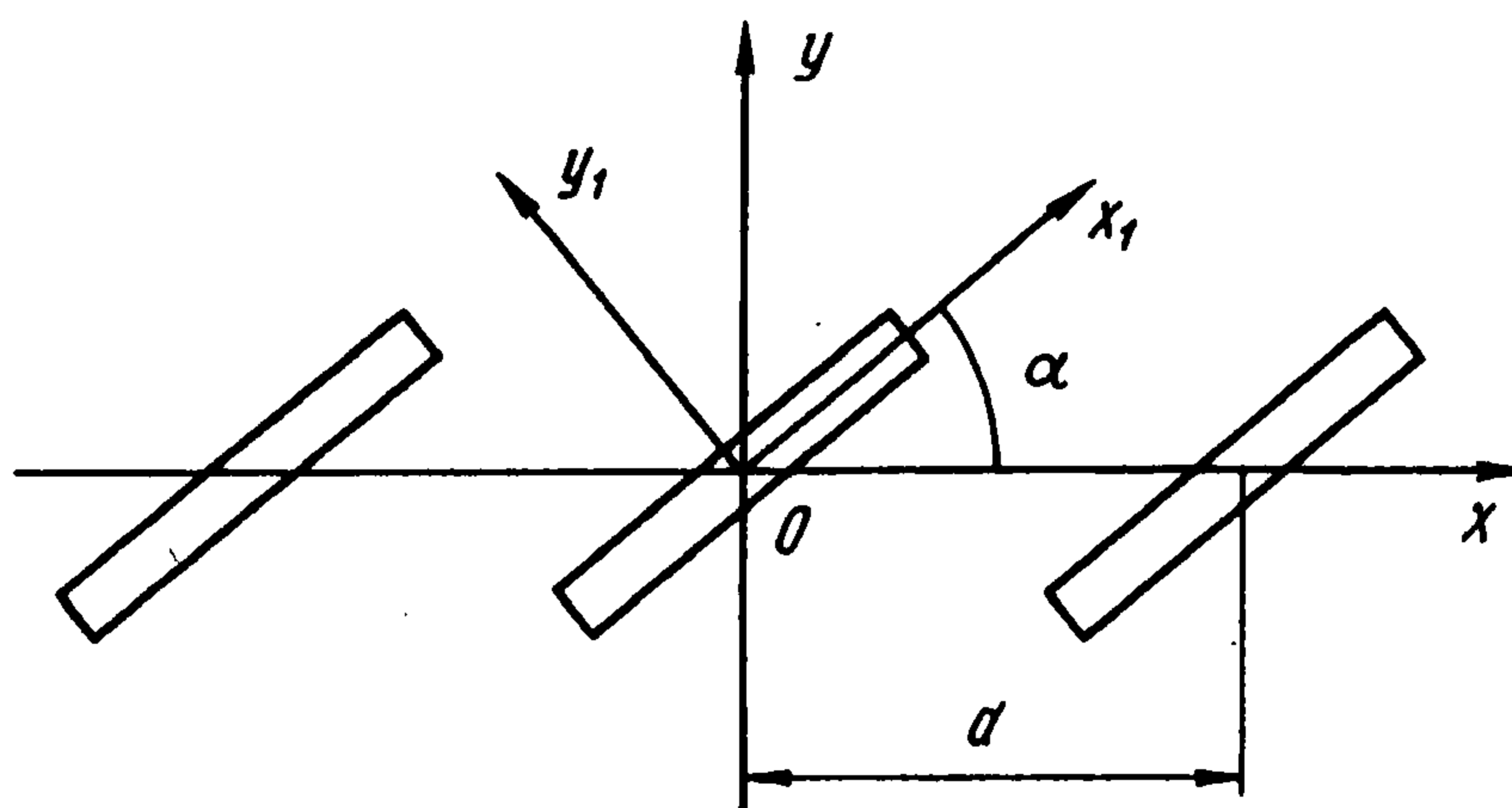
УДК 539.3

© 1994 г. В.К. Опанасович, Л.О. Тисовский, И.И. Федик

## ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ И ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНКИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ТОНКИХ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

С использованием методов теории функций комплексного переменного строится решение плоской задачи теплопроводности и термоупругости для пластинки с периодической системой прямолинейных тонких упругих включений конечной длины. Получены интегральные представления для комплексных потенциалов температуры и напряженно-деформированного состояния, построена система разрешающих интегродифференциальных уравнений задачи, приведены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах включений. При помощи метода механических квадратур проведен численный анализ решения задачи.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается изотропная пластинка (матрица), содержащая систему прямолинейных тонкостенных упругих включений длины  $2l$  и толщины  $2h$ . Матрица находится под воздействием теплового потока на бесконечности интенсивности  $q_\infty$ . Предполагается, что боковые плоскости пластинки теплоизолированы, а на линиях раздела материалов имеет место идеальный силовой и тепловой контакт. Требуется определить влияние включений на величину и характер распределения температурного поля и исследовать термоупругое состояние в рассматриваемом композите.



