

УДК 539.3

© 1994 г. С.И. Боев, И.И. Ворович, И.Б. Полякова

## О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ШТАМП–СЛОЙ: ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Исследуется динамика системы массивный штамп – упругий слой при нестационарном воздействии. Доказывается возможность накопления системой теоретически сколь угодно большой колебательной энергии, а также исследуется механизм высвобождения накопленной энергии. Численно исследуется эффективность системы как аккумулятора колебательной энергии, проанализирован механизм ее высвобождения при мгновенном изменении массы штампа.

Известно, что колебания идеально упругого тела конечных размеров характеризуется счетным набором собственных резонансных частот и соответствующих им собственных функций. При воздействии гармонической нагрузки, частота которой совпадает с резонансной частотой колебаний тела, амплитуды колебаний бесконечно растут во времени. В отличие от тела конечных размеров идеально упругий слой не имеет собственных форм колебаний. Однако было установлено [1], что в системе штамп–слой возможно существование конечного числа собственных частот и соответствующих собственных форм колебаний. Это явление, названное изолированным резонансом [1], исследовалось и обобщалось [2, 3] и получило название *B*-резонанс. При резонансном гармоническом нагружении системы штамп–слой амплитуды колебаний бесконечно растут, как и в случае тела конечных размеров, и, следовательно, в системе может быть "накоплена" теоретически сколь угодно большая энергия колебаний. Плотность ее распределения в слое определяется собственными функциями системы штамп–слой, которые, как показано [4], экспоненциально убывают при удалении от штампа. Таким образом, энергию собственных колебаний можно считать локализованной в окрестности штампа.

Пусть в режиме установившихся собственных колебаний системы штамп–слой происходит изменение ее параметров, не сопровождающееся изменением полной энергии. Система переходит в режим собственных колебаний с другой частотой, при этом энергия, связанная с новой собственной формой колебаний, локализуется в окрестности штампа. Разность значений энергии установившихся колебаний системы до изменения ее параметров и после представляет собой энергию, излученную на бесконечность. Далее будет доказано, что возможно переизлучение всей накопленной колебательной энергии на бесконечность в виде высокоэнергетического импульса. Значения амплитуд смещений в этом импульсе могут существенно превосходить значения амплитуд, генерируемых источником той же мощности без накопления энергии в системе.

Таким образом, система штамп–слой проявляет как характерную особенность идеальных тел конечных размеров – наличие собственных форм колебаний, так и свойство, присущее неограниченным континуумам – излучение энергии на бесконечность. Процессы накопления энергии и излучения высокоэнергетических импульсов в системе по своей сути близки к принципу действия импульсных лазеров.

Исследуются соотношения параметров, при которых в системе возникают *B*-резонансы, изучаются процессы накопления энергии в системе и ее переизлучения.

1. Докажем теоремы, справедливые для широко класса континуальных сред как конечных размеров, так и неограниченных. Их приложение к исследованию системы штамп–слой позволяет найти точные границы области существования *B*-резонанса для случая нормальных к поверхности слоя колебаний массивного штампа. Кроме того,

эти результаты позволяют существенно упростить анализ энергетического баланса системы.

Пусть  $\Omega$  – область, занимаемая упругим континуумом с произвольным линейным законом состояния

$$\sigma_{jk} = C_{jkmn} \varepsilon_{mn}, \quad \varepsilon_{jk} = 1/2(u_{j,k} + u_{k,j}) \quad (1.1)$$

где  $\sigma_{jk}$ ,  $\varepsilon_{jk}$ ,  $u_j$  – соответственно компоненты тензоров напряжений, деформаций и вектора смещения в точке среды;  $C_{jkmn}$  – компоненты тензора упругих модулей, обладающие известными свойствами симметрии и положительной определенности [5]. Будем полагать, что  $C_{jkmn}$  – достаточно гладкие функции координат. В уравнении (1.1) и везде далее приняты традиционные для механики сплошной среды индексные обозначения.

Рассмотрим установившиеся колебания континуума под действием внешней периодической нагрузки (зависимость от времени выражается множителем  $e^{-i\omega t}$ ). Разделив переменные, запишем уравнения движения в виде

$$\sigma_{jk,k} + \omega^2 \rho u_j + \rho F_j = 0 \quad (1.2)$$

где  $\rho$  – плотность материала среды,  $F_j$  – амплитудная функция объемных сил.

**Теорема 1.** Если в произвольной области  $\Omega$  с гладкой границей  $S$  поля напряжений и деформаций удовлетворяют условиям теоремы Гаусса–Остроградского, то

$$\frac{1}{2} \int_S \sigma_{jk} l_k \bar{u}_j dS + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho F_j \bar{u}_j d\Omega = \Pi(\omega) - K(\omega)$$

$$\Pi(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{jk} \bar{\varepsilon}_{jk} d\Omega, \quad K(\omega) = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{\Omega} \rho u_j \bar{u}_j d\Omega$$

где  $l_j$  – внешняя нормаль к границе  $S$ .

Эта теорема является аналогом теоремы Клапейрона [5] и доказывается аналогично. Черта сверху означает комплексно-сопряженную величину. В случае вещественнозначных полей величины  $\Pi(\omega)$  и  $K(\omega)$  представляют собой максимальные значения потенциальной и кинетической энергии упругой среды соответственно.

Рассмотрим теперь задачу о контакте абсолютно жесткого тела (штампа) с упругим континуумом, занимающим область  $\Omega$  с границей  $S$ . Штамп совершает гармонические колебания с амплитудой  $W_0$  в направлении  $n$ , причем в процессе колебаний область контакта  $S_0$  штампа со средой не изменяется, т.е. отсутствует отрыв штампа от среды. Вне штампа на границе  $S$  заданы однородные условия первого, второго или третьего типа. Не нарушая общности дальнейших результатов, ограничимся условиями первого и второго типа и будем полагать, что массовые силы отсутствуют. Выпишем граничные условия на  $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ :

$$u = \begin{cases} W_0 n & \text{на } S_0 \\ 0 & \text{на } S_2; \end{cases} \quad \sigma_{jk} l_k = 0 \quad \text{на } S_1 \quad (1.3)$$

Отметим, что для неограниченных областей краевая задача (1.1) – (1.3) должна дополняться условиями излучения. Кроме того, для корректной разрешимости смешанной задачи налагаются ограничения на поведение решения на границе области контакта  $S_0$  [4].

