

УДК 539.3:534

© 1994 г. О.Д. Пряхина, М.Р. Фрейгейт

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ

Рассматривается нестационарная динамическая задача для массивного полосового штампа, лежащего на полуограниченной среде. Штмп жестко сцеплен с подстилающим основанием, представляющим собой пакет из жестко сцепленных между собой слоев. Нижний слой жестко сцеплен либо с недеформируемым основанием, либо с полупространством. На штмп действует произвольно приложенная нагрузка, изменяющаяся во времени по известному закону. Предложенный эффективный метод решения задач такого класса позволяет детально исследовать динамику штампа с разнообразными физическими и геометрическими параметрами подстилающей среды. Проведено сравнение поведения штампа при наличии сцепления и при отсутствии трения в области контакта. Рассмотрены конкретные численные примеры. Работа продолжает исследования нестационарных контактных задач [1, 2]¹.

1. Постановка задачи. Пусть на жесткий полосовой штмп ширины $2a$ с плоским основанием, жестко сцепленным со слоистой полуограниченной средой, занимающей область $-\infty \leq x, y \leq \infty, z \leq 0$, действует нагрузка, изменяющаяся во времени t по заданному закону. Приведенная к центру масс штампа, нагрузка разбивается на силовую составляющую $P(t) = \{P_1(t), P_2(t)\}$ и момент $M(t)$. Смещения точек штампа $u^0(t) = \{u_1^0, u_2^0\}$ определяются в виде

$$u_1^0 = u_1, \quad u_2^0 = u_2 + \varphi x$$

где u_1, u_2 – горизонтальная и вертикальная составляющие смещения центра масс штампа, совпадающего с началом координат ($x = 0, z = 0$), φ – угол поворота относительно центра масс штампа.

Задача сводится к совместному решению уравнений движения штампа и дифференциальных уравнений движения среды при условии полного контакта

$$u^0(t) = w(x, 0, t), \quad x \leq a$$

где $w(x, z, t) = \{w_1, w_2\}$ – смещения точек среды.

Считая, что в начальный момент времени система находится в покое, запишем уравнения движения штампа в преобразованиях Лапласа

$$\begin{aligned} mp^2 u &= P(p) - Q(p), & Q(p) &= \int_{-a}^a q_1(x) dx \\ Jp^2 \varphi &= M(p) - R(p), & R(p) &= \int_{-a}^a q_2(x) x dx \end{aligned} \tag{1.1}$$

¹См. также Дорохов И.В., Пряхина О.Д., Фрейгейт М.Р. Задача о нестационарном нагружении массивного жесткого штампа на поверхности многослойного основания. Ростов-на-Дону, 1992, 36 с. – Деп. в ВИНТИ 10.07.92, № 2266-В92.

Здесь m – масса штампа, J – момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс штампа, $\mathbf{q}(x) = \{q_1, q_2\}$ – вектор касательных и нормальных напряжений под штампом, $Q(p)$ и $R(p)$ – равнодействующая контактных давлений и момент нормальной составляющей контактных напряжений в области контакта штампа со средой, p – параметр преобразования Лапласа.

Применяя интегральные преобразования Фурье и Лапласа к уравнениям Ламе, описывающим движение среды и граничным условиям задачи, а также учитывая условие контакта, приходим [3] к необходимости решения системы интегральных уравнений первого рода относительно неизвестных контактных напряжений $\mathbf{q}(x) = \{q_1, q_2\}$:

$$\mathbf{Kq} = \int_{-a}^a \mathbf{k}(x-\xi, p) \mathbf{q}(\xi, p) d\xi = \mathbf{u}^0(p), \quad |x| \leq a \quad (1.2)$$

$$\mathbf{k}(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\alpha, p e^{-i\xi}) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (1.3)$$

где α – параметр преобразования Фурье по переменной x .

Соотношения (1.2), (1.3) являются основными при изучении нестационарного взаимодействия штампов с полуограниченными средами, обладающими вязкоупругими свойствами, описываемыми в рамках линейной модели частотно – независимого внутреннего трения [1]. Коэффициент внутреннего трения $\zeta = 0$ соответствует случаю упругой среды, при этом интеграл (1.3) берется по контуру σ , диктуемому условиями излучения [3]. Матрица – функция $\mathbf{K}(\alpha, p) = \|K_{mn}\|_{m,n=1}^2$ определяется типом среды и для слоистых полуограниченных сред имеет тот же вид, что и в задачах об установившихся колебаниях при замене частоты колебаний ω на $i\rho$ (i – мнимая единица).

Свойства функций K_{mn} для полуограниченных сред подробно описаны в [3]. Следует отметить, что K_{mn} имеют одни и те же для всех функций полюса $\pm p$ ($k = 1, 2, \dots, n$), K_{mm} – четные, а K_{mn} ($m \neq n$) – нечетные функции параметра α , причем $K_{12} = -K_{21} = i\alpha L(\alpha)$. При $|\alpha| \rightarrow \infty$ функции K_{mn} имеют следующее асимптотическое представление

$$K_{mn} = c|\alpha|^{-1} [1 + O(\alpha^{-1})], \quad K_{12} = ib\alpha^{-1} [1 + O(\alpha^{-1})], \quad c > |b| \quad (1.4)$$

При указанных свойствах ядер система исходных уравнений (1.2) однозначно разрешима в $L_\lambda(-a, a)$, $\lambda > 1$. Критерии единственности определены в [3].