Фиг. 1

Введем декартовую систему координат  $x_1 O_1 y_1$  (фиг. 1) с осью  $x_1$ , проходящей через центры включений, а также локальную систему координат  $xu$ , оси которой направлены по осям симметрии включения. Пусть  $\alpha$  – угол наклона включения к оси  $x_1$ ,  $d$  – расстояние между центрами включений. Величины, относящиеся к включению, обозначаются нулевым индексом. Поскольку все включения находятся в одинаковых условиях, то граничные условия записываются только для одного включения.

Условия механического и теплофизического контакта включения с окружающим материалом имеют вид

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^\pm = (\sigma_y - i\tau_{xy})^\pm, \quad \frac{\partial}{\partial x} (u + iv)_0^\pm + i\varepsilon_0 = \frac{\partial}{\partial x} (u + iv)^\pm \quad (1.1)$$

$$(T + i\eta)_0^\pm = (T + i\eta)^\pm, \quad k_0 \frac{\partial}{\partial y} (T + i\eta)_0^\pm = k \frac{\partial}{\partial y} (T + i\eta)^\pm \quad (1.2)$$

Индексами плюс и минус обозначены граничные значения функций на верхнем ( $y = +h$ ) и нижнем ( $y = -h$ ) берегах включения,  $\eta(x, y)$  – вспомогательная гармоническая функция,  $k_0$  и  $k$  – коэффициенты теплопроводности соответственно для материалов включения и пластинки.

**2. Задача теплопроводности.** Известно [1], что температурное поле в однородной изотропной пластине может определяться соотношениями

$$\begin{aligned} F_1(z) + Q_1(z) &= T + i\eta, \quad F(z) + Q(z) = \partial(T + i\eta) / \partial x \\ F(z) - Q(z) &= -i\partial(T + i\eta) / \partial y, \quad F(z) = F_1'(z), \quad Q(z) = Q_1'(z) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $F_1(z)$  и  $Q_1(z)$  – кусочно-голоморфные в комплексной плоскости функции.

Учитывая тонкостенность включения, смоделируем его линией, наделенной определенными теплофизическими свойствами. С этой целью разложим комплексные потенциалы  $F_0(z)$  и  $Q_0(z)$  в ряд по параметру  $h$ . Пренебрегая величинами высших порядков малости по сравнению с  $h$ , на основании (2.1) находим

$$x \in L, \quad \frac{\partial}{\partial x} (T + i\eta)_0^+ - \frac{\partial}{\partial x} (T + i\eta)_0^- = 2hp'(x), \quad \frac{\partial}{\partial y} (T + i\eta)_0^+ - \frac{\partial}{\partial y} (T + i\eta)_0^- = -2hg'(x) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (T + i\eta)_0^+ + \frac{\partial}{\partial x} (T + i\eta)_0^- = 2g(x), \quad \frac{\partial}{\partial y} (T + i\eta)_0^+ - \frac{\partial}{\partial y} (T + i\eta)_0^- = 2\rho(x)$$

где  $g(x)$  и  $\rho(x)$  – подлежащие определению функции,  $L = [-l, l]$  – сегмент действительной оси.

Для матрицы вводятся кусочно-голоморфные функции  $F(z)$  и  $Q(z)$ . При этом граничные условия с берегов включения сносятся на действительную ось  $Ox$ . Удовлетворяя при помощи соотношений (2.1) условиям (1.1) и учитывая зависимости (2.2), получим следующие краевые задачи:

$$\begin{aligned} x \in L, [F(x) + Q(x)]^+ - [F(x) + Q(x)]^- &= 2ihk_1g'(x), \\ [F(x) - Q(x)]^+ - [F(x) - Q(x)]^- &= 2hp'(x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} x \in L, [F(x) + Q(x)]^+ + [F(x) + Q(x)]^- &= 2g(x), \\ [F(x) - Q(x)]^+ + [F(x) - Q(x)]^- &= -2ik_1\rho(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $k_1 = k_0/k$ .

Решая задачи линейного сопряжения (2.3), находим

$$\begin{aligned} F(z_1) &= \frac{h}{2d} \int_{-l}^l \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{d} (te^{i\alpha} - z_1) \right) [k_1g'(t) - i\rho'(t)] dt + c \\ Q(z_1) &= \frac{h}{2d} \int_{-l}^l \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{d} (te^{i\alpha} - z_1) \right) [k_1g'(t) + i\rho'(t)] dt + c \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$c = -q_\infty e^{-i\varphi} (2k)^{-1}, \quad z_1 = x_1 + iy_1$$

$$\begin{aligned}
 Y(x) &= \sum_{r=1}^{M-1} y_r T_r(x), \quad Z(x) = \sum_{r=1}^{M-1} z_r T_r(x) \\
 \left( y_r = \frac{2}{M} \sum_{m=1}^M Y(t_m) T_r(t_m), \quad z_r = \frac{2}{M} \sum_{m=1}^M Z(t_m) T_r(t_m) \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Имея решение системы алгебраических уравнений (2.9), можно построить интерполирующий полином Лагранжа для функции  $Y(x)$  и  $Z(x)$  [3] по узлам Чебышева