Из теоремы 1 следует

$$W_0 \int_{S_0} \sigma_{jk} l_j n_k dS = 2\{\Pi(\omega) - K(\omega)\}$$

Обозначим  $r_n(\omega) = 2\{\Pi(\omega) - K(\omega)\}/W_0^2$ . Нетрудно видеть, что  $r_n$  представляет собой динамическую жесткость среды, т.е. ее реакцию при единичной амплитуде колебаний

штампа. В силу линейности рассматриваемой задачи  $\Pi(\omega)$  и  $K(\omega)$  пропорциональны  $W_0^2$  и следовательно,  $r_n$  не зависит от  $W_0$ .

*Следствие 1.* При удовлетворении условий теоремы 1  $r_n(0) = \Pi(0) \geq 0$ .

Отметим, что для тел конечных размеров, а также для некоторых полуограниченных континуумов (например, слой, полуплоскость)  $\Pi(\omega) \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow 0$ , когда на границе вне области контакта  $S_0$  заданы напряжения (условия первого типа).

*Теорема 2.* Если в произвольной области  $\Omega$  (ограниченной или неограниченной) решение краевой задачи (1.1) – (1.3) удовлетворяет условиям теоремы 1, вещественно и аналитично по  $\omega$ , то  $dr_n/d\omega = -4K(\omega)/\omega W_0^2$ .

В силу симметрии компонент тензора упругих модулей

$$\partial(\sigma_{jk} \varepsilon_{jk}) / \partial \omega = 2\sigma_{jk} \partial \varepsilon_{jk} / \partial \omega$$

Отсюда с учетом теоремы 1 находим

$$W_0^2 \frac{dr_n}{d\omega} = 2 \int_{\Omega} \sigma_{jk} \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial \omega} d\Omega - 2\omega^2 \int_{\Omega} \rho u_j \frac{\partial u_j}{\partial \omega} d\Omega - 2\omega \int_{\Omega} \rho u_j u_j d\Omega$$

Применив к правой части теорему Гаусса–Остроградского, получим

$$W_0^2 \frac{dr_n}{d\omega} = 2 \int_{\Omega} (\sigma_{jk,k} + \omega^2 \rho u_j) \frac{\partial u_j}{\partial \omega} d\Omega - \frac{4K(\omega)}{\omega} + \int_S \sigma_{jk} l_k \frac{\partial u_j}{\partial \omega} dS$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль в силу уравнения (1.2). Поверхностный интеграл также обращается в нуль, поскольку напряжения на  $S_1$  равны нулю (1.3) и, вследствие аналитичности решения по  $\omega$  имеем  $\partial u / \partial \omega = 0$  на  $S_2$  и  $\partial(\mathbf{u}\mathbf{n}) / \partial \omega = 0$  на  $S_0$ .

*Следствие 2.* При выполнении условий теоремы 2  $dr_n/d\omega < 0$ .

*Замечания.* Теорема 2 справедлива, когда на границе  $S$  или некоторой ее части заданы граничные условия третьего рода.

Все представленные выше результаты справедливы для любого волнового уравнения эллиптического типа при соответствующих изменениях представлений потенциальной и кинетической энергии, а также граничных условий.

2. Рассмотрим нормальные к поверхности упругого слоя толщины  $H$  колебания массивного штампа. Будем считать, что упругие модули  $C_{jkmn}$  зависят от координаты  $x_3$ , нормальной к плоскостям, ограничивающим слой. На границе  $x_3 = 0$  слой жестко сцеплен с недеформируемым основанием, т.е.  $S_2$  совпадает с плоскостью  $x_3 = 0$ . На границе  $x_3 = H$  всюду вне области контакта штампа со слоем напряжения равны нулю. Таким образом, в (1.3) следует считать  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$  (единичный орт декартовой системы координат), и внешняя нормаль  $\mathbf{l}$  к  $S_1$  совпадает с  $\mathbf{e}_3$ . Уравнение колебаний штампа запишем в виде

$$-m_0 \omega^2 W_0 = R_3(\omega), R_3(\omega) = - \int_{S_0} \sigma_{33} dS \quad (2.1)$$

где  $m_0$  – масса штампа.

Полагая, что объемные силы в (1.2) отсутствуют, исследуем краевую задачу (1.1.) – (1.3), (2.1) на собственные значения. Приведем ряд свойств решения краевой задачи (1.1) – (1.3), которые будут использованы при исследовании. Их доказательство дано в [4].

*Свойство 1.* Существует  $\omega_1 > 0$  такое, что при  $\omega \in (-\omega_1, +\omega_1)$  энергетическое решение вещественнозначно, причем оно экспоненциально убывает на бесконечности.

*Свойство 2.* Решение аналитично по  $\omega$  всюду на вещественной оси за исключением счетного набора  $\pm \omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

**Свойство 3.** Для всех положительных  $\omega > \omega_1$  ( $\text{Im } R_3(\omega) \leq 0$  и  $R_3(-\omega) = \bar{R}_3(\omega)$ ).

