

УДК 62-50

© 1994 г. Л.Д. Акуленко

## ВОЗМУЩЕННАЯ ОПТИМАЛЬНАЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПОСРЕДСТВОМ ОГРАНИЧЕННОЙ СИЛЫ

Исследуется задача об оптимальном по быстродействию попадании в требуемую точку геометрического пространства возмущенной динамической системы, на которую действует ограниченная по модулю управляющая сила. Математический аппарат решения основан на применении методов теории оптимального управления в форме принципа максимума и малого параметра (регулярных возмущений). Детально изучается порождающая (невозмущенная) задача оптимального управления движением в виде программы и синтеза. В удобных автомодельных переменных обнаружено и подробно проанализировано явление нерегулярной зависимости синтеза управления и функции Беллмана задачи от фазовых переменных (геометрических координат и скоростей). Разработан и проиллюстрирован на примере алгоритм решения задачи с учетом возмущающих факторов общего вида; его обоснование требует дальнейшего изучения.

**1. Постановка задачи и принцип максимума.** Рассматривается возмущенная управляемая динамическая система, описываемая векторным уравнением второго порядка с известными начальными данными.

$$\ddot{x} = u + \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^0 \quad (1.1)$$

$$x \in E^n, \quad n \geq 2, \quad \dot{x} = dx/dt, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$$

Здесь  $u$  – ограниченное по модулю управление из класса кусочно-непрерывных функций времени  $t$ ; числовой параметр  $\varepsilon$  характеризует величину возмущающих воздействий достаточно общего вида  $\varepsilon f$  и далее предполагается малым ( $\varepsilon_0 \ll 1$ ), т.е. определяющим ускорение фактором является управление  $u$ . Для системы (1.1) ставится задача об оптимальном по быстродействию попадании в фиксированную точку  $x^f$  из некоторой области  $D_x$  геометрического пространства  $E^n$ :  $x, x^f \in D_x \subset E^n$ . Без ограничения общности полагаем  $x^f = 0$ ; конечные условия и функционал принимают вид

$$x(t_f) = 0, \quad \dot{x}(t_f) \in D_{\dot{x}} \subset E^n; \quad t_f \rightarrow \min, \quad |u| \leq u_0 \quad (1.2)$$

Здесь  $D_{\dot{x}}$  – допустимая область изменения вектора скорости  $v = \dot{x}$ ,  $u_0 = \text{const}$ . Также без ограничения общности величину  $u_0$  можно фиксировать, в частности, положить  $u_0 = 1$ . Это упрощение достигается делением уравнения (1.1) на  $u_0$  и введением нового времени  $t' = u_0^{1/2} t$  с последующими переобозначениями выражений для  $x, \dot{x}, f$ .

Требуется построить оптимальное управление в виде программы  $u_p = u_p^*(t, x^0, \dot{x}^0, \varepsilon)$  или синтеза  $u_s = u_s^*(x, v, \varepsilon)$ , оптимальную фазовую траекторию  $x = x^*(t, x^0, \dot{x}^0, \varepsilon)$ ,  $v = v^*(t, x^0, \dot{x}^0, \varepsilon)$  и минимальное значение функционала  $t_f = t_f^*(x^0, \dot{x}^0, \varepsilon)$ , а также функцию Беллмана задачи  $T = T(x, v, \varepsilon)$ .

Отметим, что исследование задачи (1.1), (1.2) может представить интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Ранее [1] в общих чертах был описан предельный случай невозмущенной задачи ( $\varepsilon = 0$ ). Применение методов теории возмущений [2] сопряжено с трудностями, обусловленными ограничениями на управление и его негладкостью по отношению к начальным значениям фазовых переменных  $x^0, \dot{x}^0$  и параметру  $\varepsilon$ . Построение возмущенного решения требует обстоятельного изучения весьма нетривиальной для  $n \geq 2$  порождающей задачи оптимального управления. Аналитическое исследование для произвольной размерности по существу эквивалентно случаю  $n = 2$  (плоская задача).

Применим необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума [1]. Введем для удобства фазовую переменную  $v = \dot{x}$  (скорость) и выпишем соответствующую двухточечную краевую задачу для гамильтоновой системы вида

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = u^* + \varepsilon f(x, v), \quad u^* = \eta \equiv q|q|^{-1}, \quad |u^*| = 1 \quad (1.3)$$

$$\dot{p} = -\varepsilon(q, f'_x), \quad \dot{q} = -p - \varepsilon(q, f'_v)$$

$$x(0) = x^0 \neq 0, \quad v(0) = v^0, \quad x(t_f) = 0, \quad q(t_f) = 0, \quad |p(t_f)| = 1$$

Здесь  $p, q$  — сопряженные соответственно  $x, v$  переменные;  $u^*$  — оптимальное управление,  $|u^*| \equiv 1$ ;  $\eta$  — единичный вектор,  $f'_x, f'_v$  — квадратные  $n \times n$ -матрицы; соответствующие им выражения понимаются в следующем смысле:  $(q, f'_{x,v}) = ((q, f)_{x,v})^T$ , где  $(q, f)$  — скалярное произведение векторов в  $E^n$ . Вектор  $p$  можно нормировать для удобства так, чтобы  $|p(t_f)| = 1$ ; это приведет к тому, что оптимальное управление  $u^*$  (1.3) будет неособым:  $q \neq 0$ . Будем предполагать указанную нормировку выполненной. Для определения  $4n + 1$  неизвестных параметров (постоянных интегрирования и времени  $t_f$ ) имеем  $4n + 1$  условие:  $2n$  начальных условий для  $x, v$ ;  $2n$  конечных условий для  $x, q$  и условие нормировки для  $p^f = p(t_f)$ .