$$\begin{aligned}
 t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad x_r = \cos \frac{r}{M} \pi, \quad r = 1, 2, \dots, M-1 \\
 U_{m-1}(x) = \frac{\sin(\pi r \sin x)}{\sin(\pi r x)}, \quad T_r(x) = \cos(\pi r \cos x) \\
 A(m, r) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\pi}{k} T_k(t_m) U_{k-1}(x_r) \sqrt{1-x_r^2}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 &= Mbq_\infty k^{-1} \sin(\alpha - \Phi) \\
 &\sum_{m=1}^M \{ \pi k_1 Y(t_m) A(m, r) + h [k_1 Z(t_m) L(l(t_m) - x_r) - Y(t_m) K(l(t_m) - x_r)] \} \\
 &= -Maq_\infty k^{-1} \cos(\alpha - \Phi) \\
 &\sum_{m=1}^M \{ \pi Z(t_m) A(m, r) - h [k_1 Z(t_m) K(l(t_m) - x_r) + Y(t_m) L(l(t_m) - x_r)] \} =
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

узловых точках  
 раяческих уравнений для определения значения неизвестных функций  $Z(x)$  и  $Y(x)$  в  
 Используя метод механических квадратур [2], приходим к системе линейных алге-

$$g'(x) = Z(x) / \sqrt{1-x^2}, \quad p'(x) = Y(x) / \sqrt{1-x^2}
 \tag{2.8}$$

Решение системы уравнений (2.6), (2.7) будем искать в виде

обходе контура включения.

$$\int_l^{-l} g'(t) dt = 0, \quad \int_l^{-l} p'(t) dt = 0
 \tag{2.7}$$

К уравнениям (2.6) нужно присоединить соотношения

$$a = 1 - \varepsilon, \quad b = 1 - k_1 \varepsilon, \quad \varepsilon = \min(1, k_1^{-1}), \quad K(x) + iL(x) = \mathcal{O} \operatorname{ctg}(\mathcal{O}x), \quad \mathcal{O} = \pi e^{i\alpha} p^{-1}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 k_1 p(x) + \frac{\pi}{h} \int_l^{-l} [k_1 g'(t) L(t-x) - p'(t) K(t-x)] dt = bq_\infty k^{-1} \sin(\alpha - \Phi) \\
 x \in L, \quad g(x) - \frac{\pi}{h} \int_l^{-l} [k_1 g'(t) K(t-x) + p'(t) L(t-x)] dt = -aq_\infty k^{-1} \cos(\alpha - \Phi)
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

интенсивности  $q_\infty$ .  
 Если теперь, учитывая условия (2.5), удовлетворить условиям (2.4), то получим систему инте-

где  $\Phi$  — угол между осью  $Ox$  и главным направлением потока тепла на бесконечности

Подставляя выражения для функций  $g'(x)$  и  $\rho'(x)$  (2.8) в (2.5) и учитывая (2.10), комплексные потенциалы  $F(z_1)$  и  $Q(z_1)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} F(z_1) &= B \sum_{r=1}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k_1 z_r - i y_r) L_r(v_k) + c \\ Q(z_1) &= B \sum_{r=1}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k_1 z_r + i y_r) L_r(v_k) + \bar{c} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь

$$B = h e^{-i\alpha} / (2\pi l), \quad v_k = (z_1 - \pi dk) e^{-i\alpha} l^{-1}, \quad u_k = e^{2i\alpha k} v_k$$

$$L_r(z) = [U_{r-1}(z) \sqrt{z^2 - 1} - T_r(z)] / \sqrt{z^2 - 1}$$

Заметим, что если в (2.11) положить  $k_0 = 0$ , то получим решение задачи теплопроводности для пластинки с периодической системой термоизолированных трещин [5], если же положить  $k_0 = k$ , то получим решение задачи теплопроводности для пластинки без включений.

**3. Задачи термоупругости.** Термоупругое состояние изотропной пластины можно описать при помощи комплексных потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  исходя из формул [1]

$$\sigma_y + \sigma_x = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + R(z) \quad (3.1)$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) = \kappa \Phi(z) - R(z) + H \Psi_1(z)$$

Здесь

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2} \int [F(z) + \overline{Q(z)}] dz$$

$$R(z) = \overline{\Phi(z)} + z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \quad \overline{Q(z)} = \overline{Q(\bar{z})}$$

$\kappa = 3 - 4\nu$ ,  $H = 2\alpha E$  – для плоской деформации;  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ,  $H = 2\alpha E/(1 + \nu)$  – для плоского напряженного состояния;  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль Юнга;  $\mu$  – коэффициент Ламе.