2. Построение определяющих соотношений. Пусть $\mathbf{q}_0(x, \eta, A_1, A_2)$ – решение системы уравнений (1.2) с известной правой частью

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{A} e^{-i\eta x}, \quad \mathbf{A} = \{A_1, A_2\}$$

Тогда, в силу линейной постановки задачи, решение контактной задачи (1.2)–(1.3) будет определяться соотношением

$$\mathbf{q}(x) = u_1 \mathbf{q}^1 + u_2 \mathbf{q}^2 + \Phi \mathbf{q}^3 \quad (2.1)$$

где \mathbf{q}^k – решения контактных задач

$$\mathbf{Kq}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Kq}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Kq}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

связанные с решением \mathbf{q}_0 следующим образом:

$$\mathbf{q}^1 = \mathbf{q}_0(x, 0, 1, 0), \quad \mathbf{q}^2 = \mathbf{q}_0(x, 0, 0, 1), \quad \mathbf{q}^3 = i \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \eta}(x, 0, 0, 1)$$

Уравнения движения (1.1) принимают вид:

$$mp^2 u_1 = P_1 - Q_1^1 u_1 - Q_1^2 u_2 - Q_1^3 \varphi$$

$$mp^2 u_2 = P_2 - Q_2^1 u_1 - Q_2^2 u_2 - Q_2^3 \varphi$$

$$Jp^2 \varphi = M - R^1 u_1 - R^2 u_2 - R^3 \varphi$$

$$Q^k = \int_{-a}^a q^k(x) dx, \quad R^k = \int_{-a}^a q_2^k(x) x dx, \quad k = 1, 2, 3$$

Учитывая, что ось x является осью симметрии задачи, имеем

$$(mp^2 + Q_1^1) u_1 + Q_1^3 \varphi = P_1, \quad (mp^2 + Q_2^2) u_2 = P_2, \quad (Jp^2 + R^3) \varphi + R^1 u_1 = M$$

Используя теорему взаимности, можно показать, что $Q_1^3 \equiv R^1$. Тогда компоненты смещений штампа запишутся так:

$$u_1 = [P_1(Jp^2 + R^3) - M Q_1^3] \Delta_0^{-1}$$

$$u_2 = P_2 (mp^2 + Q_2^2)^{-1}$$

$$\varphi = [M(mp^2 + Q_1^1) - P_1 Q_1^3] \Delta_0^{-1} \quad (2.2)$$

$$\Delta_0 = (mp^2 + Q_1^1)(Jp^2 + R^3) - (Q_1^3)^2$$

Очевидно, что для построения решения необходимо определить четыре функционала: Q_1^1, Q_1^3, Q_2^2, R^3 .

3. Построение решения контактной задачи методом фиктивного поглощения. Рассмотрим систему интегральных уравнений (1.2)

$$K_{11} q_1^0 + K_{12} q_2^0 = A_1 e^{-i\eta x}, \quad K_{21} q_1^0 + K_{22} q_2^0 = A_2 e^{-i\eta x} \quad (3.1)$$

где $q_0(x) = \{q_1^0, q_2^0\} \equiv q_0(x, \eta, A_1, A_2)$.

Представим матрицу $K(\alpha) \equiv K(\alpha, p)$ в виде произведения $K(\alpha) = S(\alpha) \Pi(\alpha)$. Матрицу $S(\alpha)$ строим таким образом, чтобы ее элементы не имели особенностей на вещественной оси и сохраняли поведение $K(\alpha)$ (вида (1.4)) на бесконечности. Выберем

$$S(\alpha) = \begin{vmatrix} s_1 & is_2 \\ -is_2 & s_1 \end{vmatrix} \frac{\beta^2}{(B^2 + \alpha^2)^{1/2}} \quad (3.2)$$

где

$$s_1 = \text{ch}(2\delta\psi), \quad s_2 = \text{sh}(2\delta\psi), \quad \beta^4 = c^2 - b^2$$

$$\psi = \text{arctg}(\alpha / B), \quad \delta = \pi^{-1} \text{arcth}(b / c)$$

Для рассматриваемых сред $c = 1 - \nu$, $b = (1 - 2\nu)/2$, ν – коэффициент Пуассона верхнего слоя. В этом случае элементы матрицы $\Pi(\alpha) = S^{-1}K$ сохраняют все особенности элементов матрицы $K(\alpha)$ и имеют вид

$$\Pi_{mm} = (\alpha^2 + B^2)^{1/2} \beta^{-2} [K_{mm} s_1 - \alpha L s_2], \quad m = 1, 2$$

$$\Pi_{mn} = (\alpha^2 + B^2)^{1/2} \beta^{-2} [L s_1 - K_{nn} s_2 \alpha^{-1}], \quad m \neq n$$

Заметим, что $\Pi_{mn}(\alpha)$ четные функции и на бесконечности $\Pi(\alpha)$ вырождается в единичную матрицу:

$$\Pi(\alpha) = \begin{vmatrix} \Pi_{11} & i\alpha\Pi_{12} \\ -i\alpha\Pi_{21} & \Pi_{22} \end{vmatrix} \underset{\alpha \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

В соответствии с методом фиктивного поглощения решение ищем в виде

$$q_0(x) = q_*(x) + \varphi(x) \quad (3.3)$$

так, чтобы выполнялись соотношения

$$Q_*(\pm p_k) = \int_{-a}^a q_*(x) e^{\pm p_k x} dx = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

В качестве компонент вектора $\varphi(x)$ возьмем системы δ -функций с непересекающимися носителями в точках $x_k = \pm y_k$, y_k – точки, делящие интервал $(0, a)$ на равные отрезки

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{2n} C_k \delta(x - x_k) \quad (3.4)$$

$C_k = \{C_k^1, C_k^2\}$ – постоянные, подлежащие определению.