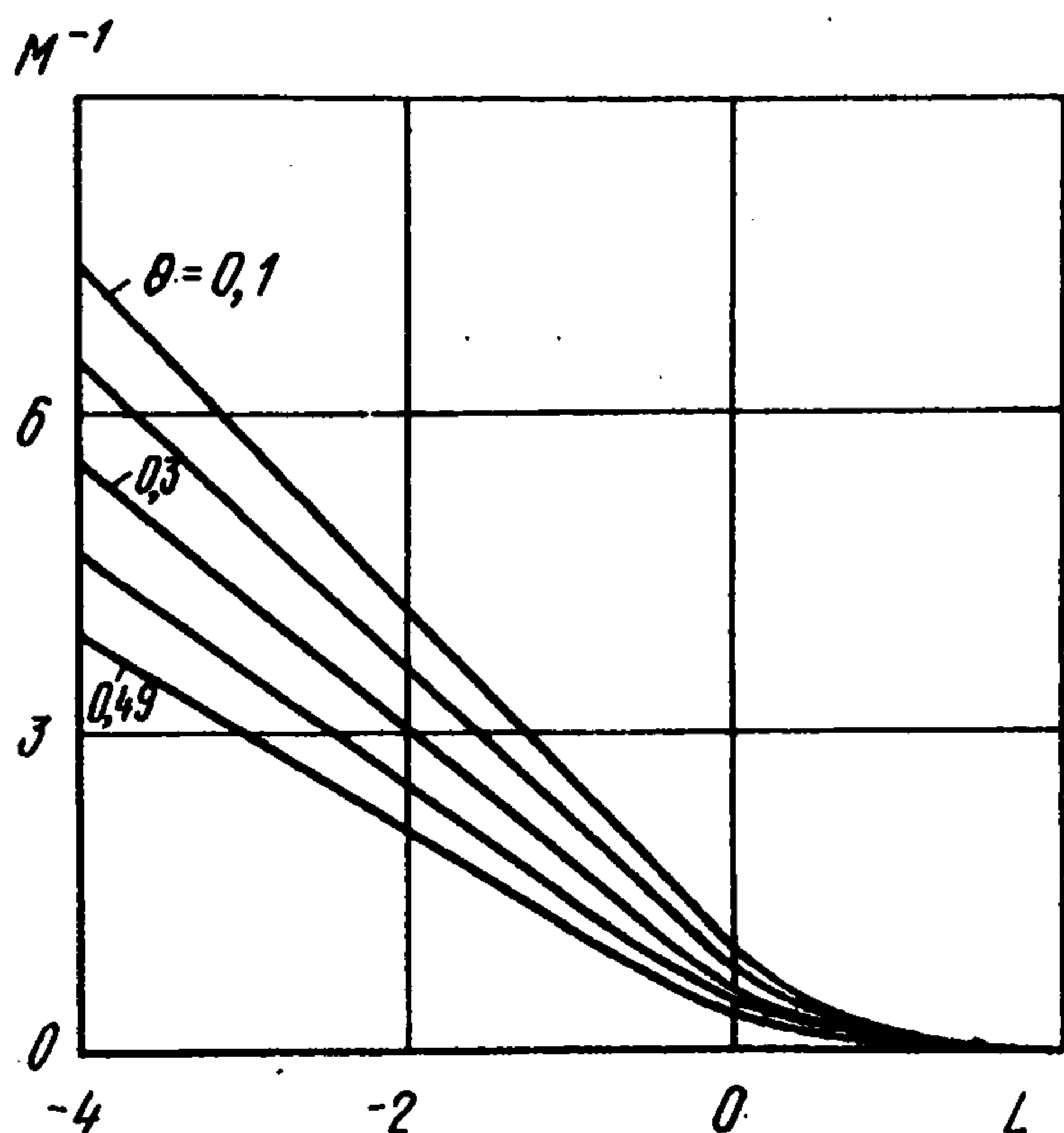
Заметим, что знак мнимой части  $R_3(\omega)$  определяется выбранной ранее зависимостью от времени, выражающейся множителем  $e^{-i\omega t}$ . Обозначим  $m_* = \lim r_3(\omega) / \omega^2$ , при  $\omega \rightarrow \omega_1$ , где  $r_3(\omega) = r_n(\omega)$  ( $n = e_3$ ). В силу линейности краевой задачи (1.1) – (1.3)  $R_3(\omega) = W_0 r_3(\omega)$ . Подставив это соотношение в (2.1), получаем характеристическое уравнения для определения собственных значений:

$$r_3(\omega) - m_0 \omega^2 = 0 \quad (2.2)$$

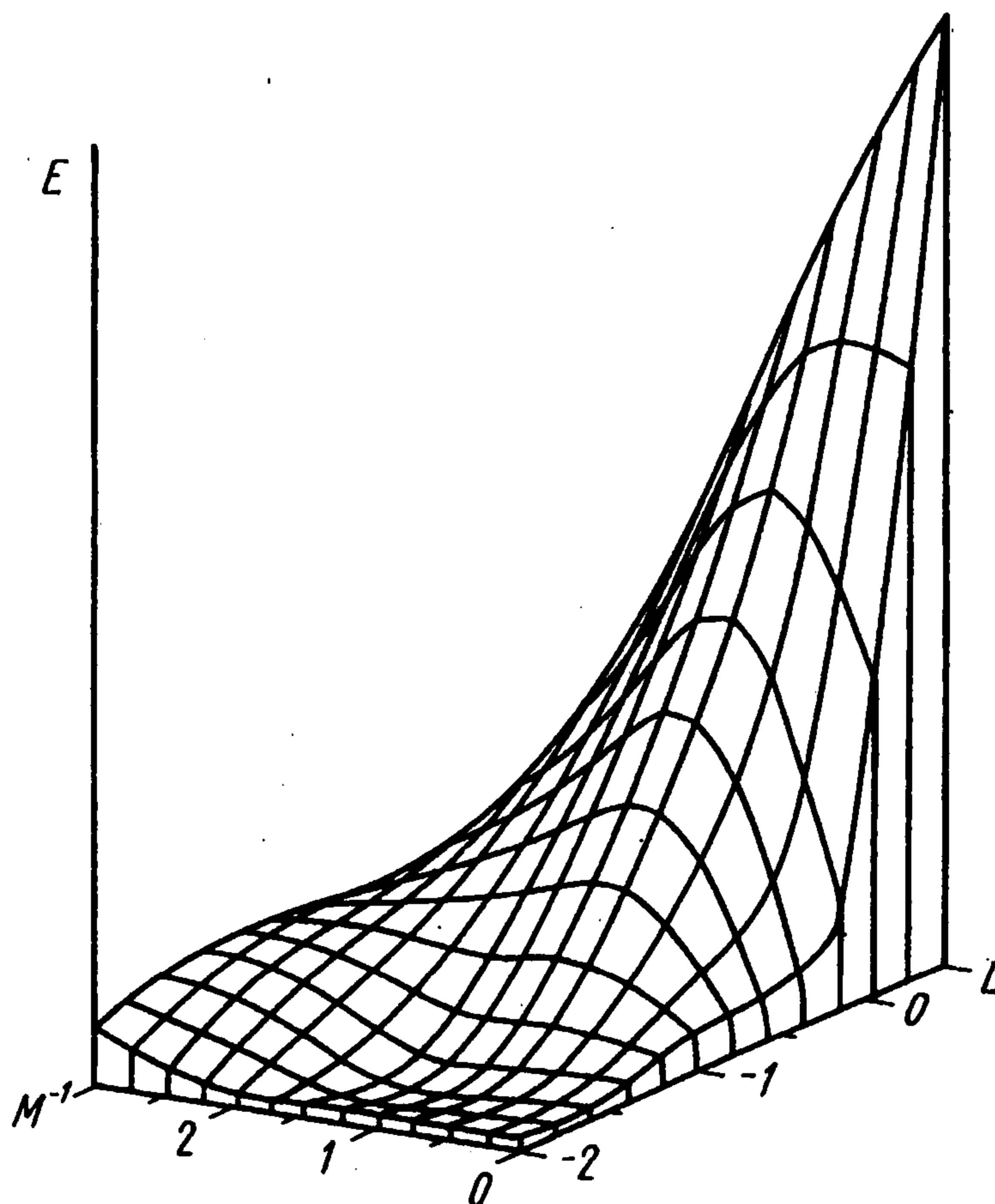
**Теорема 3.** При любом значении  $m_0 > m_*$  краевая задача (1.1) – (1.3), (2.1) имеет два однократных собственных значения  $\pm \omega_0$ , принадлежащих интервалу  $(-\omega_1, +\omega_1)$ .