Итак, требуется построить и исследовать решение двухточечной краевой задачи для всех  $x^0 \in D_x, v^0 \in D_v$  и  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  при достаточно малом значении  $\varepsilon_0$  с заданной степенью точности по  $\varepsilon$ , т.е. найти

$$x = x^*(t, x^0, v^0, \varepsilon), \quad v = v^*(t, x^0, v^0, \varepsilon), \quad q = q^*(t, x^0, v^0, \varepsilon)$$

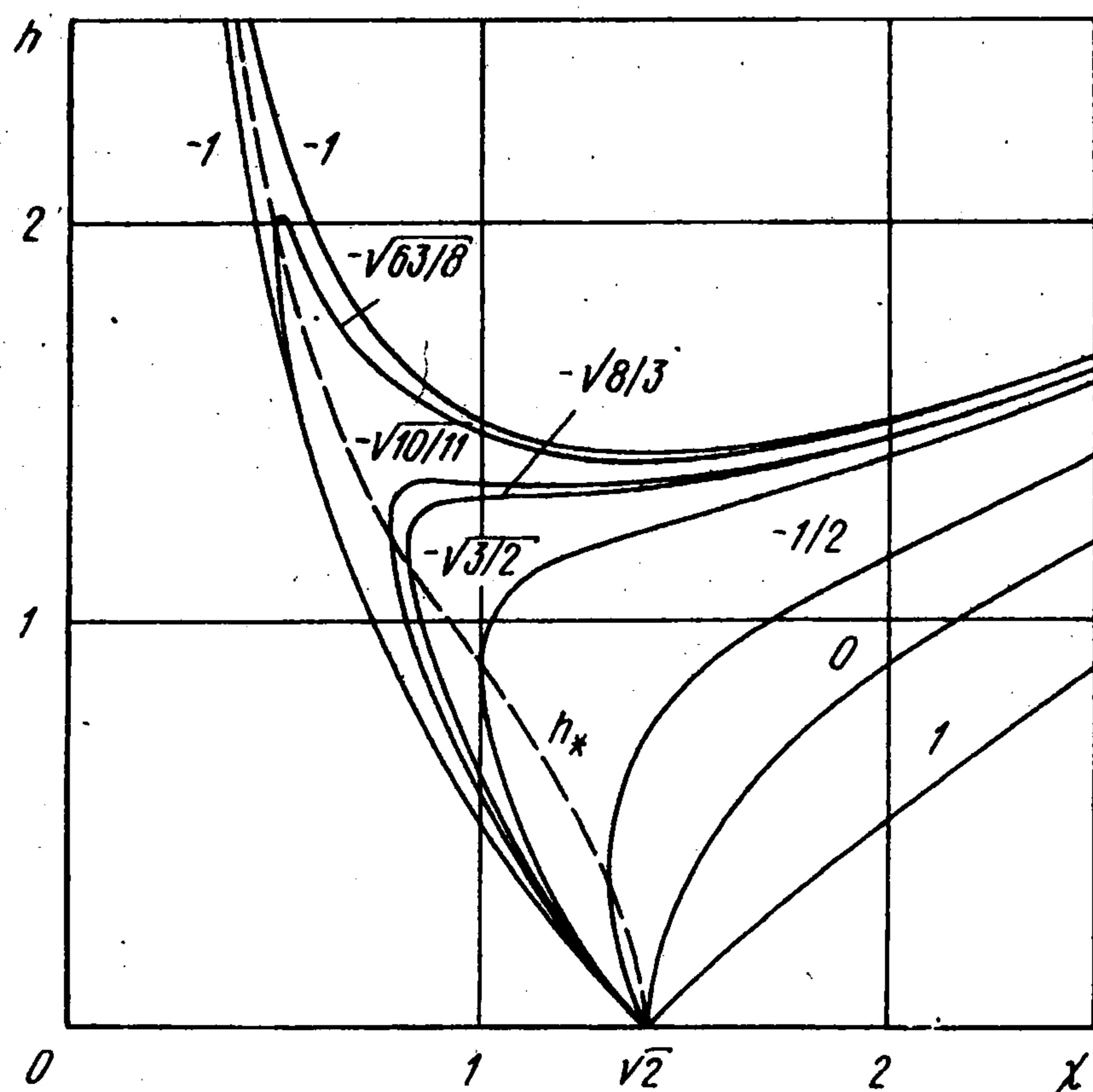
$$u_p = u_p^*(t, x^0, v^0, \varepsilon) = \eta^*(t; x^0, v^0, \varepsilon), \quad \eta^* = q^*|q^*|^{-1}, \quad t_f = t_f^*(x^0, v^0, \varepsilon) \quad (1.4)$$

где  $t_f^*$  — минимальное допустимое время окончания процесса. Предполагается, что возмущающая вектор-функция  $f$  обладает достаточными для применимости методов малого параметра (теории возмущений [2]) свойствами гладкости по переменным  $x \in D_x, v \in D_v$ .

Если построены программное оптимальное управление  $u_p^*$ , соответствующая фазовая траектория  $x^*, v^*$  и время быстрогодействия  $t_f^*$  для произвольных  $x^0 \in D_x, v^0 \in D_v$ , то, следуя принципу оптимальности метода динамического программирования [1], можно определить оптимальное управление по обратной связи (синтез)  $u_s$  и функцию Беллмана  $T$ :

$$u_s = \eta^*(0, x, v, \varepsilon), \quad T = t_f^*(x, v, \varepsilon) \quad (1.5)$$

Чтобы получить выражения (1.5), в  $u_p = \eta^*$  (1.4) совершается замена  $t \rightarrow t - t_0$ , где  $t_0$  — начальный момент времени, отвечающий значениям  $x^0, v^0$ . Затем в  $\eta^*, t_f^*$  (1.4) параметры полагаются  $t_0 = t, x^0 = x, v^0 = v$ , т.е. начальные значения переменных считаются текущими; таким образом,  $t - t_0 \rightarrow 0$  (в итоге  $t \rightarrow 0$ )  $x^0 \rightarrow x, v^0 \rightarrow v$ .



Изложенная процедура имеет формальный характер; требуются дополнительные исследования по ее обоснованию для рассматриваемой задачи построения возмущенного синтеза управления и функции Беллмана.

Переходим к построению приближенного (по  $\varepsilon$ ) решения задачи программного управления (1.4) при помощи методов теории регулярных возмущений [2]. В частности, рассмотрим порождающую задачу и найдем так называемое нулевое приближение к решению [1].