Введем новую неизвестную вектор – функцию $t(x)$ соотношением

$$t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad T(\alpha) = \Pi(\alpha) Q_*(\alpha) \quad (3.5)$$

Внося (3.3), (3.4) в (3.1), и учитывая (3.5), приходим к следующей системе интегральных уравнений:

$$S t \equiv \int_{-a}^a s(x - \xi) t(\xi) d\xi = A e^{-i\eta x} - \sum_{k=1}^{2n} s(x - x_k) C_k \quad (3.6)$$

$$s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Элементы матрицы $S(\alpha)$ даются формулами (3.2). Оператор в левой части системы (3.6) уже обладает сильным затуханием, подынтегральная матрица – функция ядра S не имеет особенностей на вещественной оси, и для определения $t(x)$ оказываются применимы многочисленные методы решения статических задач. Методы построения обратного оператора S^{-1} в зависимости от свойств функции $S(\alpha)$ описаны в [3–6].

Пусть $t_0(x) = \chi(x, \eta) A$ – решение (3.6) с правой частью $A e^{-i\eta x}$, в преобразованиях Фурье – Лапласа $T_0(\alpha) = X(\alpha, \eta) A$, тогда в силу линейной постановки задачи решение (3.6) запишется в виде

$$T(\alpha) = T_0(\alpha) - \sum_{k=1}^{2n} [I e^{i\alpha x_k} + Z(\alpha, x_k)] C_k \quad (3.7)$$

$$t(x) = t_0(x) - \varphi(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} \int_{\sigma} Z(\alpha, x_k) C_k e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (3.8)$$

$$Z(\alpha, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} S^{-1}(\alpha) [K(\eta) - S(\eta)] S(\alpha) X(\alpha, \eta) e^{-i\eta x} d\eta \quad (3.9)$$

Из (3.5) находим

$$q_*(x) = \int_{-a}^a Q_*(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad Q_*(\alpha) = \Pi^{-1}(\alpha) \Gamma(\alpha) \quad (3.10)$$

Для того чтобы функция $q_*(x)$ была из L_λ и имела носитель лишь в $[-a, a]$, согласно методу фиктивного поглощения должны выполняться соотношения

$$T(\pm \xi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

где $\pm \xi_k$ – полюса обратной матрицы $\Pi^{-1}(\alpha)$, одни и те же для всех элементов Π_{ij}^{-1} . Соотношения (3.11) представляют собой алгебраическую систему $4n$ уравнений для определения $4n$ неизвестных C_k^1, C_k^2 ($k = 1, \dots, 2n$).

Используя (3.3), (3.4), (3.10), (3.7), (3.8), получим искомое решение контактной задачи в форме

$$q_0(x) = \left\{ \chi(x, \eta) + \frac{1}{2\pi_\sigma} \int (\Pi^{-1}(\alpha) - I) X(\alpha, \eta) e^{-i\alpha x} d\alpha \right\} A - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} \left[\int_\sigma \Pi^{-1}(\alpha) Z(\alpha, x_k) e^{-i\alpha x} d\alpha + \int_\sigma (\Pi^{-1}(\alpha) - I) e^{-i\alpha(x-x_k)} d\alpha \right] C_k \quad (3.12)$$

и соответственно

$$Q_0(\alpha) = \Pi^{-1}(\alpha) \Gamma(\alpha) + \sum_{k=1}^{2n} C_k e^{i\alpha x_k} \quad (3.13)$$

Для построения $t_0(x)$ используем метод факторизации, позволяющий получить весьма простое представление решения (3.6) в виде вырожденной составляющей и пограничной.

Факторизация матрицы – функции $S(\alpha)$ как функционально-коммутативной осуществляется в явном виде в соответствии с общими теоремами [7]. Контур σ в этом случае совпадает с вещественной осью

$$S(\alpha) = S_+(\alpha) S_-(\alpha) = S_-(\alpha) S_+(\alpha)$$

$$S_\pm(\alpha) = \beta / 2(B \mp i\alpha)^{-1/2} \begin{vmatrix} s_1^\pm & is_2^\pm \\ -is_2^\pm & s_1^\pm \end{vmatrix}$$

$$s_1^\pm = (B \mp i\alpha)^{\pm i\delta} + (B \mp i\alpha)^{\mp i\delta}; \quad s_2^\pm = (B \mp i\alpha)^{\pm i\delta} - (B \mp i\alpha)^{\mp i\delta}$$

Применив метод факторизации, решение системы интегральных уравнений (3.6) можно свести к решению системы уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором вида

$$X(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\sigma S_+^{-1}(\alpha) [S_-(\alpha) Y(\alpha) e^{-2i\alpha z} + F(\alpha) e^{-i\alpha z}] \frac{d\alpha}{\alpha + z} \quad (3.14)$$

$$Y(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\sigma S_-^{-1}(\alpha) [S_+(-\alpha) X(\alpha) e^{-2i\alpha z} + F(-\alpha) e^{-i\alpha z}] \frac{d\alpha}{\alpha + z}$$

$$F = \{F_1, F_2\}, \quad F_k(\alpha) = 2\pi A_k \delta(\alpha - \eta)$$

$$X = \{X_1, X_2\}, \quad Y = \{Y_1, Y_2\}$$

Вектор – функции $X(\alpha), Y(\alpha)$ регулярны ниже контура σ и убывают там не медленнее чем степенным образом [8].