Доказательство этой теоремы следует из результатов, представленных в предыдущем разделе и приведенных выше свойств решения краевой задачи (1.1) – (1.3) для слоя.

Было доказано [1] существование  $B$ -резонансов для системы штамп-слой при достаточно больших значениях массы штампа. Теорема 3 устанавливает точную границу области существования  $B$ -резонанса в системе при нормальных к поверхности слоя колебаниях штампа.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 в осях  $M^{-1}$  ( $M = m_0 / (\rho H^2)$ ) и  $L = \lg(a/H)$  изображены области существования  $B$ -резонансов для упругого изотропного слоя (плоская задача) при различных значениях коэффициента Пуассона  $\nu$ . Слой взаимодействует с полосовым штампом погонной массы  $m_0$ , и поперечным размером  $2a$ . Области существования изолированного резонанса лежат ниже кривых. Как видно из фиг. 1, граница области существенно зависит от коэффициента Пуассона материала.

Проведенные расчеты показали, что для штампа, жестко сцепленного со слоем, и для штампа, контактирующего со слоем без трения, области существования  $B$ -резонансов практически совпадают. Все численные результаты получены для задач о контакте без трения.

Расчеты проводились с помощью разработанного программного комплекса, предназначенного для решения широкого круга динамических смешанных задач для полуограниченных областей. Алгоритм решения основывается на модифицированном методе граничных элементов.

*Следствие 3.* Для полной энергии собственных колебаний системы штамп-слой справедливо представление

$$E = \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 W_0^2 - \frac{1}{4} \omega_0 W_0^2 r_3'(\omega_0) \quad (2.3)$$

Это представление следует из того, что при синфазных (в силу вещественности решения) собственных колебаниях системы потенциальная энергия обращается в ноль одновременно во всех точках упругого континуума (т.е. полная энергия колебаний системы равна максимуму ее кинетической энергии) и из закона сохранения энергии (отсутствие излучения на бесконечность).

На фиг. 2 представлена удельная энергия собственных колебаний системы штамп-слой. Удельной энергией здесь считается полная энергия системы при единичной амплитуде колебаний штампа. Координатные оси в горизонтальной плоскости те же что и на фиг. 1, по вертикальной оси откладывается значение удельной энергии. При приближении к границе области существования  $B$ -резонанса удельная энергия стремится к бесконечности. Поверхность, изображенная на фиг. 2, показывает изменение удельной энергии в области существования  $B$ -резонанса и ее рост при приближении к границе. На фиг. 2 при малых значениях  $a/H$  в весьма узкой окрестности границы имеет место изменение энергии с большим градиентом, которое невозможно передать графически.

3. Исследуем процесс накопления энергии в системе. Пусть при  $t < 0$  система находится в состоянии покоя. В момент  $t = 0$  к штампу прикладывается нагрузка  $P(t)$  так, что штамп движется поступательно, нормально к поверхности слоя. Выпишем уравнения, граничные и начальные условия рассматриваемой задачи

$$\sigma_{jk,k} - \rho \partial^2 u_j / \partial t^2 = 0 \quad (3.1)$$

$$\sigma_{jk} = C_{jkmn} \varepsilon_{mn}, \quad \varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} (u_{j,k} + u_{k,j})$$

$$\mathbf{u} = \begin{cases} w(t) \mathbf{e}_3 & \text{на } S_0, \\ 0 & \text{на } S_2; \end{cases} \quad \sigma_{jk} l_k = 0 \text{ на } S_1 \quad (3.2)$$

$$m_0 \frac{d^2 w}{dt^2} = P(t) + R_3(t), \quad R_3(t) = - \int_{S_0} \sigma_{33} dS \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \partial \mathbf{u} / \partial t = 0; \quad w = 0, \quad dw / dt = 0, \quad t = 0 \quad (3.4)$$

Применим к начально-краевой задаче (3.1) – (3.4) преобразование Фурье по временной переменной. Для трансформант будем использовать те же обозначения что и для прообразов, указывая при необходимости зависимость от частоты или от времени, например

$$P(\omega) = \int_0^{\infty} P(t) \exp(i\omega t) dt, \quad \text{Im} \omega = \delta > 0$$

В результате применения преобразования получим

$$w(t) = -(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\delta}^{+\infty+i\delta} P(\omega) [m\omega^2 - r_3(\omega)]^{-1} \exp(-i\omega t) d\omega \quad (3.5)$$

Работа, совершаемая силой  $P$ , (или энергия, полученная системой)

$$A(t) = \int_0^t P(t) \frac{dw}{dt} dt$$

В случае, когда продолжительность ее действия ограничена, может быть представлена при больших  $t$  как

$$A(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\delta}^{+\infty+i\delta} P^*(\omega)P(\omega)[m_0\omega^2 - r_3(\omega)]^{-1} \omega d\omega \quad (3.6)$$

$$P^*(\omega) = \int_0^{\infty} P(t) \exp(-i\omega t) dt$$

Предположим, что система штамп-слой такова, что для соответствующей краевой задачи выполняется условие теоремы 3, т.е. в системе существует  $B$ -резонанс  $\pm \omega_0$ . Переходя в (3.6) к пределу при  $\delta \rightarrow +0$ , получим

$$A = \omega_0 |P(\omega_0)|^2 [2m_0\omega_0 - dr_3(\omega_0)/d\omega]^{-1} + A_{\infty} \quad (3.7)$$

$$A_{\infty} = -(2\pi i)^{-1} \text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(\omega)|^2 [m_0\omega^2 - r_3(\omega)]^{-1} \omega d\omega$$

При тех же предположениях из представления (3.5) находим амплитуду установившихся колебаний системы

$$W_0 = 2|P(\omega_0)| [2m_0\omega_0 - dr_3(\omega_0)/d\omega]^{-1} \quad (3.8)$$

С учетом (2.3) и (3.8) можно показать, что первое слагаемое в (3.7) представляет собой полную энергию установившихся колебаний системы с амплитудой  $W_0$  (3.8). Тем самым, второе слагаемое  $A_{\infty}$  – доля энергии, излученная на бесконечность при переходе системы из состояния покоя в режим установившихся колебаний под действием силы  $P(t)$ . Отметим еще раз, что действие этой силы ограничено во времени.