Учитывая тонкостенность включения, разложим в соотношениях (3.1) комплексные потенциалы  $\Phi_0(z)$ ,  $\Psi_0(z)$  и  $\Psi_{01}(z)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x$  действительной оси. Удерживая в итоговых разложениях члены порядка не выше  $h$ , получим зависимости:

$$\begin{aligned} x \in L, (\sigma_y - i\tau_{xy})_0^+ - (\sigma_y - i\tau_{xy})_0^- &= 2ihK'(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} (u + iv)_0^+ - \frac{\partial}{\partial x} (u + iv)_0^- &= ih[M'(x) + H_0 \Psi_0'(x)] / \mu_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})_0^+ + (\sigma_y - i\tau_{xy})_0^- = 2\gamma_0 [(1 - \kappa_0) K(x) + 2M(x) + 2\overline{K(x)} + 2\overline{M(x)}]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u + iv)_0^+ + \frac{\partial}{\partial x} (u + iv)_0^- =$$

$$= \mu_0^{-1} \gamma_0 [2\kappa_0 K(x) + (\kappa_0 - 1) M(x) - 2\overline{K(x)} - 2\overline{M(x)}] + H_0 \Psi_0(x) / \mu_0$$

Здесь

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{2} T_0 - \tilde{c} x + \frac{1}{4} \left\{ (z_1 - i y_1) \left[ -\frac{x}{l} \sqrt{l^2 - x^2} + \arcsin \frac{x}{l} \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=2}^{M-1} \frac{1}{r} (z_r - i y_r) \sqrt{l^2 - x^2} \left[ \frac{1}{r-1} U_{r-2} \left( \frac{x}{l} \right) - \frac{1}{r+1} U_r \left( \frac{x}{l} \right) \right] \right\}$$

$$\gamma_0 = (1 + \kappa_0), \quad \tilde{c} = c e^{i\alpha}$$

$T_0$  – температура включения,  $K(x)$  и  $M(x)$  – неизвестные функции.

Зависимости (3.2) дают модель тонкого включения для плоской задачи термоупругости.

Используя условия идеального механического контакта (1.1), а также зависимости (3.2) и (3.1), для определения комплексных потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  будем иметь следующие краевые задачи:

$$x \in L, [\Phi(x) + R(x)]^+ - [\Phi(x) + R(x)]^- = 2ihK'(x) \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & [\kappa\Phi(x) - R(x) + H\Psi_1(x)]^+ - [\kappa\Phi(x) - R(x) + H\Psi_1(x)]^- = \\ & = 2ih\beta_0[M'(x) - M_1^*(x) + H_0\Psi_0'(x)] \\ & [\Phi(x) + R(x)]^+ + [\Phi(x) + R(x)]^- = 2\gamma_0[(1 - \kappa_0)K(x) + 2\overline{K(x)} + 2M(x) + 2\overline{M(x)}] \\ & [\kappa\Phi(x) - R(x) + H\Psi_1(x)]^+ + [\kappa\Phi(x) - R(x) + H\Psi_1(x)]^- = \\ & = 2\beta_0\gamma_0[2\kappa_0K(x) + (\kappa_0 - 1)M(x) - 2\overline{K(x)} - 2\overline{M(x)}] + 2\beta_0H_0\Psi_0(x) - 2i\epsilon_0^* \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь

$$\epsilon_0^* = -2\mu\epsilon_0, \quad M_1^* = \omega_0 H\bar{c}, \quad \beta_0 = \mu / \mu_0, \quad \omega_0 = \min(1, \beta_0^{-1})$$

$$\Psi_1(z_1) = c_1 z_1 + \frac{1}{2} T_\infty + \Psi_1^*(z_1) = c_1 z_1 + \frac{1}{2} T_\infty + \frac{h}{2} \sum_{r=1}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(k_1 z_r - iy_r) l^r}{(\bar{z} + \sqrt{\bar{z}^2 - l^2})^r}$$

$$\bar{z} = e^{-i\alpha}(z_1 - \pi dk)$$

$T_\infty$  – значение температуры на бесконечности.

Условиям (3.3) удовлетворим, если комплексные потенциалы  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  представим в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \gamma_2 \int_{-l}^l [K_0'(t) + \beta_0 M_0'(t)] \operatorname{ctg}[P(t, z_1)] dt - \gamma_3 \Psi_1^*(z) \\ \Psi(z_1) &= \gamma_2 \int_{-l}^l \{[\beta_0 M_0'(t)] - \kappa K_0'(t)\} \operatorname{ctg}[P(t, z_1)] e^{-i\alpha} - \\ & - \{\pi d^{-1} [z_1 d^\alpha + t(1 - e^{2i\alpha})] \operatorname{cosec}^2[P(t, z_1)] + e^{i\alpha} \operatorname{ctg}[P(t, z_1)]\} \times \\ & \times [K_0'(t) + \beta_0 M_0'(t)] dt - \gamma_3 h e^{-i\alpha} (2d)^{-1} \int_{-l}^l \{[k_1 g_0(t) + \\ & + i\rho_0(t) - e^{2i\alpha}(k_1 g_0(t) - i\rho_0(t))]\} \operatorname{ctg}[P(t, z_1)] - [k_1 g_0(t) - \\ & - i\rho_0(t)] (te^{-i\alpha} - te^{i\alpha} + z) \pi d^{-1} e^{2i\alpha} \operatorname{cosec}^2[P(t, z_1)] dt \\ \gamma &= [\pi(1 + \kappa)]^{-1}, \quad K_0(x) = K(x), \quad M_0'(x) = M'(x) - M_1^*(x) + H_0\Psi_0'(x), \\ \gamma_2 &= \gamma \pi d^{-1} e^{i\alpha}, \quad \gamma_3 = \pi \gamma H, \quad P(t, z_1) = \pi d^{-1} (te^{i\alpha} - z_1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставляя выражения для функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  (3.5) в соотношения (3.4), приходим к системе интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $K_0(x)$  и  $M_0(x)$ :