Вектор-функция $t_0(x)$ имеет вид

$$t_0(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} \int [\mathbf{S}^{-1}(\alpha)\mathbf{F}(\alpha) + \mathbf{S}_-^{-1}(\alpha)\mathbf{X}(-\alpha)e^{i\alpha a} + \mathbf{S}_+^{-1}(\alpha)\mathbf{Y}(\alpha)e^{-i\alpha a}] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (3.15)$$

Приближенное решение системы интегральных уравнений (3.14) можно, отбросив малые интегральные члены, представить в форме

$$\mathbf{X}(z) = i\mathbf{S}_+^{-1}(\eta)\mathbf{A} \frac{e^{-i\eta a}}{\eta + z}; \quad \mathbf{Y}(z) = i\mathbf{S}_-^{-1}(\eta)\mathbf{A} \frac{e^{i\eta a}}{z - \eta} \quad (3.16)$$

Подставив (3.16) в (3.15), получим представление:

$$t_0(x) = \chi(x, \eta)\mathbf{A}$$

$$\chi(x, \eta) = \{-[\mathbf{G}(x, \eta) + \mathbf{G}^T(-x, -\eta)](B^2 + \eta^2)^{1/2}(2\beta^2)^{-1} + \mathbf{S}^{-1}(\eta)\} e^{-i\eta x}$$

$$\mathbf{G}(x, \eta) = \begin{vmatrix} G_1 & -iG_2 \\ iG_2 & G_1 \end{vmatrix}$$

$$G_{1,2} = \Gamma^{-1}(v_2)\Gamma[v_2, (B + i\eta)(a - x)]e^{2\delta\psi_0} \pm \Gamma^{-1}(v_1)\Gamma[v_1, (B + i\eta)(a - x)]e^{-2\delta\psi_0}$$

$$v_{1,2} = -\frac{1}{2} \mp i\delta, \quad \psi_0 = \arctg(\eta / B)$$

Выражение для $G_{1,2}$ можно представить

$$G_{1,2} = 2s_{1,2}(\eta) - w_{1,2}(x, \eta) - \sigma_{1,2}(x, \eta) \quad (3.17)$$

$$w_{1,2}(x, \eta) = e^{2\delta\psi_0}\pi_\gamma(v_2, \eta, x) \pm e^{-2\delta\psi_0}\pi_\gamma(v_1, \eta, x)$$

$$\sigma_{1,2}(x, \eta) = e^{2\delta\psi_0}\theta(v_2, \eta, x) \pm e^{-2\delta\psi_0}\theta(v_1, \eta, x)$$

$$\pi_\gamma(\varepsilon, \eta, x) = \Gamma^{-1}(\varepsilon + 1)\gamma[\varepsilon + 1, (B + i\eta)(a - x)]\theta(\varepsilon, \eta, x) =$$

$$= \Gamma^{-1}(\varepsilon + 1)e^{-(B + i\eta)(a - x)} [(B + i\eta)(a - x)]^\varepsilon$$

Здесь $\Gamma(x)$, $\gamma(\varepsilon, x)$, $\Gamma(\varepsilon, x)$ – соответственно полная и неполная гамма-функции Эйлера, индекс "т" – означает транспонирование.

Из (3.17) видно, что в контактной задаче со сцеплением решение содержит осциллирующую особенность на краю штампа вида $(a \pm x)^{-\frac{1}{2} \mp i\delta}$.

Преобразование Фурье $T_0(\alpha)$ вектор – функции $t_0(x)$ на отрезке $(-a, a)$ имеет вид

$$T_0(\alpha) = \mathbf{X}(\alpha, \eta)\mathbf{A}$$

$$\mathbf{X}(\alpha, \eta) = [2i\beta^2(\alpha - \eta)]^{-1} \{e^{i\alpha(\alpha - \eta)}\mathbf{R}(\alpha, \eta) - e^{-i\alpha(\alpha - \eta)}\mathbf{R}^T(-\alpha, -\eta)\}$$

$$\mathbf{R}(\alpha, \eta) = \begin{vmatrix} r_1 & ir_2 \\ -ir_2 & r_1 \end{vmatrix}$$

$$r_{1,2} = (B + i\alpha)^{-v_1}(B - i\eta)^{-v_2}\pi(v_1, \alpha) \pm (B + i\alpha)^{-v_2}(B - \eta)^{-v_1}\pi(v_2, \alpha) \pm$$

$$\pm (B^2 + \eta^2)^{1/2} [e^{2\delta\psi_0}\pi(v_1, -\eta) \pm e^{-2\delta\psi_0}\pi(v_2, -\eta) - 2s_{1,2}]$$

$$\pi(\varepsilon, \alpha) = \gamma[\varepsilon + 1, 2a(B + i\alpha)]\Gamma^{-1}(\varepsilon + 1) = \pi_\gamma(\varepsilon, \alpha, -a)$$

Получим окончательные формулы для расчета касательных и нормальных напряжений под штампом, внося выражения $t_0(x)$, $\chi(x, \eta)$, $\mathbf{X}(\alpha, \eta)$ в интегральное представление решения (3.12). Интегралы (3.9) после перемножения матриц и ряда преобразований берутся по вычетам, так как подынтегральные функции экспоненциально

убывают в нижней полуплоскости и не имеют там точек ветвления. Остальные интегралы вычисляются по формулам операционного исчисления.