Принимая во внимание свойство 3, получим представление.

$$A_{\infty} = -\pi^{-1} \int_{\omega_1}^{\infty} \text{Im } r_3(\omega) |P(\omega)|^2 [m_0\omega^2 - r_3(\omega)]^{-2} \omega d\omega$$

Заметим, что, если в системе нет изолированного резонанса, то  $A = A_{\infty}$ , т.е. вся подведенная к системе энергия излучается на бесконечность.

Рассмотрим процесс накопления энергии в системе в случае, когда внешнее воздействие  $P(t)$  имеет вид

$$P(t) = \begin{cases} P_0 \sin(\omega_0 t), & 0 < t < 2\pi N / \omega_0 \\ 0, & t < 0, t > 2\pi N / \omega_0 \end{cases}$$

т.е. приложена периодическая нагрузка, частота которой совпадает с собственной частотой системы, продолжительность воздействия характеризуется числом периодов  $N$ . При этом амплитуда собственных колебаний  $W_0$  (3.8) пропорциональна  $N$  и, следовательно, энергия собственных колебаний  $E$  пропорциональна  $N^2$ . Следовательно, при ограниченной амплитуде внешнего воздействия энергия собственных колебаний может достигать сколь угодно больших значений.

Ниже для системы упругий слой ( $\nu = 0,3$ ) – полосовой штамп ( $a/H = 1; M = 1$ ) приведены нормированные значения: энергии, подведенной к системе –  $A$ , накопленной энергии –  $E$ , потерь за счет излучения –  $A_{\infty}$  и показателя эффективности накопления энергии  $\eta = (E/A) \times 100\%$  для различных значений  $N$

$N$	1	2	3	4	10
$A$	2,623	10,480	23,578	41,913	261,940
$E$	2,619	10,478	23,575	41,910	261,940
$A_{\infty} \times 10^3$	4	3	3	2	4
$(100-\eta) \times 10^3$	153	27	14	5	1

Видно, что абсолютная величина потерь энергии за счет излучения практически не зависит от числа периодов  $N$ , а показатель  $\eta$  с увеличением  $N$  приближается к 100%. Результаты, иллюстрирующие изменение величин  $A$ ,  $E$ ,  $A_\infty$  и  $\eta$  в зависимости от массы  $M$ , приведены ниже для случая  $N = 1$

$M$	0,65	0,70	1,00	2,00	100,0
$A$	2,581	2,592	2,623	2,629	2,686
$E$	2,491	2,565	2,619	2,629	2,686
$A_\infty \times 10^3$	89	27	4	$\approx 0$	$\approx 0$
$(100 - \eta) \times 10^3$	470	37	153	12	$\approx 0$

Расчеты показывают, что при уменьшении массы до значений близких к  $M_*$  (для данной системы  $M_* = 0,633$ ) показатель эффективности  $\eta$  незначительно снижается вследствие увеличения потерь энергии за счет излучения. Однако величина аккумулированной колебательной энергии практически не зависит от  $M$  в широком диапазоне изменения массы. Таким образом, система штамп-слой является высокоэффективным аккумулятором колебательной энергии.

4. Рассмотрим подробно процесс излучения накопленной колебательной энергии. Пусть в результате действия некоторой нагрузки  $P(t)$  в системе штамп-слой возбуждены собственные колебания с частотой  $\omega_0$  (т.е.  $\omega_0$  – корень уравнения (2.2)). По истечении продолжительного времени с момента окончания действия силы  $P(t)$  колебания в системе можно считать установившимися, т.е. зависимость от времени смещений любой из точек системы выражается множителем  $\cos(\omega_0 t)$ . При этом энергия установившихся собственных колебаний системы выражается в виде (2.3), где амплитудный множитель  $W_0$  определяется конкретным видом функции  $P(t)$  (см. (3.8)).

Пусть в момент, когда скорость штампа равна нулю (примем этот момент времени за  $t = 0$ ), происходит мгновенное изменение массы штампа. Так как полная энергия системы в этот момент времени равна потенциальной энергии упругой деформации континуума, то изменение массы штампа не влечет за собой изменения полной энергии системы. Однако при этом изменяется собственная частота системы. Обозначим через  $M_0$  новое значение массы штампа и через  $\Omega_0$  соответствующее значение собственной частоты. В математической постановке задачи уравнения (3.1) и граничные условия (3.2) дополняются уравнением движения штампа

$$M_0 \frac{d^2 w}{dt^2} = R_3(t), \quad R_3(t) = \int_{S_0} \sigma_{33} dS \quad (4.1)$$

и начальными условиями вида

$$u = u_0, \quad \partial u / \partial t = 0; \quad w = W_0, \quad dw / dt = 0, \quad t = 0 \quad (4.2)$$

где  $u_0$  собственное решение краевой задачи (1.1)–(1.3), (2.1) соответствующее собственной частоте  $\omega_0$ .

Методом интегральных преобразований получим решение задачи (3.1), (3.2), (4.1), (4.2). Выпишем выражения для смещения штампа

$$w(t) = W_0 \cos(\omega_0 t) - (2\pi)^{-1} W_0 (M_0 \omega_0^2 - r_3(\omega_0)) \int_{-\infty+i\delta}^{+\infty+i\delta} \frac{-i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{\exp(-i\omega t)}{M_0 \omega^2 - r_3(\omega)} d\omega$$

Применив лемму Жордана к этому выражению, в пределе при  $t \rightarrow \infty$  находим

$$w(t) = 2W_0 \frac{\Omega_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2} \frac{M_0\omega_0^2 - r_3(\omega_0)}{2M_0\Omega_0 - r_3'(\Omega_0)} \cos(\Omega_0 t) + o(1) \quad (4.3)$$

С учетом (2.3), (4.3) энергия установившихся колебаний системы с измененной массой представляется в виде

$$E_0 = \frac{\Omega_0^3}{(\omega_0^2 - \Omega_0^2)^2} \frac{[M_0\omega_0^2 - r_3(\omega_0)]^2}{2M_0\Omega_0 - r_3'(\Omega_0)} W_0^2$$

**Теорема 4.** Пусть система штамп–слой находится в режиме установившихся собственных колебаний. Любое изменение массы штампа, не сопровождающееся изменением полной энергии системы, приводит к излучению части энергии на бесконечность.