$$\begin{aligned} & x \in L, \quad \gamma_0[(1 - \kappa_0)K_0(x) + 2M_0(x) + 2\overline{K_0(x)} + 2\overline{M_0(x)}] - \\ & - c_1 \int_{-l}^l \{[K_0'(t) + \beta_0 M_0'(t)] g(t - x) + [-\kappa K_0'(t) + \beta_0 M_0'(t)] \overline{g(t - x)} + \end{aligned}$$

$$+[\overline{K'_0(t)} + \beta_0 \overline{M'_0(t)}] G(t-x) \} dt = A(x) \quad (3.6)$$

$$\beta_0 \gamma_0 [2\kappa_0 K_0(x) + (\kappa_0 - 1) M_0(x) - 2\overline{K_0(x)} - 2\overline{M_0(x)}] +$$

$$+ c_1 \int_{-l}^l \{ -\kappa [K'_0(t) + \beta_0 M'_0(t)] g(t-x) + [-\kappa [K'_0(t) + \beta_0 M'_0(t)] \overline{g(t-x)} +$$

$$+ [\overline{K'_0(t)} + \beta_0 \overline{M'_0(t)}] G(t-x) \} dt = B(x) + i\varepsilon_0^*$$

Здесь:

$$c_1 = h\gamma, \quad \lambda = d/l, \quad q = -i\lambda e^{-i\alpha} \sin \alpha, \quad g(x) = Q \operatorname{ctg}(Qx)$$

$$G(x) = \pi d^{-1} (e^{-i\alpha} - e^{-3i\alpha}) [\operatorname{ctg}(Qx) - Qx \operatorname{cosec}^2(Qx)]$$

$$A(x) = -4\gamma_0 \operatorname{Re} \left[ H\omega_0 \left( \frac{1}{2} T_0 + \tilde{c}x \right) - H\Psi_0(x) \right] - C(x)$$

$$B(x) = -\beta_0 \gamma_0 \left\{ (\kappa_0 - 1) \left[ H\omega_0 \left( \frac{1}{2} T_0 + \tilde{c}x \right) - H_0 \Psi_0(x) \right] + \right.$$

$$\left. + 2 \left[ H_0 \overline{\Psi_0(x)} - H\omega_0 \left( \frac{1}{2} T_0 + \tilde{c}x \right) \right] \right\} + C(x) + H \left( \frac{1}{2} T_0 + \tilde{c}x \right) - \beta_0 H_0 \Psi_0(x)$$

$$C(x) = c_1 H \pi \sum_{r=1}^{M-1} \left\{ (k_1 z_r - i y_r) \operatorname{Re} \left[ P_r \left( \frac{x}{l} \right) \right] + (k_1 z_r + i y_r) S_r \left( \frac{x}{l} \right) \right\}$$

$$P_r(x) = \frac{1}{r} \left\{ T_r(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(x + \lambda k e^{-i\alpha} + R^+ e^{i\omega^+})^r} + \dots \right] \right\}$$

$$S_r(x) = q \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ \frac{e^{i\omega^+}}{R^+ (x + \lambda k e^{i\alpha} + R^+ e^{-i\omega^+})^r} - \dots \right]$$

$$R^{\pm} = \{ [(\Delta^{\mp} - 1)^2 + \delta^2] [(\Delta^{\mp} + 1)^2 + \delta^2] \}^{1/4}$$

$$2\omega^+ = \begin{cases} 2\pi - \gamma^- - \gamma^+, & \Delta^- + 1 < 0 \\ \pi - \gamma^- + \gamma^+, & \Delta^- + 1 > 0 \end{cases}, \quad 2\omega^- = \begin{cases} 4\pi - \beta^- - \beta^+, & \Delta^- - 1 > 0 \\ 3\pi + \beta^- - \beta^+, & \Delta^- - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\beta^{\pm} = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{|\Delta^{\pm} \pm 1|}, \quad \gamma^{\pm} = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{|\Delta^{\mp} \pm 1|}$$

$$\Delta^{\pm} = x \pm \lambda k \cos \alpha, \quad \delta = \lambda k \sin \alpha$$