Опуская выкладки, приведем общий вид приближенного решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} q_0(x) = & \left\{ -2\beta^2 K^{-1}(\eta) + (B^2 + \eta^2)^{1/2} [V(x, \eta) + V^*(-x, -\eta)] + \right. \\ & \left. + e^{-i\eta(a-x)} (B - i\eta) \sum_{l=1}^n M(\xi_l, x, \eta) + e^{i\eta(a+x)} (B + i\eta) \sum_{l=1}^n M^*(\xi_l, -x, -\eta) \right\} A e^{-i\eta x} (2\beta^2)^{-1} + \\ & + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{2n} \left\{ \sum_{j=1}^n \left(\frac{B + ip_j}{B - ip_j} \right)^{1/2} [N(p_j, x_k, x) + N^*(p_j, -x_k, -x)] + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n [Y(\xi_l, p_j, x_k, x) + Y^*(\xi_l, p_j, -x_k, -x)] \right\} C_k \end{aligned}$$

$$V(x, \eta) = \Pi^{-1}(\eta)W(x, \eta) + \sigma(x, \eta)$$

$$M(\xi, x, \eta) = B(-\xi)E^1(-\xi, x, \eta)e^{-i\xi(a-x)}(\eta + \xi)^{-1} - B(\xi)E(\xi, x, \eta)e^{i\xi(a-x)}(\eta - \xi)^{-1}$$

$$N(\kappa, y, x) = e^{i\kappa(a-y) + i\kappa(a-x)} A(-\kappa)\sigma(x, \kappa)$$

$$E^1(\xi, x, \eta) = b(\xi, \eta) - E(\xi, x, \eta)$$

$$\begin{aligned} Y(\xi, \kappa, y, x) = & e^{i\kappa(a-y)} [B(-\xi)A(-\kappa)E^{-1}(-\xi, x, \kappa)e^{-i\xi(a-x)}(\xi - \kappa)^{-1} - \\ & - B(\xi)A(-\kappa)E(\xi, x, \kappa)e^{i\xi(a-x)}(-\kappa - \xi)^{-1}] \end{aligned}$$

$$A(p_j) = \operatorname{Res}_{\alpha=p_j} \Pi(\alpha), \quad B(\xi_j) = \operatorname{Res}_{\alpha=\xi_j} \Pi^{-1}(\alpha)$$

$$W(x, \eta) = \begin{vmatrix} w_1 & -iw_2 \\ iw_2 & w_1 \end{vmatrix}, \quad \sigma(x, \eta) = \begin{vmatrix} \sigma_1 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$$

$$E(\xi, x, \kappa) = \begin{vmatrix} e_1 & -ie_2 \\ ie_2 & e_1 \end{vmatrix}, \quad b(\alpha, \eta) = \begin{vmatrix} b_1 & -ib_2 \\ ib_2 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$e_{1,2}(\xi, x, \eta) = \tau(v_2, \xi, \eta)\pi_\gamma(v_2, \xi, x) \pm \tau(v_1, \xi, \eta)\pi_\gamma(v_1, \xi, x)$$

$$\tau(\varepsilon, \xi, \eta) = \left(\frac{B + i\xi}{B - i\eta} \right)^{-\varepsilon}, \quad b_{1,2}(\alpha, \eta) = \tau(v_2, \alpha, \eta) \pm \tau(v_1, \alpha, \eta)$$

Система (3.11) для определения C_k принимает вид

$$\sum_{k=1}^{2n} f(\pm\xi_l, x_k)C_k = X(\pm\xi_l, \eta)A, \quad l=1, \dots, n$$

Трансформанта Фурье $Q(\alpha, \eta)$ (3.13) определяется простой формулой

$$Q_0(\alpha) = \Pi^{-1}(\alpha) \left\{ X(\alpha, \eta)A - \sum_{k=1}^{2n} f(\alpha, x_k)C_k \right\} \quad (3.18)$$

$$f(\alpha, x) = [e^{i\alpha a}F(\alpha, x) + e^{-i\alpha a}F^*(-\alpha, -x)]/2$$

$$F(\alpha, x) = \sum_{j=1}^n \frac{e^{ip_j(\alpha-x)}}{2p_j(p_j + \alpha)} A(-p_j)b(\alpha, p_j)$$

Звездочка означает, что в матрице аргумента $(-x)$ нужно умножить косодиагональные элементы на (-1) .