**2. Аналитическое решение невозмущенной задачи оптимального управления.** Как следует из условий оптимальности (1.3), при  $\varepsilon = 0$  импульсы (сопряженные пере-

менные) равны:  $p = \xi = \text{const}$ ,  $|\xi| = 1$ ;  $q = \xi(t_f - t)$ . Отсюда находим, что программное оптимальное управление  $u_p^* = \eta = \xi$  постоянно. Интегрируя уравнения фазовой траектории  $x, v$  (при  $\varepsilon = 0$ ), получим элементарные выражения:  $v = v^0 + \xi t$ ,  $x = x^0 + v^0 t + 1/2 \xi t^2$ . Из конечного условия (1.3) для вектора  $x$  следуют соотношения, позволяющие определить направляющий вектор  $\xi$  и момент времени  $t_f$  окончания процесса управления

$$\xi = -2(x^0 + v^0 t_f)^{-2} \quad (2.1)$$

$$t_f^4 = 4(x^{02} + 2c|x^0| |v^0| t_f + v^{02} t_f^2), \quad c = (x^0, v^0) |x^0|^{-1} |v^0|^{-1}$$

Отметим, что для фиксированного значения  $t_f > 0$  орт  $\xi$  определяется однозначно. Из (2.1) следует, что  $t_f > 0$  при  $x^0 \neq 0$ ; это и предполагается по постановке задачи. Кроме того, оказывается, что момент времени  $t_f$  зависит только от трех параметров: модулей  $|x^0|$ ,  $|v^0|$  и параметра  $c$  – косинуса угла между векторами  $x^0$  и  $v^0$ ,  $-1 \leq c \leq 1$ . При  $c = 0, \pm 1$  уравнение четвертой степени (2.1) относительно  $t_f$  элементарно разрешается, хотя и неединственным образом (для  $c = -1$ ), см. далее.

Переходим к решению и анализу корней указанного уравнения. Количество параметров можно уменьшить до двух введением удобных автомодельных переменных – неизвестной  $\chi = t_f |x^0|^{-1/2}$  и нового параметра  $h = |v^0| |x^0|^{-1/2}$ . В результате получим уравнение четвертой степени вида

$$\chi^4/4 - 1 - 2c h \chi - h^2 \chi^2 = 0, \quad c \in [-1, 1], \quad h, \chi \geq 0 \quad (2.2)$$

Оно имеет положительные корни  $\chi^*(h, c)$  для всех допустимых значений  $c, h$  (2.2). Решение уравнения (2.2) можно построить в графической форме (фигура) как однопараметрическое семейство функций. Естественно взять в качестве аргумента величину  $h$ ,  $h \in [0, \infty)$ , а параметра семейства – величину  $c$ ,  $c \in [-1, 1]$ . Кроме того, оказывается, что предпочтительнее строить графики обратных функций  $h = h^*(\chi, c)$ ; здесь  $\chi \in (0, \infty)$  рассматривается как аргумент, а  $h^*$  – соответствующий корень квадратного уравнения. Значения  $\chi$  удобно откладывать вдоль оси абсцисс, а  $h$  – вдоль оси ординат (можно и наоборот, что несущественно). На фигуре для каждой сплошной кривой приводятся соответствующие значения параметра семейства  $c$ .

Перейдем к графо-аналитическому построению корней уравнения (2.2) и по существу решению задачи оптимального управления как в виде программы, так и синтеза. Разрешая (2.2) формально, получим выражения для  $h^*(\chi, c)$ , вещественные в области  $(\chi, c) \in \Omega$ :

$$h = h_{1,2} \equiv \frac{1}{2}[-2c\chi \pm d(\chi, c)]\chi^{-2}, \quad d = [\chi^6 - 4\chi^2(1-c^2)]^{1/2} \quad (2.3)$$

$$\Omega = \{\chi, c: \chi \geq 0, -1 \leq c \leq 1, d^2 \geq 0\}$$

Из (2.3) следует, что для значений  $c \in [0, 1]$  допустимым неотрицательным корнем является  $h = h_1(\chi, c)$ ,  $\chi \geq \sqrt{2}$ , причем  $h_1(\sqrt{2}, c) \equiv 0$ , т.е.  $t_f^* = \sqrt{2}|x^0|$  при  $v^0 = 0$ , что очевидно. Нетрудно также установить, что при  $\chi \rightarrow \infty$  функция  $h = h_1(\chi, c)$  аппроксимируется прямой  $h \approx \chi/2$  (фигура). Отсюда следует простая асимптотика  $t_f^* \approx 2|v^0|$ , т.е. при удалении от начала координат с большой скоростью (в начальный момент) половина времени тратится на остановку, а вторая половина – на возвращение к терминальному многообразию  $x^0 = 0$ ; вклад  $|x^0|$  относительно мал и исчезает при  $h = |v^0||x^0|^{-1/2} \rightarrow \infty$ . Как отмечалось, при значениях  $c = 0$  при  $c = 1$ , когда векторы  $x^0$ ,  $v^0$  ортогональны или коллинеарны, уравнение (2.1) элементарно разрешимо относительно  $\chi = \chi(h, c)$ :

$$\chi(h, 0) = \sqrt{2}[h^2 + (h^4 + 1)^{1/2}]^{1/2}, \quad \chi(0, 0) = \sqrt{2} \quad (2.4)$$

$$\chi(h, 1) = h + (h^2 + 2)^{1/2}, \quad \chi(0, 1) = \sqrt{2}$$

$$\chi(h, 0) = 2h + \frac{1}{4}h^{-3} + O(h^{-7}), \quad \chi(h, 1) = 2h + h^{-1} + O(h^{-3}), \quad h \rightarrow \infty \quad (\chi \rightarrow \infty)$$