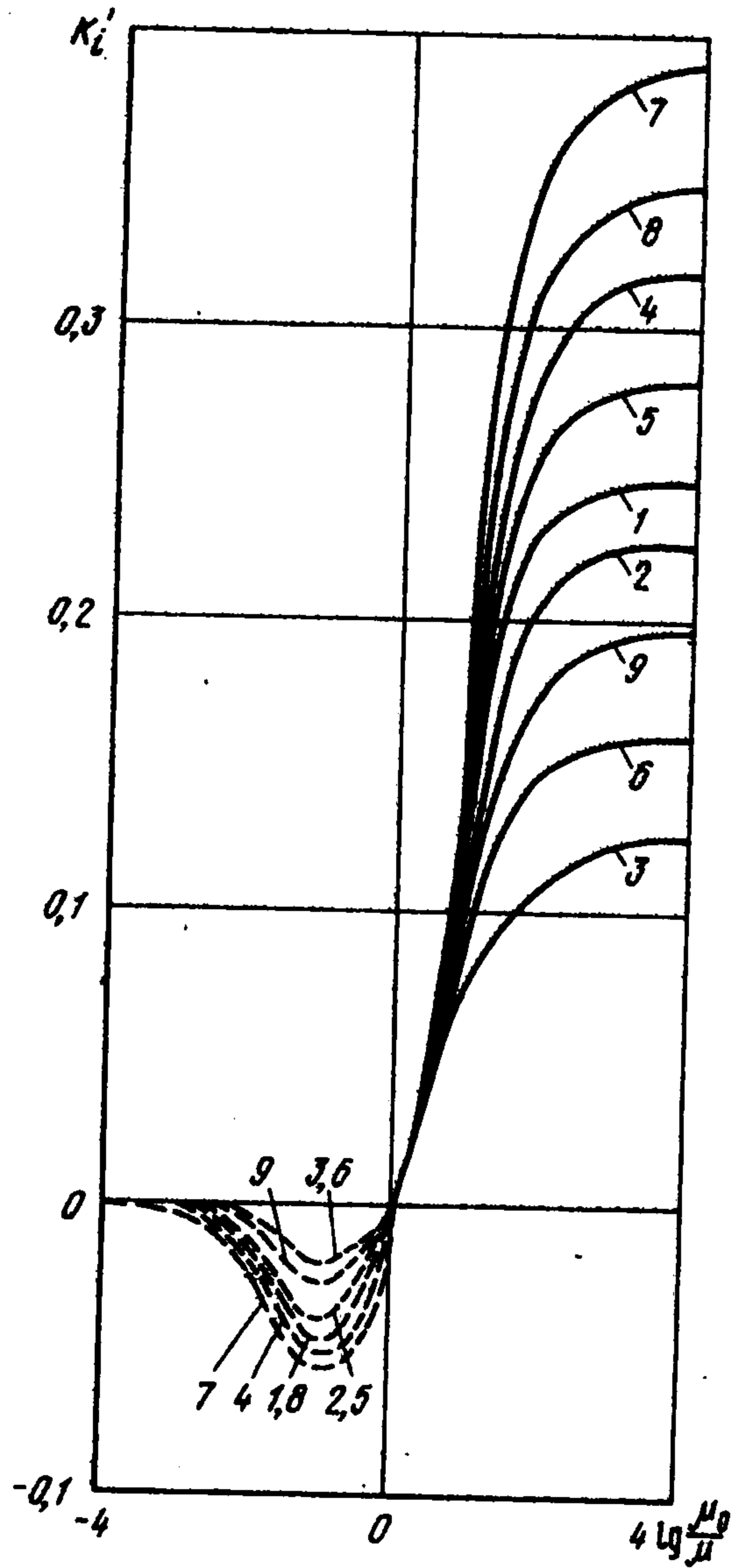
$$\Delta^{\pm} = x \pm \lambda k \cos \alpha, \quad \delta = \lambda k \sin \alpha$$

(многоточие в квадратных скобках означает слагаемое, аналогичное предыдущему, при замене верхнего индекса плюс на минус). К системе уравнений (3.6) нужно добавить следующие соотношения:

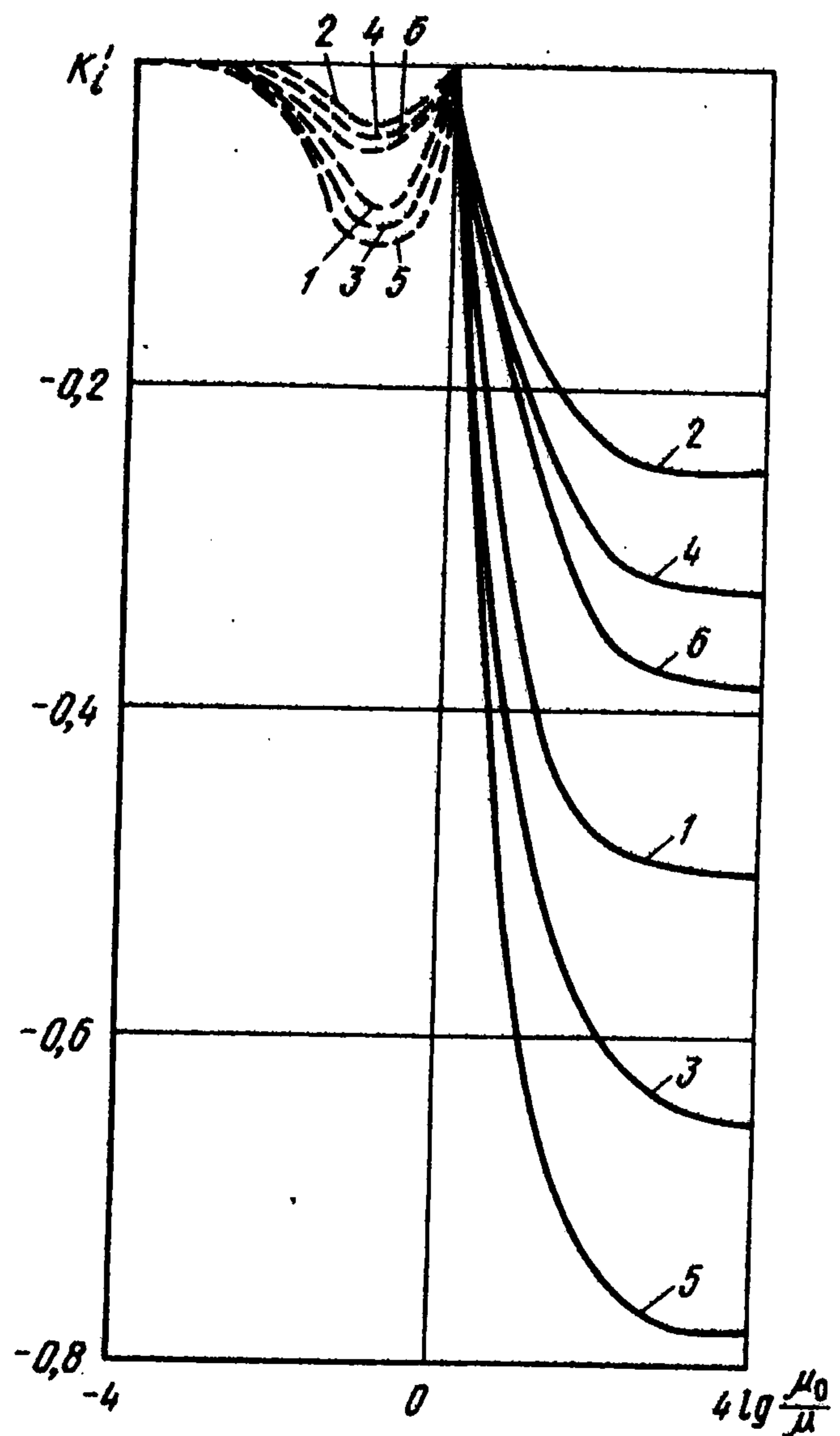
$$\int_{-l}^l K'_0(t) dt = 0, \quad \int_{-l}^l M'_0(t) dt = 0, \quad \operatorname{Im} \int_{-l}^l t K'_0(t) dt = 0$$

представляющие собой условия равновесия включения и условия однозначности перемещений при обходе контура включения.

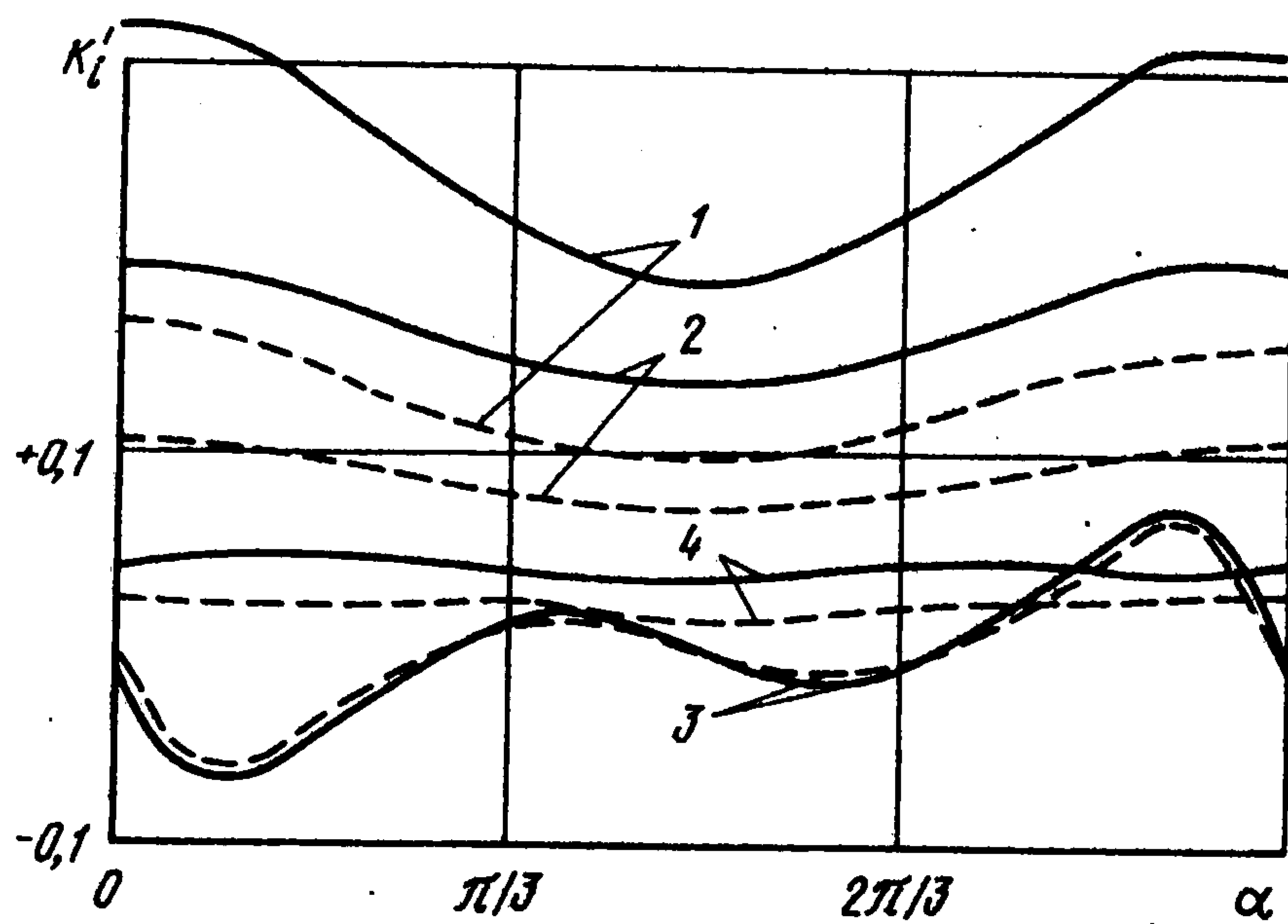
Сделав в формулах (3.6) соответствующий предельный переход, получим сингулярные интегральные уравнения для пластинки с периодической системой трещин [5] и нерастяжимых включений.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Асимптотика напряженно-деформированного состояния в окрестности вершин включения приведена в [4], причем коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) определяются по формулам