4. Определение смещений точек штампа. Очевидно, что функционалы Q_1^1, Q_1^3, Q_2^2, R^3 связаны с построенным решением (3.18) $Q_0(\alpha) \equiv Q_0(\alpha, \eta, A_1, A_2)$ следующими соотношениями:

$$Q_1^1 = Q_1^0(0, 0, 1, 0); \quad Q_2^2 = Q_2^0(0, 0, 0, 1); \quad R^3 = \frac{\partial^2 Q_2^0}{\partial \alpha \partial \eta}(0, 0, 0, 1)$$

$$Q_1^3 = i \frac{\partial Q_1^0}{\partial \eta}(0, 0, 0, 1) = -i \frac{\partial Q_2^0}{\partial \alpha}(0, 0, 1, 0)$$

Таким образом, в (2.2) определены неизвестные функционалы и, применяя обратное преобразование Лапласа, получим смещения центра масс и угол поворота штампа

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} u(p) e^{pt} dt \quad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \varphi(p) e^{pt} dt, \quad \varepsilon > 0$$

Из физических условий задачи следует, что подынтегральная функция не имеет корней в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и интеграл по прямой, параллельной мнимой оси, можно заменить интегралом по мнимой оси, а затем заменой $p = -i\omega$ интеграл обращения Лапласа сводится к интегралу Фурье

$$u(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} u(i\omega) \sin \omega t d\omega, \quad \varphi(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \varphi(i\omega) \sin \omega t d\omega \quad (4.1)$$

Вычисление этих интегралов проводится с использованием метода Файлона [8].

Для вычисления реакции основания $Q(t)$, момента $R(t)$ и контактных напряжений $q(x, t)$ необходимо в (4.1) заменить подынтегральную функцию на $Q(p), R(p)$ или $q(x, p)$ соответственно. При этом $q(x, t)$ определяется формулой (2.1), и

$$Q_1(p) = u_1 Q_1^1 + \varphi Q_1^3, \quad Q_2(p) = u_2 Q_2^2$$

$$R(p) = u_1 Q_1^3 + \varphi R^3 = u_1 R^1 + \varphi R^3$$

5. Функция влияния для многослойной среды на полупространстве. Был предложен [2] метод построения функции влияния $K(\alpha, \beta, z, \omega)$ для многослойной среды, жестко сцепленной с недеформируемым основанием в трехмерной постановке, достоинством которого является возможность исследования нестационарных задач с произвольным количеством слоев. Вектор смещений точек среды $w(z) = \{w_1, w_2, w_3\}$ в преобразованиях Фурье (α, β – параметры преобразования) получен в виде

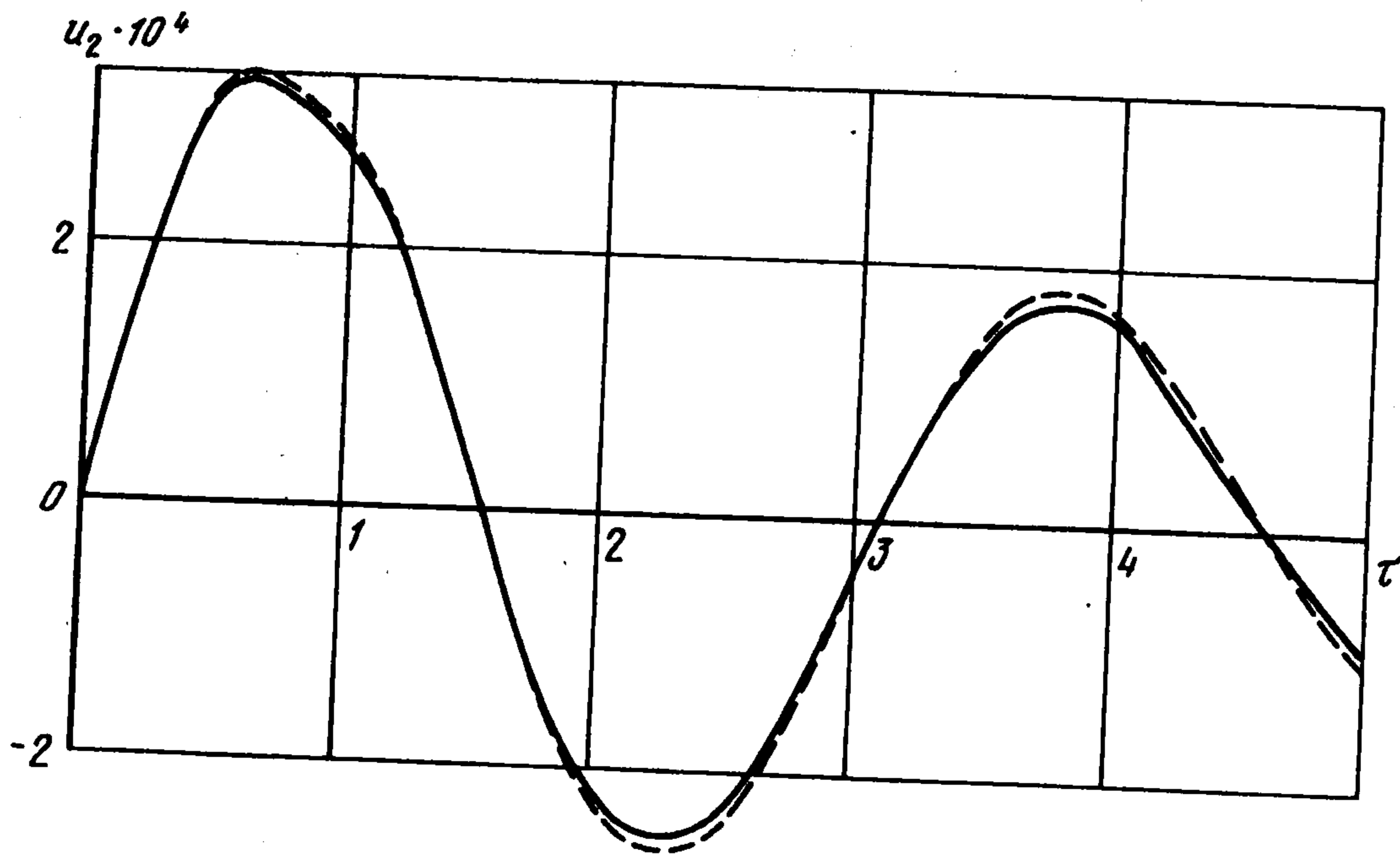
$$w(z) = K(\alpha, \beta, z, \omega) q_0, \quad K(\alpha, \beta, z, \omega) = (-1)^{k-1} (A(z_k) - B(z_k) F_k^{-1} A(-h_k)) \times$$