Обе кривые (2.4) монотонно зависят от  $h$  и ведут себя сходным образом при  $h \rightarrow \infty$ , однако при  $h \rightarrow 0$  имеем  $\partial\chi(h, 0)/\partial h \rightarrow 0$ ,  $\partial\chi(h, 1)/\partial h \rightarrow 1$ . Это означает, что угол наклона  $\partial h_1(\sqrt{2}, c)/\partial\chi$  касательных равен соответственно  $\pi/2$  и  $\pi/4$  при  $c = 0$  и  $c = 1$ , причем ( $\delta\chi > 0$ ):  $h_1(\sqrt{2} + \delta\chi, 0) = 2^{1/4}\delta\chi^{1/2} + O(\delta\chi^{3/2})$ ,  $h_1(\sqrt{2} + \delta\chi, 1) = \delta\chi + O(\delta\chi^2)$ . Отметим, что в области  $(\chi, c) \in \Omega$  зависимость  $h = h_1(\chi, c)$  монотонна по обоим переменным (по  $\chi$  – возрастающая, по  $c$  – убывающая,  $c \in [0, 1]$ )

$$h_1(\chi'', c) > h_1(\chi', c), \quad (\chi', c) \in \Omega, \quad (\chi'', c) \in \Omega, \quad \chi'' > \chi' \quad (2.5)$$

$$h_1(\chi, c'') > h_1(\chi, c'), \quad (\chi, c') \in \Omega, \quad (\chi, c'') \in \Omega, \quad c'' < c'$$

Зависимость  $\chi = \chi^*(h, c)$  в соответствующей области  $(h, c) \in \Omega^*$  будет монотонно возрастающей по обоим переменным (фигура). Имеем оценку разности  $\chi^*(h, 1) - \chi^*(h, 0) = h^{-1} + O(h^{-3})$  при  $h \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим теперь выражения (2.3) для отрицательных значений  $c$ ,  $-1 \leq c < 0$ . Допустимое множество корней задается соотношениями

$$h = h^*(\chi, c) = \begin{cases} h_1(\chi, c), & \infty > \chi \geq \chi_*(c), & -1 \leq c < 0 \\ h_2(\chi, c), & \sqrt{2} \geq \chi \geq \chi_*(c), & -1 \leq c < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\chi_* = \chi_*(c) = \sqrt{2}(1-c^2)^{1/4}, \quad 0 \leq \chi_* < \sqrt{2}; \quad \partial h / \partial \chi \rightarrow \pm\infty, \quad \chi \rightarrow \chi_* \pm 0$$

Из выражений (2.6) следует, что искомым корнем  $h$  определяется двумя функциями  $h_{1,2}(\chi, c)$ , заданными согласно (2.3) в области  $(\chi, c) \in \Omega$ . Обе ветви  $h_1$  и  $h_2$  гладким образом стыкуются в точках линии (для фиксированных значений  $c$ ,  $-1 \leq c < 0$ ),

в которых дискриминант  $d^2 = 0$ . Множество этих точек образует монотонную кривую (обозначена штриховой линией)

$$h = h_*(\chi) = (\chi^{-2} - \chi^2 / 4)^{1/2}, \quad 0 < \chi \leq \sqrt{2} \quad (2.7)$$

Если параметр  $c$  фиксирован, то стыковка ветвей  $h_1$  и  $h_2$  происходит на кривой  $h_1(\chi)$  в точке  $(\chi_*, h_*)$ :

$$\chi_* = \sqrt{2}(1 - c^2)^{1/4}, \quad h_* = |c|\chi_*^{-1} = |c|/(\sqrt{2}(1 - c^2)^{1/4}) \quad (2.8)$$

Вновь отметим, что касательная в этой точке к кривой  $h^*(\chi, c)$  вертикальна, а к кривой  $\chi^*(h, c)$  горизонтальна.

Рассмотрим предельный случай  $c = -1$  (векторы  $x^0$  и  $v^0$  антиколлинеарны). Имеем для  $h = h^*(\chi, -1)$  два допустимых предельных выражения ( $\chi_* = \chi_*(-1) = 0$ ,  $h_*(-1) = +\infty$ ):

$$h = h_1(\chi, -1) = \chi^{-1} + \chi/2, \quad \infty > \chi > 0 \quad (2.9)$$

$$h = h_2(\chi, -1) = \chi^{-1} - \chi/2, \quad 0 < \chi \leq \sqrt{2}$$

Эти кривые "ограничивают" семейства кривых  $h_{1,2}(\chi, c)$  при  $c \rightarrow -1$ ; их качественный анализ достаточно элементарен. Важно отметить, что  $h_{1,2}(\chi, -1) \rightarrow \infty$  при  $\chi \rightarrow 0$ , причем  $h_1 > h_2$  ( $\sqrt{2} \geq \chi > 0$ ); кроме того,  $h_2(\sqrt{2}, -1) = 0$ , а  $h_1(\sqrt{2}, -1) = \sqrt{2}$  есть минимальное значение. Заметим еще, что  $h_1(\chi, -1) - h_2(\chi, -1) = \chi \rightarrow 0$  при  $\chi \rightarrow 0$ ,  $h_1(\chi, -1) - h_1(\chi, 1) \rightarrow 0$  (сверху) при  $\chi \rightarrow \infty$  и  $h_1(\sqrt{2}, 1) = h_2(\sqrt{2}, -1) = 0$ . Ветви  $h = h_{1,2}(\chi, -1)$  элементарно разрешаются относительно неизвестной  $\chi$ , причем  $h = h_1$  неединственным образом (фигура).

Итак, установлено, что семейство кривых  $h^*(\chi, c)$  заключено в "бесконечном криволинейном треугольнике", ограниченном кривыми  $h_1(\chi, \pm 1)$  и  $h_2(\chi, -1)$  на соответствующих множествах значений  $\chi$ . Аналогичное утверждение справедливо для семейства кривых  $\chi^*(h, c)$ . Кривая "стыковки"  $h = h_*(\chi)$  (2.7) находится внутри "треугольника" и строго между кривыми  $h_{1,2}(\chi, -1)$ , точнее,  $h_1(\chi, -1) > h_*(\chi) > h_2(\chi, -1)$ ,  $0 < \chi \leq \sqrt{2}$ .