Из закона сохранения энергии следует, что энергия, излучаемая на бесконечность, равна  $E_\infty = E - E_0$ . При помощи элементарных алгебраических преобразований с учетом следствия 2 несложно показать, что  $E_\infty > 0$  при любом изменении массы.

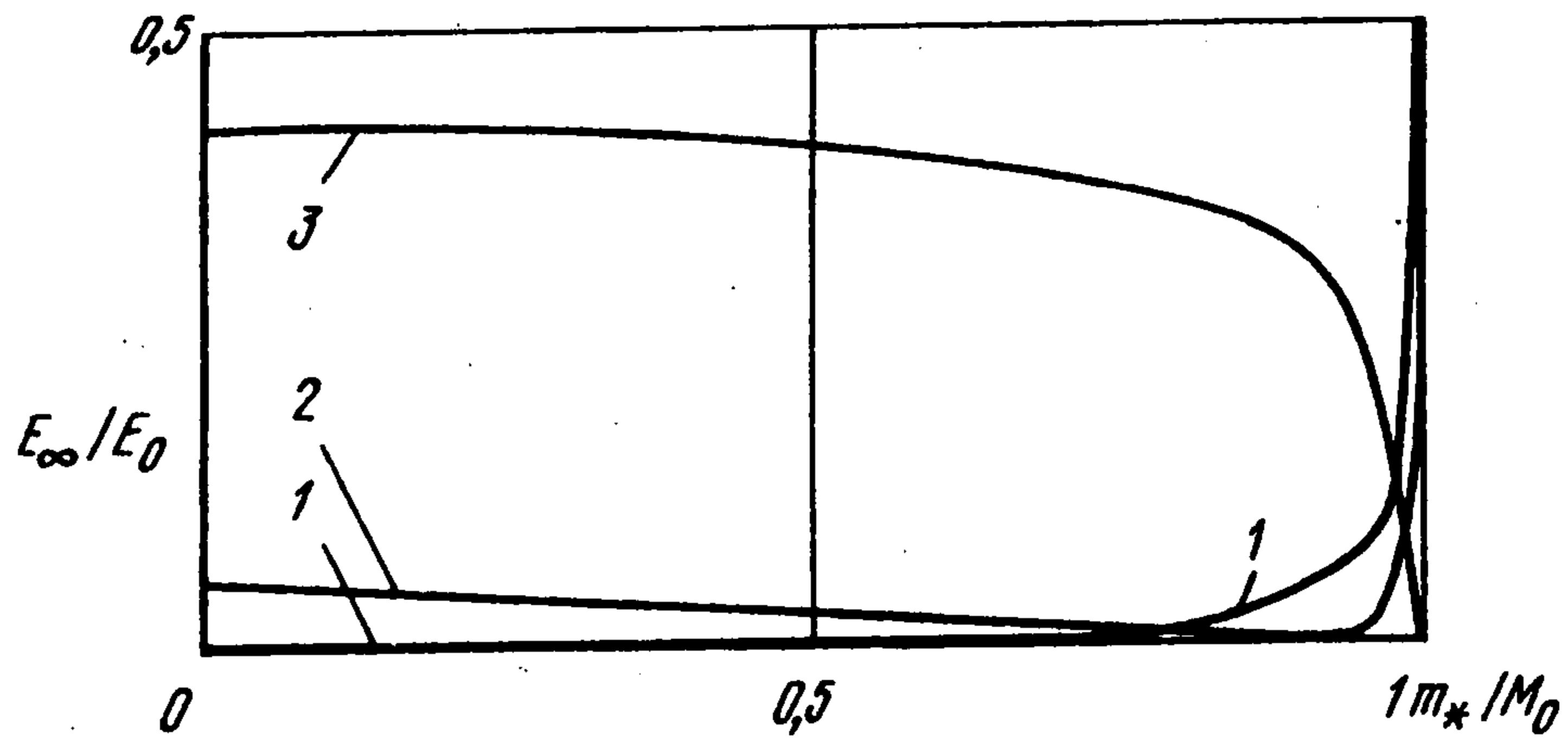
**Следствие 4.** В диапазоне частот  $\omega \in (0, \omega_1)$  максимальное значение потенциальной энергии  $\Pi(\omega)$  колебаний штампа с амплитудой  $W_0$  больше потенциальной энергии упругой статической деформации при том же смещении штампа  $W_0$ .

**Замечание.** Если новое значение массы  $M_0 < m_*$ , то вся колебательная энергия системы будет излучена на бесконечность. Как следует из теоремы 3, при таком значении  $m$  система не имеет собственных частот, и соответственно  $E_0 = 0$ .