$$K_1^\pm - iK_2^\pm = \mp A\beta_0 \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} M_0'(x)$$

$$K_3^\pm - iK_4^\pm = \mp A \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} K_0'(x) \quad (A = 2h\pi / (\sqrt{l}(1+\kappa)))$$

Решение системы уравнений (3.6) ищем в виде

$$K'_0(lx) = u(x) / \sqrt{1-x^2}, \quad M'_0(lx) = v(x) / \sqrt{1-x^2}$$

Здесь  $u(x)$  и  $v(x)$  – неизвестные функции, значения которых в узловых точках определяются из системы линейных алгебраических уравнений, полученной на основании метода механических квадратур [2].

**4. Численный анализ.** Для случая, когда в пластине с периодической системой тонких линейных включений поддерживается постоянная температура  $T_0$ , были проведены численные исследования обобщенных КИН в вершинах тонких включений в зависимости от различных геометрических и теплофизических параметров задачи. Результаты представлены на фиг. 2–4.

На фиг. 2, 3 даны графики зависимостей безразмерных КИН  $K'_i = K_i / (HT_0 \sqrt{l})$  ( $i = 1, 3$ ) от относительной жесткости тонкого включения для разных значений параметра  $\alpha^* = \alpha_0/\alpha$  и безразмерного расстояния между центром соседних включений  $d/l$ . Сплошными линиями представлены результаты для  $K'_3$ , штриховыми – для  $K'_1$ . Отметим, что в рассматриваемом случае напряжения и перемещения в композите появляются не за счет возмущения температурного поля, а в результате отличий в температурах коэффициентах линейного расширения материалов матрицы и включений. При таких условиях  $K'_2 = K'_4 = 0$ .

На фиг. 2 кривые 1, 4, 7 построены для значения параметра  $\alpha^* = 0$ , кривые 2, 5, 8 – для  $\alpha^* = 0,1$  и кривые 3, 6, 9 – для  $\alpha^* = 0,5$ . Линии 1–3 соответствуют относительному расстоянию между включениями  $d/l = 25$  (фактически имеем случай одного включения в неограниченной плоскости и результаты совпадают с приведенными в [4]), линии 4–6 построены при  $d/l = 3,0$ , а линии 7–9 – при  $d/l = 2,5$ .

Результаты  $\alpha^* \geq 1$  приведены на фиг. 3. Четные кривые построены для значения  $\alpha^* = 2$ , нечетные – для  $\alpha^* = 3$ . Отметим, что для  $\alpha^* = 1$  все КИН равны нулю, т.е. отсутствует возмущение напряженного состояния в окрестности вершин включений. Графики 1, 2 построены для  $d/l = 2,5, 3, 4$  – для  $d/l = 3,0$  и 5, 6 – для  $d/l = 2,5$ .

Характер изменения обобщенных КИН  $K'_i$  в зависимости от угла ориентации включения представлен на фиг. 4 сплошными линиями при  $\alpha^* = 0$  и штриховыми при  $\alpha^* = 0,5$ . Заметим, что при  $\alpha^* = 2$  искомые зависимости получаются из сплошных кривых фиг. 4 симметричным отображением относительно оси абсцисс. Здесь введены следующие обозначения кривых. Линия 1 характеризует поведение  $K'_3$  для абсолютно жесткого включения, линии 2, 3 дают соответственно значения  $K'_3, K'_1$  для упругого включения с относительной жесткостью  $\mu_0/\mu = 10$ , линия 4 представляет характер изменения  $K'_1$  для включения с относительной жесткостью 0,1. Отметим, что в рассматриваемом случае остальные величины малы по сравнению с приведенными и поэтому на фигурах не указаны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972. 198 с.
2. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 831 с.
4. Грилицкий Д.В., Драган М.С., Опанасович В.К. Температурное поле и термоупругое состояние пластинки с тонкостенным упругим включением // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 338–345.
5. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1983. 277 с.