Продолжим анализ "тонкой структуры" семейства кривых  $h^*(\chi, c)$  (2.6). Из характера поведения ограничивающих кривых  $h_{1,2}(\chi, -1)$ ,  $0 < \chi \leq \sqrt{2}$  и кривой стыковки  $h_*(\chi)$  следует, что при уменьшении  $c$ , начиная с некоторого значения  $c_*$ ,  $0 > c_* > -1$  зависимость  $\chi = \chi^*(h, c)$ ,  $c_* > c \geq -1$  от  $h$  будет неоднозначной. Это означает, что у кривой  $h_1(\chi, c)$ ,  $c \leq c_*$ ,  $\chi > \chi_*$ , см. (2.8), появляются точки локальных экстремумов, для которых  $\partial h_1 / \partial \chi = 0$ . Разрешая это уравнение относительно  $\chi$ , находим искомое значение  $c_*$ , а также точки экстремумов; их оказывается только две: точка максимума и точка минимума. Итак, имеем (см. фигуру).

$$c_* = -\sqrt{8}/3 \approx -1 + 1/18, \quad -1 \leq c \leq c_* \quad (2.10)$$

$$\chi_{\max, \min}(c) = [6c^2 - 4 \mp 6|c|(c^2 - 8/9)^{1/2}]^{1/4} > \chi_*(c)$$

При  $c \rightarrow -1$  точка  $\chi_{\max} \rightarrow 0$ , а точка  $\chi_{\min} \rightarrow \sqrt{2}$ ; при этом  $h_{\max}(c) = h_1(\chi_{\max}(c), c) \rightarrow \infty$ , а  $h_{\min}(c) = h_1(\chi_{\min}(c), c) \rightarrow \sqrt{2}$  — минимальному значению  $h_1(\chi, -1)$ , см. выше и фигуру. Интересно оценить превышение  $h_{\max}(c)$  над величиной  $h(\chi_*(c), c)$ , отвечающей точке стыковки (2.8); имеем

$$\chi_{\max}(c) = (8\delta c)^{1/4} (1 + (15/8)\delta c + O(\delta c^2)), \quad c = -1 + \delta c$$

$$h_1(\chi_{\max}(c), c) = (8\delta c)^{-1/4} (1 + (9/8)\delta c + O(\delta c^2)), \quad \delta c > 0$$

$$h^*(\chi_*(c), c) = (8\delta c)^{-1/4} (1 - (7/8)\delta c + O(\delta c^2)) \quad (2.11)$$

$$h_1(\chi_{\max}(c), c) - h^*(\chi_*(c), c) = (2\delta c^3)^{1/4} + O(\delta c^{1/4})$$

Согласно (2.11) это превышение незначительно и довольно быстро стремится к нулю при  $\delta c \rightarrow 0$ .

Из приведенного анализа функции  $h = h^*(\chi, c)$  (2.3), (2.6) следует алгоритм построения решения невозмущенной задачи оптимального программного управления согласно (2.1). Пусть известны начальные векторы  $x^0, v^0$ ; на их основе строятся величины  $h = \|v^0\| \|x^0\|^{-1/2}$ ,  $c = (x^0, v^0) |x^0|^{-1} |v^0|^{-1}$  и находится минимальный корень  $\chi = \chi^*(h, c)$  уравнения (2.2) численным или графо-аналитическим методом (см. фигуру). Для значений  $0 \leq c \leq 1$  зависимость взаимно однозначная и монотонно возрастающая как по аргументу  $h$ , так и по параметру семейства  $c$ . На интервале изменения параметра  $c$ ,  $0 \geq c > c_* = -\sqrt{8}/3$  зависимость  $\chi = \chi^*(h, c)$  однозначная и гладкая, однако не взаимно однозначная: двум разным значениям аргумента  $h$  могут отвечать одинаковые значения  $\chi$ , т.е. функция  $h = h^*(\chi, c)$  двузначна на некотором интервале изменения  $\chi$ . Таким образом, для значений  $1 \geq c > c_* = -\sqrt{8}/3$  имеет место гладкая однозначная зависимость  $\chi = \chi^*(h, c)$  для всех  $h \geq 0$ , а тем самым однозначное и гладкое относительно начальных данных решение задачи оптимального управления.

Картина качественным и кардинальным образом изменяется для значений  $c$  из интервала  $-1 \leq c \leq c_* = -\sqrt{8}/3$ . Если значение  $h$  не "очень велико", т.е.  $0 \leq h < h_{\max}(c)$ , то зависимость минимального корня  $\chi = \chi^*(h, c)$  однозначная и гладкая. При переходе (возрастании или убывании) аргумента  $h$  через значение  $h_{\max}(c)$  ( $h \geq h_{\max}$ ) происходит скачкообразное изменение значения  $\chi = \chi^*(h, c)$  на конечную существенную величину  $\pm \Delta\chi$ :

$$\Delta\chi = \chi^*(h_{\max}(c) + 0, c) - \chi_{\max}(c) = 2h_{\max}(c) (1 - h_{\max}^{-2} + O(h_{\max}^{-3})), \quad h_{\max} \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

При  $c \rightarrow -1$  разность (2.12) неограниченно возрастает и согласно (2.11) для скачка имеет место оценка  $\Delta\chi \approx 2(8\delta c)^{-1/4}$ ,  $\delta c \rightarrow 0$ . Дальнейшее увеличение параметра  $h$  ( $h > h_{\max}(c)$ ) вновь приводит к однозначной монотонной зависимости, аналогичной случаю  $0 \leq c \leq 1$ . Отметим, что область значений параметра  $c$ ,  $c_* \geq c \geq -1$ , в которой имеет место указанная выше нерегулярность, весьма узкая:  $c_* + 1 = -\sqrt{8}/3 + 1 \approx 1/18$ , т.е. векторы  $x^0, v^0$  практически антиколлинеарны; синус угла  $s$  между ними мал:  $|s| \leq 1/3$ .

Итак, достаточно плотное семейство кривых  $h = h^*(\chi, c)$  позволяет решать невозмущенную задачу об оптимальной по быстродействию "жесткой встрече" как в виде программы (1.4), (2.1), так и синтеза (1.5) ( $\epsilon = 0$ ). Управление по обратной связи требует достаточно точного измерения фазового вектора  $(x, v)$  в любой текущий момент времени  $t$ . Оптимальный управляющий вектор  $u_s$ , т.е. орт  $\xi$ , также определяется в каждый момент времени

$$u_s = \xi^*(x, v) = -2(x + vT)T^{-2}, \quad T = t_f^*(x, v) \quad (2.13)$$

Функция Беллмана задачи  $T = T(x, v)$  есть интервал времени, "оставшегося до встречи", при движении из допустимой позиции  $(t, x, v)$ .