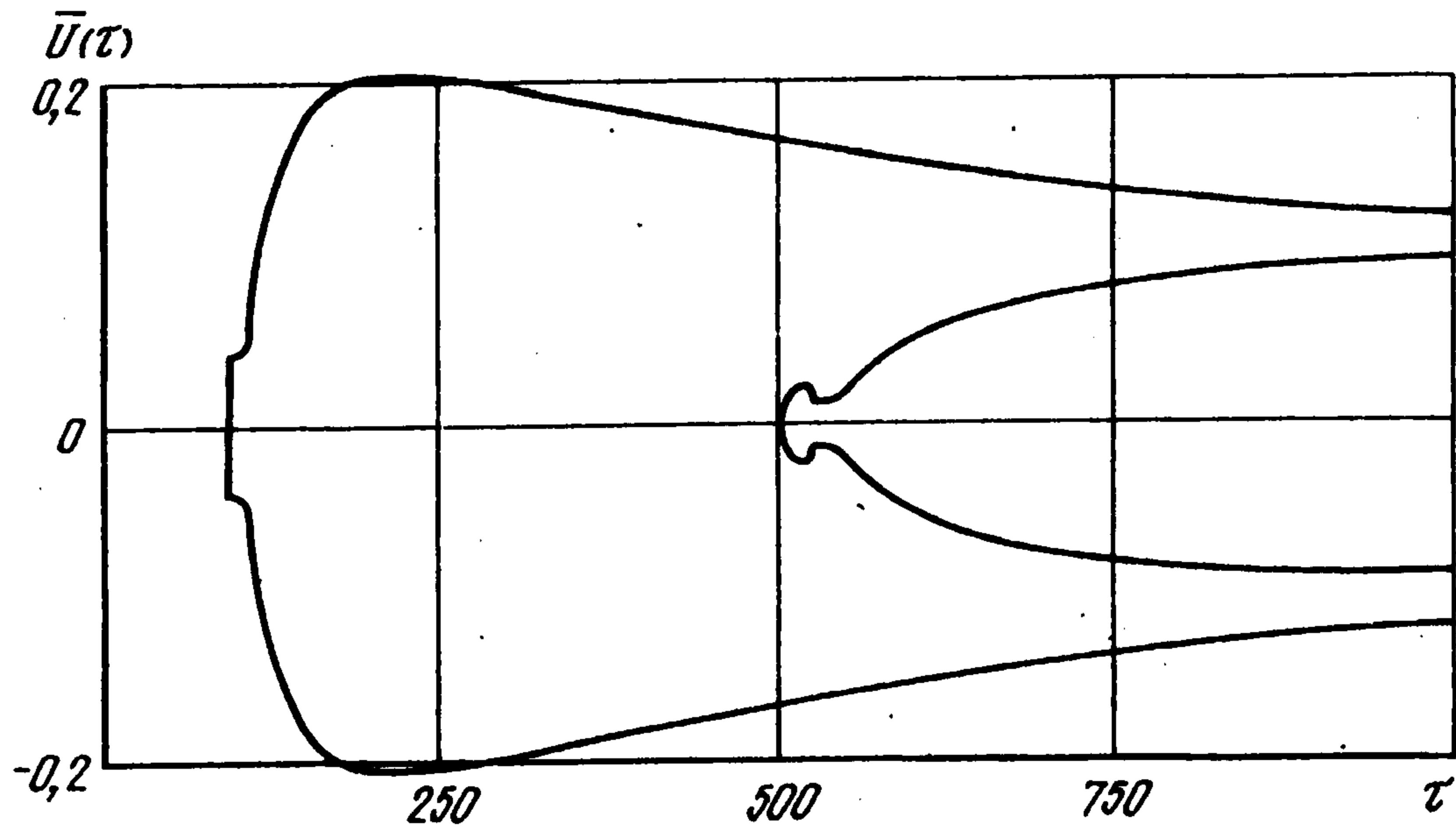
Фиг. 3 иллюстрирует изменение излученной энергии  $E_\infty/E$  в зависимости от изменения массы штампа. Кривые 1, 2, 3 получены для различных значений погонной массы полосового штампа ( $m_*/m_0 = 0,5; 0,9; 0,99$ ) ширины  $a/H = 1$ , взаимодействующего с изотропным упругим слоем ( $\nu = 0,3$ ). Эти значения массы соответствуют собственным частотам  $\omega_0/\omega_1 = 1,2; 1,517; 1,57$ . Для удобства представления результатов и соответствия с предыдущими графиками отношение  $E_\infty/E$  представлено в зависимости от  $m_*/M_0$ . При таком выборе переменной очевидно, что кривые касаются оси абсцисс в точках 0,5; 0,9 и 0,99 ( $E_\infty/E = 0$ ) соответственно. Из фиг. 3 видно, что как увеличение массы ( $M_0 > m_0$ ), так и ее уменьшение сопровождается излучением энергии на бесконечность. Однако очевидно, что энергия, излученная вследствие уменьшения массы штампа, может значительно превосходить излучение за счет увеличения массы штампа.

Характер поведения кривых 1 и 2 позволяет говорить, что система в диапазоне частот  $\omega$  от 0 до  $0,96 \omega_1$  энергетически близка к статической, т.е. при мгновенной остановке штампа ( $M_0 = \infty$ ) практически не происходит излучения энергии на бесконечность (менее 5%). Тем самым, частотный интервал  $(0,96 \omega_1, \omega_1)$  представляет собой довольно узкую переходную зону в которой упругий слой из квазистатического состояния переходит в динамическое, а именно при  $\omega > \omega_1$  колебания в слое перестают быть синфазными и появляются однородные распространяющиеся волны. Этим объясняются резкое увеличение энергии, излучаемой на бесконечности, ( $E_\infty/E \rightarrow 1$  при  $M_0 \rightarrow m_*$ ) и большие градиенты кривых 1–3 в малой окрестности слева от точки  $m_*/M_0 = 1$ , которая соответствует частоте  $\omega_1$ . Большие градиенты отмечались ранее на фиг. 2.