$$\times \prod_{i=k-1}^1 F_i^{-1} A(-h_i) / \mu_k$$

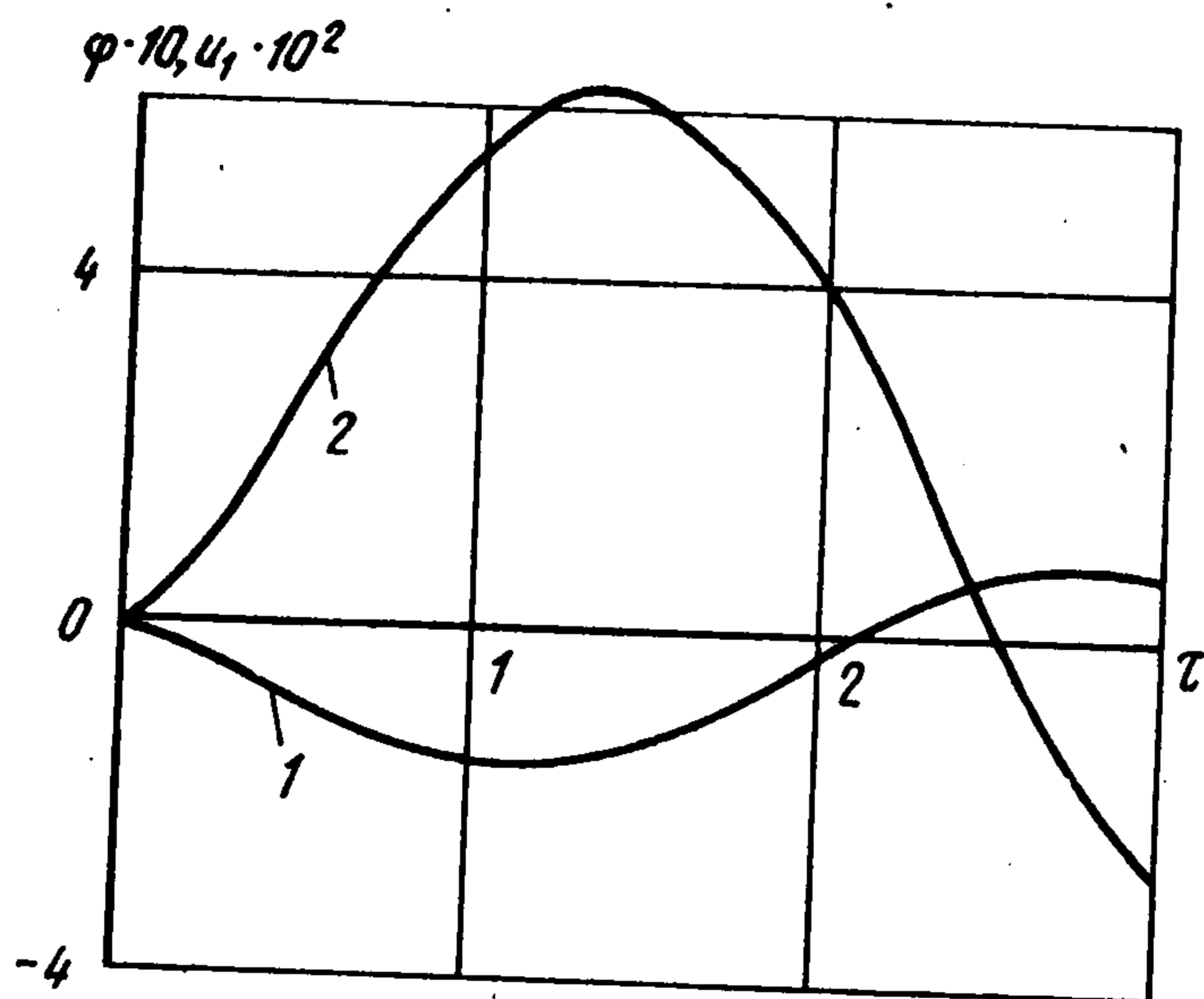
$$F_N = B(-h_N), \quad F_k = B(-h_k) - g_k A(-h_{k+1}) + g_k B(h_{k+1}) F_{k+1}^{-1} A(h_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$z = z_k - 2 \sum_{i=1}^k h_i + h_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

где h_k, μ_k – полутолщина и параметр Ламе k -го слоя, $g_k = \mu_k / \mu_{k+1}$, $q_0 = \{q_1, q_2, q_3\}$ – поверхностная нагрузка. Вид матриц $B(z), A(z)$ приведен в [2].