*Замечания.* 1°. К исследованной выше задаче сводится несколько более общий случай ограничений на управление. Пусть имеет место управляемая система вида  $\dot{x} = v$ ,  $\dot{v} = u$ ,  $u = \Lambda U$ , где  $|U| \leq 1$ ,  $\Lambda$  – невырожденная  $n \times n$ -матрица, т.е. множество управлений есть

невырожденный эллипсоид:  $(u\Lambda^{-1}, u\Lambda^{-1}) \leq 1$ . Неособой заменой  $x = \Lambda X$ ,  $v = \Lambda V$  эта система приводится к виду рассмотренной выше.

2°. К решению и анализу корней аналогичного (2.1) или (2.1) уравнения четвертой степени приводится задача о "жесткой встрече", когда система подвержена постоянному ускорению:  $\ddot{x} = u + w$ ,  $w = \text{const}$ ,  $|w| = w_0 < 1$ . Количество параметров при этом существенно увеличивается (на три)

$$(1 - w_0^2)\chi^4/4 = 1 + 2ch\chi + h^2\chi^2 + w_0\chi^2(c_x + c_v h\chi) \quad (2.14)$$

$$c_x = (ww_0^{-1}, x^0|x^0|^{-1}), \quad c_v = (ww_0^{-1}, v^0|v^0|^{-1})$$

При  $w_0 \ll 1$  к (2.14) могут быть применены методы теории возмущений, см. разд. 4. Вблизи значения  $h_{\text{max}}(c)$  разложения  $\chi$  проводятся по дробным степеням параметра  $w_0$  (по степеням  $w_0^{1/2}$ ).

3°. Пусть рассматривается  $n \geq 2$  управляемых систем с одной степенью свободы:  $\ddot{x}_i = u_i$ ,  $|u_i| \leq u_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Решим задачу оптимального по быстродействию попадания на оси  $x_i(t_i) = 0$ ,  $\dot{x}_i(t_i)$  – любое. Имеем управления  $u_i = -u_{i0} \text{sign} x_i^0$  и квадратные уравнения для определения моментов  $t_i$ :  $x_i^0 + v_i t_i + 1/2 u_i t_i^2 = 0$ ,  $t_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Потребуем, чтобы эти условия выполнялись в один и тот же момент времени:  $t_i = t_f$ , тогда получим требуемые величины управлений  $u_i = -2(x_i^0 + v_i t_f) t_f^{-2}$ . Если наложить условие  $u_1^2 + \dots + u_n^2 = 1$ , то для определения неизвестной получается уравнение четвертой степени, которое приводится к виду (2.2). Выбирая минимальные корни  $t_f^*$ , определим управления  $u_i$ , которые за одно и то же минимальное время переменные  $x_i$  одновременно приводят к нулевому значению. При таком подходе величины  $u_{i0}$  могут не иметь смысла; содержательный смысл заведомо имеют величины  $u_i$  как компоненты вектора управления  $u$  для  $n$ -мерной динамической системы.

4°. Интересно отметить, что некоторые соотношения, аналогичные полученным выше в разд. 2, имеют место также в задаче о минимизации промаха [3].

3. Алгоритм приближенного решения возмущенной задачи. Рассмотрим возмущенную краевую задачу принципа максимума (1.3). На первом этапе время быстродействия  $t_f$  будем считать заданным и найдем переменные  $x$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $q$  с требуемой степенью точности по  $\epsilon$  методами теории возмущений как решение системы  $4n$  интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} p &= p^f + \epsilon P, \quad q = p^f(t_f - t) + \epsilon Q, \quad u^* = q|q|^{-1} \equiv \eta^f + \epsilon U \\ \eta^f &= p^f|p^f|^{-1}, \quad \epsilon U \equiv (\eta^f + \epsilon N)|\eta^f + \epsilon N|^{-1} - \eta^f, \quad N = Q|p^f|^{-1}(t_f - t)^{-1} \\ v &= v^0 + \eta^f t + \epsilon V, \quad x = x^0 + v^0 t + 1/2 \eta^f t^2 + \epsilon X \\ P &\equiv -\int_{t_f}^t (q, f'_x) dt, \quad Q \equiv -\int_{t_f}^t [P + (q, f'_v)] dt \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$V \equiv \int_0^t (U + f) dt, \quad X \equiv \int_0^t V dt = \int_0^t (t - \tau)(U + f) dt$$

Здесь введены  $P$ ,  $Q$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $X$  – нелинейные интегральные операторы от переменных  $q$ ,  $v$ ,  $x$ , содержащие неизвестные  $p^f$ ,  $t_f$  ( $t_f$  пока считается заданным), а также параметр  $\epsilon$ . Без ограничений общности и в соответствии с принципом максимума в (3.1) можно положить  $|p^f| = 1$ ; тогда  $\eta^f = p^f$  – единичный постоянный вектор, подлежащий определению из конечного условия для  $x$ .

Функции  $q$ ,  $v$ ,  $x$  (вектор  $p$  не нужен) строятся последовательными приближениями