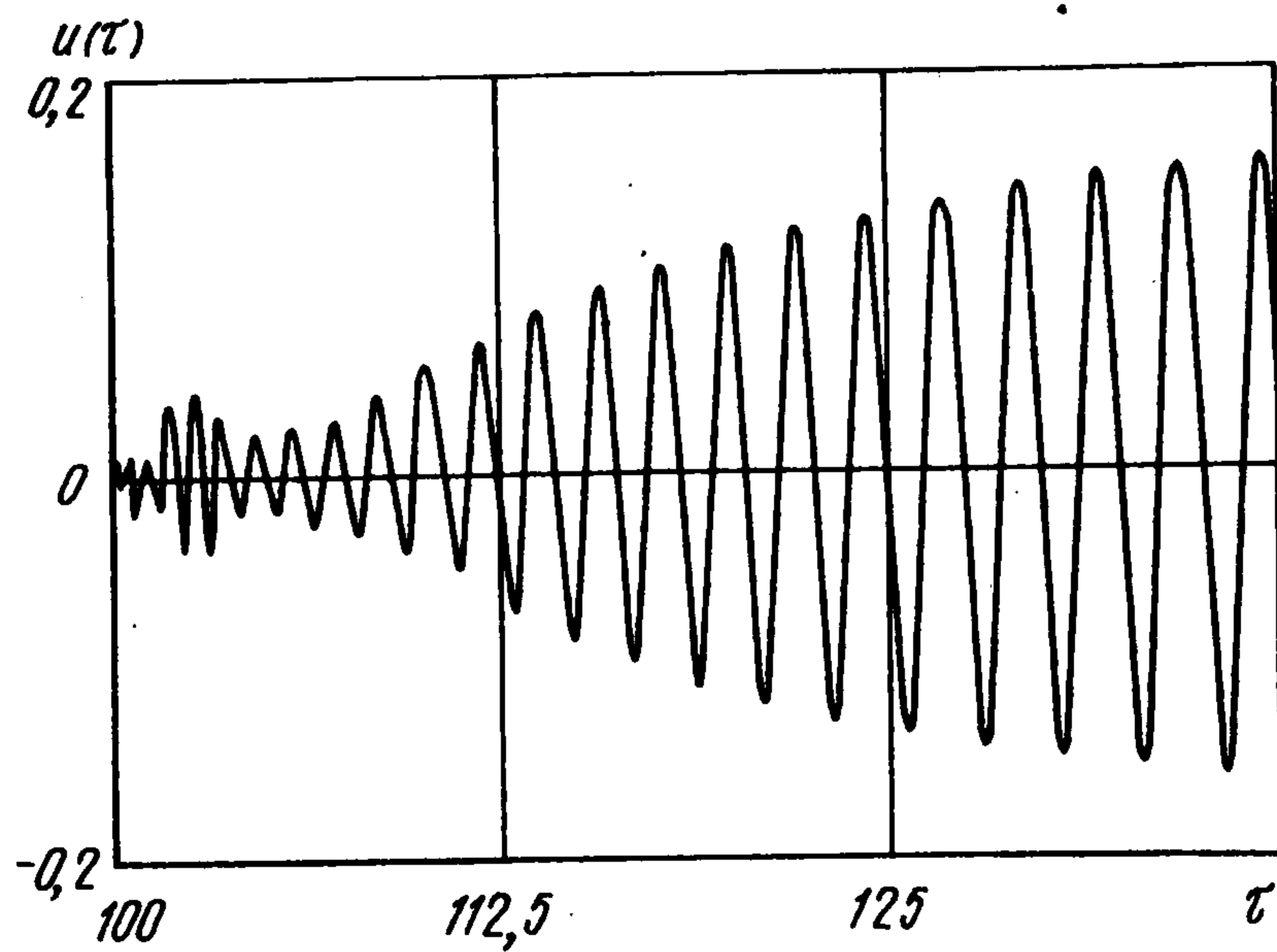
Процесс излучения проиллюстрируем на примере задачи об антиплоском сдвиге слоя полосовым штампом. Пусть излучение энергии вызвано "полным отрывом" штампа от слоя. Методом суперпозиции задача сводится к решению начально-краевой задачи



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

для волнового уравнения в полосе с однородными начальными условиями и граничными условиями вида:

$$u = 0, \quad x_3 = 0; \quad \frac{G \partial u}{\partial x_3} = \begin{cases} q(x_1) \cos(\omega_0 t) h(t), & |x_1| < a; \\ 0, & |x_1| > a; \end{cases} \quad x_3 = H$$

где  $q(x_1)$  – амплитуда контактных напряжений в задаче о собственных колебаниях

системы с частотой  $\omega_0$  при амплитуде смещения штампа, равной  $W_0$ ;  $h(t)$  – функция Хевисайда. Решение этой задачи запишем в виде

$$u(x_1, x_3, \tau) = i(4\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha, \kappa_0) \exp(-i\alpha x_1) d\alpha \int_{-\infty+i\delta}^{+\infty+i\delta} \kappa(\kappa^2 - \kappa_0^2)^{-1} \times \\ \times \operatorname{sh}[(\alpha^2 - \kappa^2)^{1/2} x_3] [(\alpha^2 - \kappa^2)^{1/2} \operatorname{ch}(\alpha^2 - \kappa^2)^{1/2}]^{-1} \exp(-i\kappa\tau) d\kappa$$

где  $\kappa = \omega H/c$ ,  $\tau = ct/H$  ( $c$  – скорость распространения поперечной волны); линейные размеры и смещения нормированы к  $H$ ;  $Q(\alpha, \kappa_0)$  – преобразование Фурье по переменной  $x_1$  от  $q(x_1)/G$ . Асимптотические выражения смещения  $u$  при больших значениях  $x_1$  имеет вид

$$u(x_1, x_3, \tau) = \frac{(1-x_1^2)^{1/2}}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left[\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)x_3\right] (2n-1)^{1/2} \times \\ \times Q\left(\frac{\pi(n-1/2)x_1}{(1-x_1^2)^{1/2}}, \kappa_0\right) \cos\left[\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)\tau(1-x_1^2)^{1/2} + \frac{\pi}{4}\right] \times \\ \times \left(\pi^2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \kappa_0^2(1-x_1^2)\right)^{-1}, \quad x_1 = \frac{x_1}{\tau} < 1$$

Зависимости смещения точки свободной поверхности слоя ( $x_3 = 1$ ) от времени, рассчитанные по приведенной асимптотической формуле, показаны на фиг. 4, где изображены огибающие излученного осциллирующего сигнала ( $x_1 = 100$ ,  $x_1 = 500$ ). По горизонтальной оси откладывается безразмерное время  $\tau$ , по вертикальной оси – безразмерное смещение. Частота осцилляций, показанных на малом участке переднего фронта импульса (фиг. 5), совпадает с частотой, рассчитанной методом отражения [6]. Отметим, что при увеличении координаты  $x_1$  точки наблюдения импульс оказывается более протяженным и максимум смещения в нем уменьшается.

5. Энергия, излучаемая на бесконечность, переносится нестационарным импульсом, для которого на большом удалении от штампа можно выделить как передний, так и задний фронты возмущений, поскольку после смещений в режиме установившихся колебаний системы штамп–слой экспоненциально убывает на бесконечности. Из (4.3) следует, что смещения в импульсе пропорциональны  $W_0$ . Как отмечалось ранее, в процессе накопления энергии системой могут быть достигнуты сколь угодно большие амплитуды собственных колебаний при ограниченной амплитуде внешнего воздействия. Рассматривая аккумуляцию энергии и ее излучение как единый процесс, приходим к выводу, что смещения в импульсе могут существенно превосходить смещения, генерируемые источником той же мощности, не использующим способность системы аккумуляцию энергии. Значит можно говорить о генерировании высокоэнергетических импульсов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические свойства полуграниченных упругих и электроупругих трехмерных тел при смешанных граничных условиях и наличии включений // Аннот. докл. V Всес. съезда по теор. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, 1981. С. 39.
2. Ворович Е.И., Пряхина О.Д. Аналитический метод определения  $B$ -резонансов // Изв. АН СССР, МГТ. 1987. № 3. С. 101–106.
3. Боев С.И., Полякова И.Б. Об ограниченных  $B$ -резонансах в системе массивный штамп – слоистое основание // Изв. АН СССР. МГТ. 1990. № 6. С. 67–71.
4. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320с.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
26.V.1993