Фиг. 1



Фиг. 2

Решение для многослойной среды, жестко сцепленной с упругим полупространством получим, устремив толщину нижнего слоя к ∞ . Заменяя систему координат $z^* = z_N - h_N$ в нижнем слое и произведя предельный переход, получим:

$$F_N = 0, \quad F_{N-1} = \mathbf{B}(-h_{N-1}) - g_{N-1} \mathbf{A}^\infty(0)$$

$$F_k = \mathbf{B}(-h_k) - g_k \mathbf{A}(h_{k+1}) + g_k \mathbf{B}(h_{k+1}) F_{k+1}^{-1} \mathbf{A}(-h_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-2$$

$$z = z_k - 2 \sum_{i=1}^k h_i + h_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$z = z^* - 2 \sum_{i=1}^{N-1} h_i, \quad k = N$$

$$\mathbf{A}^\infty(z) = \begin{vmatrix} \alpha^2 M + \beta^2 L & \alpha\beta[M-L] & -i\alpha N_1 \\ \alpha\beta[M-L] & \beta^2 M + \alpha^2 L & -i\beta N_1 \\ i\alpha N_2 & i\beta N_2 & R \end{vmatrix}$$

$$M = \frac{2\sigma_2}{\lambda^2 \Delta^\infty} [-\lambda^2 f(\sigma_1 z) + \gamma f(\sigma_2 z)], \quad L = \frac{4}{\sigma_2 \lambda^2} f(\sigma_2 z)$$

$$N_{1,2} = \frac{2}{\Delta^\infty} [\gamma f(\sigma_{1,2} z) - \sigma_1 \sigma_2 f(\sigma_{2,1} z)]$$

$$R = \frac{2\sigma_1}{\Delta^\infty} [-\lambda^2 f(\sigma_2 z) + \gamma f(\sigma_1 z)], \quad f(z) = \text{ch}(z) + \text{sh}(z) = e^z$$

$$\Delta^\infty = [\gamma^2 - \lambda^2 \sigma_1 \sigma_2], \quad \lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \gamma = \lambda^2 - \frac{1}{2} \theta_2^2$$

$$\sigma_i^2 = \lambda^2 - \theta_i^2, \quad \theta_1^2 = \epsilon_N \theta_2^2, \quad \theta_2^2 = \rho_N \omega^2 / \mu_N, \quad \epsilon_N = (1 - 2\nu_N) / (2 - 2\nu_N)$$

В частности, для слоя, жестко сцепленного с полупространством ($-\infty \leq x, y \leq \infty$, $z \leq 0$) получаем перемещения:

в слое

$$w(z) = [A(z + h_1) - B(z + h_1)F_1^{-1}A(-h_1)]q_0\mu_1^{-1}$$

в полупространстве

$$w(z) = -A^\infty(z + 2h_1)F_1^{-1}A(-h_1)q_0\mu_2^{-1}, \quad F_1 = B(-h_1) - g_1A^\infty(0)$$

6. Численный анализ задачи. Численный анализ проводился для полосового штампа, жестко сцепленного с многослойной средой.

Фиг. 1 иллюстрирует влияние сил сцепления в области контакта на поведение штампа, контактирующего со слоем толщины $H = 0.5$ при нагружении силой $P_2(t) = te^{-25t}$. Сплошная линия соответствует задаче со сцеплением в области контакта, пунктирная – задаче без трения. Из графика видно, что учет сил сцепления приводит к незначительному уменьшению максимальных смещений штампа в сравнении с задачей без трения.

Для систем с толщиной слоя, соизмеримой с размерами штампа, влияние сил сцепления в области контакта на вертикальные смещения штампа оказывается незначительным. Следует отметить, что дальнейшее усложнение свойств среды (слоистости) не приводит к изменению основных закономерностей в поведении штампа.

На фиг. 2 представлены зависимости от времени угла поворота и горизонтального смещения штампа при действии момента $M(t) = H(t) - H(t - 2)$. Кривая 1 соответствует горизонтальному смещению, 2 – углу поворота штампа. В случае действия на штамп горизонтальной нагрузки характер поведения u_1 и ϕ аналогичен приведенному на фиг. 2, но при этом доминирующим является горизонтальное смещение штампа. Все величины приведены в безразмерном виде. При этом перемещения отнесены к полуширине штампа a , нагрузка – к жесткости слоя μ , время – к $(\rho / \mu)^{1/2} a$, $\nu = 0,3$, коэффициент трения в среде $\zeta = 0,2$, масса штампа $M = 1$.

Авторы благодарят И.И. Воровича за внимание к работе и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорохов И.В., Пряхина О.Д., Фрейгейт М.Р. О действии нестационарной нагрузки на систему, состоящую из массивного штампа и слоистого основания // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 306–312.
2. Пряхина О.Д., Фрейгейт М.Р. О методе расчета динамики массивного штампа на многослойном основании // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 114–122.
3. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1978. 319 с.
4. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
5. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
6. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев; Одесса: Вища шк., 1992. 167 с.
7. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 253 с.
8. Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А. Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наук. думка, 1990. 224 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
11.V.1993