по степеням  $\varepsilon$  (схема Пикара) или разложениями в ряд Тейлора (в случае достаточной гладкости функции  $f$  по  $x, v$ ). Рекуррентная схема определения орта  $\eta^f$  и управления  $u^*$  может быть совмещена с указанной. В результате имеем алгоритм:

$$\begin{aligned} p_i &= \eta_i^f + \varepsilon P_{i-1}, & q_i &= \eta_i^f (t_f - t) + \varepsilon Q_{i-1}, & u_i^* &= \eta_i^f + \varepsilon U_{i-1} \\ v_i &= v^0 + \eta_i^f t + \varepsilon V_{i-1}, & x_i &= x^0 + v^0 t + \frac{1}{2} \eta_i^f t^2 + \varepsilon X_{i-1} \\ \eta_i^f &= -2t_f^{-2} (x^0 + v^0 t_f + \varepsilon X_{i-1}^f), & X_i^f &\equiv \int_0^{t_f} (t_f - t)(U_i + f_i) dt \\ i &= 1, 2, \dots; & p_0 &= \eta_0^f, & q_0 &= \eta_0^f (t_f - t), & u_0^* &= \eta_0^f \\ v_0 &= v^0 + \eta_0^f t, & x_0 &= x^0 + v^0 t + \frac{1}{2} \eta_0^f t^2, & \eta_0^f &= -2t_f^{-2} (x^0 + v^0 t_f) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Операторы  $P_{i-1}, Q_{i-1}, U_{i-1}, V_{i-1}, X_{i-1}$  определяются через  $q_{i-1}, v_{i-1}, x_{i-1}$  и  $\eta_{i-1}^f$ , т.е. являются известными функциями параметров  $x^0, v^0, \varepsilon$  и  $t_f$ . Последовательные приближения равномерно сходятся при  $\varepsilon > 0$  достаточно малом в некоторой области  $x^0 \in D_x, v^0 \in D_v, 0 < t_* \leq t_f \leq t^* < \infty$  на основе теоремы об операторе сжатия [4] и определяют соотношение для нахождения  $t_f$ :

$$\begin{aligned} \chi^4/4 - 1 - 2ch\chi - h^2\chi^2 &= \varepsilon k(\chi, x^0, v^0, \varepsilon) \\ k(\chi, x^0, v^0, \varepsilon) &\equiv 2|x^0|^{-1}(c_x + c_v h\chi)|X^f| \\ c_x &= (x^0|x^0|^{-1}, X^f|X^f|^{-1}), & c_v &= (v^0|v^0|^{-1}, X^f|X^f|^{-1}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $X^f = X^f(\chi, x^0, v^0, \varepsilon)$  – известная функция, которая строится по схеме (3.2) с заданной степенью точности. Она является достаточно гладкой относительно параметра  $\chi$  в некоторой области его изменения, которая может быть сделана сколь угодно большой при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . С целью уменьшения числа параметров в порождающем уравнении ( $\varepsilon = 0$ ) в (3.3) делением на  $x^{02}$  введены  $\chi = t_f |x^0|^{-1/2}$  – неизвестная,  $h = |v^0| |x^0|^{-1/2}, c = (x^0|x^0|^{-1}, v^0|v^0|^{-1})$  – параметры, определяемые измерениями. Коэффициенты  $c_x, c_v$ , т.е.  $k$ , учитывают возмущение  $f$  в системе (1.1); они вычисляются при помощи рекуррентной схемы (3.2). Отметим, что запись в виде (3.3) уравнения для определения  $t_f$  может оказаться неудобной из-за наличия  $|x^0|^{-1}, |v^0|^{-1}, |X^f|^{-1}$ . Тогда предпочтительнее использовать представление в виде возмущенного уравнения (2.1)

$$t_f^4/4 - x^{02} - 2(x^0, v^0)t_f - v^{02}t_f^2 = 2\varepsilon(x^0 + v^0 t_f, X^f) \quad (3.4)$$

Требуется построить решение задачи оптимального управления, т.е. найти минимальный корень  $t_f^* = \min\{t_f\}$  уравнения (3.4) или (3.3). Всюду вне малой окрестности точки  $\chi_{\max}(c), h_{\max}(c), c \leq c_*$  зависимость  $t_f^*$  от  $\varepsilon$  будет гладкой и величина  $t_f^*$  может быть найдена аналитически с требуемой степенью точности по  $\varepsilon$  при помощи рекуррентной схемы метода последовательных приближений [5]. Вблизи указанной особой точки функция  $t_f^*$  нерегулярна (терпит разрыв первого рода по переменным  $\varepsilon, x^0, v^0$ ). Здесь требуется привлечение точных численных методов или более прецизионные аналитические построения функции  $h = h^*(\chi, c, x^0, v^0, \varepsilon)$  и определение ее максимума по  $\chi$ . Эти процедуры представляется возможным реализовать алгоритмически на компьютере. Таким образом, приближенное с заданной степенью точности по  $\varepsilon$  решение возмущенной задачи об оптимальной по быстрдействию "жесткой встрече" сведена к определению минимального корня  $t_f^*(x^0, v^0, \varepsilon)$  уравнения (3.4) (или (3.3)).

**4. Пример.** Рассмотрим частный случай линейной по  $x, v$  возмущающей функции  $f$ :

$$f(x, v) = W + Lx + Kv; \quad W, L, K = \text{const} \quad (4.1)$$

Здесь  $L, W$  – произвольные  $n \times n$ -матрицы,  $W$  –  $n$ -вектор. В соответствии со схемой разд. 3 найдем в первом приближении по  $\varepsilon$  решение задачи оптимального быстрого действия. Согласно (3.2) имеем выражения (с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$ ):

$$p_{(1)} = \eta^f + \frac{1}{2}\varepsilon L^T \eta^f (t_f - t), \quad q_{(1)} = (I + \varepsilon S)\eta^f (t_f - t)$$

$$S = \frac{1}{2}[K^T + \frac{1}{3}L^T (t_f - t)](t_f - t) \equiv S_0 + S_1 t + S_2 t^2 \quad (4.2)$$

$$u_{(1)} = q_{(1)} |q_{(1)}|^{-1} = (I + \varepsilon R)\eta^f, \quad R = S + (\eta^f, S\eta^f)I$$

$$v_{(1)} = v^0 + \eta^f t + \varepsilon t(\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1 t + \frac{1}{3}\alpha_2 t^2) \equiv v_0 + \varepsilon V(t, t_f, \eta^f, x^0, v^0)$$

$$x_{(1)} = x^0 + v^0 t + \frac{1}{2}\eta^f t^2 + \frac{1}{2}\varepsilon t^2(\alpha_0 + \frac{1}{3}\alpha_1 t + \frac{1}{6}\alpha_2 t^2) \equiv x_0 + \varepsilon X(t, t_f, \eta^f, x^0, v^0)$$

$$\alpha_0 = R_0 \eta^f + W + Lx^0 + Kv^0, \quad \alpha_1 = (R_1 + K)\eta^f + Lv^0, \quad \alpha_2 = (R_2 + \frac{1}{2}L)\eta^f$$

$$\alpha_i = \alpha_i(t_f, \eta^f, x^0, v^0), \quad i = 0, 1, 2$$

Здесь  $I$  – единичная матрица; матрицы  $R_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) получаются разложениями  $R$  по степеням  $t$ :  $R = R_0 + R_1 t + R_2 t^2$ , т.е. в результате подстановки вместо матрицы  $S$  матричных коэффициентов  $S_i$ , которые зависят от неизвестной  $t_f$ . Приравнявая  $x_{(1)}(t_f) = 0$ , получим искомое выражение для орта  $\eta^f$  в первом приближении по  $\varepsilon$ :

$$\eta_{(1)}^f = \xi - 2\varepsilon t_f^{-2} X_0^f, \quad \xi = -2t_f^{-2}(x^0 + v^0 t_f)$$

$$X_0^f \equiv X(t_f, t_f, \xi, x^0, v^0) \quad (4.3)$$

Здесь  $X_0^f$  зависит от  $t_f$  и начальных значений  $x^0, v^0$ . Из условия  $|\eta_{(1)}^f| = 1$  следует уравнение вида (3.4), определяющее неизвестную  $t_f^*$ :

$$t_f^4 / 4 - x^{02} - 2(x^0, v^0)t_f - v^{02}t_f^2 = \varepsilon \Theta(t_f, x^0, v^0) \quad (4.4)$$

$$\Theta = t_f^2(x^0 + v^0 t_f, \alpha_0 + \frac{1}{3}\alpha_1 t_f + \frac{1}{6}\alpha_2 t_f^2) |_{\eta^f = \xi} \equiv 2(x^0 + v^0 t_f, X_0^f)$$

$$t_f^* = \min\{t_f\}, \quad t_f^* = t_f^*(x^0, v^0, \varepsilon)$$

Пусть  $t_{f0}^*$  – простой минимальный корень уравнения (4.4) при  $\varepsilon = 0$ , построенный согласно разд. 2. Тогда в первом приближении по  $\varepsilon$  получим

$$t_{f(1)}^* = t_{f0}^* + \varepsilon \Theta(t_{f0}^*, x^0, v^0) [t_{f0}^{*3} - 2(x^0, v^0) - 2v^{02}t_{f0}^*]^{-1} \quad (4.5)$$

В случае простого корня выражение в квадратной скобке отлично от нуля. В точке локального максимума функции  $h = h^*(\chi, c)$ , см. (2.10), (2.11) корень  $t_{f0}^*$  является двукратным и выражение в квадратной скобке (4.5) обращается в нуль. Поэтому разложения должны осуществляться по степеням  $\sqrt{\varepsilon}$ :

$$t_{f(1)}^* = t_{f0}^* + \sqrt{\varepsilon} t_{f1}^* + \varepsilon t_{f2}^* + O(\varepsilon^{3/2})$$

$$t_{f0}^* = t_{f0}^*(|x^0|, |v^0|, c), \quad t_{f1}^* = -[2\Theta_0 / (3t_{f0}^* - 2v^{02})]^{1/2} \quad (4.6)$$

$$t_{f2}^* = [(\Theta'_{t_f})_0 - t_{f0}^* t_{f1}^{*2}] (3t_{f0}^* - 2v^{02})^{-1}, \quad \Theta_0 = \Theta(t_{f0}^*, x^0, v^0)$$

Формулы первого приближения (4.3)–(4.6) справедливы и в случае произвольной возмущающей функции  $f$ . Если  $f$  – линейна, то  $X^f$  имеет вид (4.2)–(4.4). Отметим, что выражение для  $t_{f1}^*$  (4.6) должно быть вещественным.

Пусть  $L = K = 0$ , т.е.  $f = W = \text{const}$ ; тогда из (4.2) следует, что матрицы  $R = S \equiv 0$ , программное управление  $u_{(1)} = \eta^f = \text{const}$ , вектор  $\alpha_0 = W$ , а  $\alpha_{1,2} = 0$ ; функция  $X = 1/2 W t^2$ . Уравнение (4.4) для определения  $t_f^*$  приводится к виду (2.14);  $\Theta = t_f^2(x^0 + v^0 t_f, W)$ . Заметим, что если возмущающая функция  $f$  обладает сферической симметрией по  $x, v$ , т.е.  $L = \Pi, K = kI$  ( $l, k$  – скаляры,  $I$  – единичная матрица), то аналогично случаю  $L = K = 0$  управление  $u_{(1)} = \eta^f$ , поскольку  $R \equiv 0$  вследствие равенства  $S \equiv (\eta^f, S\eta^f)I$ . Векторы  $\alpha_i$  в функции  $X$  (4.2) равны

$$\alpha_0 = W + lx^0 + kv^0, \quad \alpha_1 = k\eta^f + lv^0, \quad \alpha_2 = 1/2 l \eta^f \quad (4.7)$$

Как установлено, в первом приближении по  $\varepsilon$  для  $\eta^f$  в (4.7) должно быть подставлено выражение  $\eta^f = \xi = -2t_f^{-2}(x^0 + v^0 t_f)$ . Дальнейшее вычисление неизвестной  $t_f^*$  проводится по изложенной выше схеме.

В заключение отметим, что аналогичная процедура приближенного решения задачи о жесткой встрече (по переменной  $x$ ) может быть обобщена на неавтономную систему:  $f = f(t, x, v, u)$ . Основная методика оказывается пригодной в случае систем, содержащих медленно изменяющиеся параметры, и других, например вида  $\ddot{x} = -kx + u + \varepsilon f$ . При этом требуется применение процедуры максимизации функции  $(q, u + \varepsilon f)$ ,  $|u| \leq 1$ , см. [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16286) и Международного научного фонда.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 366 с.
3. Кузнецов А.Г., Черноусько Ф.Л. Об оптимальном управлении, минимизирующем экстремум функции фазовых координат // Кибернетика. 1968. № 3. С. 50-55.
4. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 416 с.
5. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 448 с.

Москва

Поступила в редакцию  
20.V.1993