УДК 539.3

© 1994 г. И.И. Аргатов, С.А. Назаров

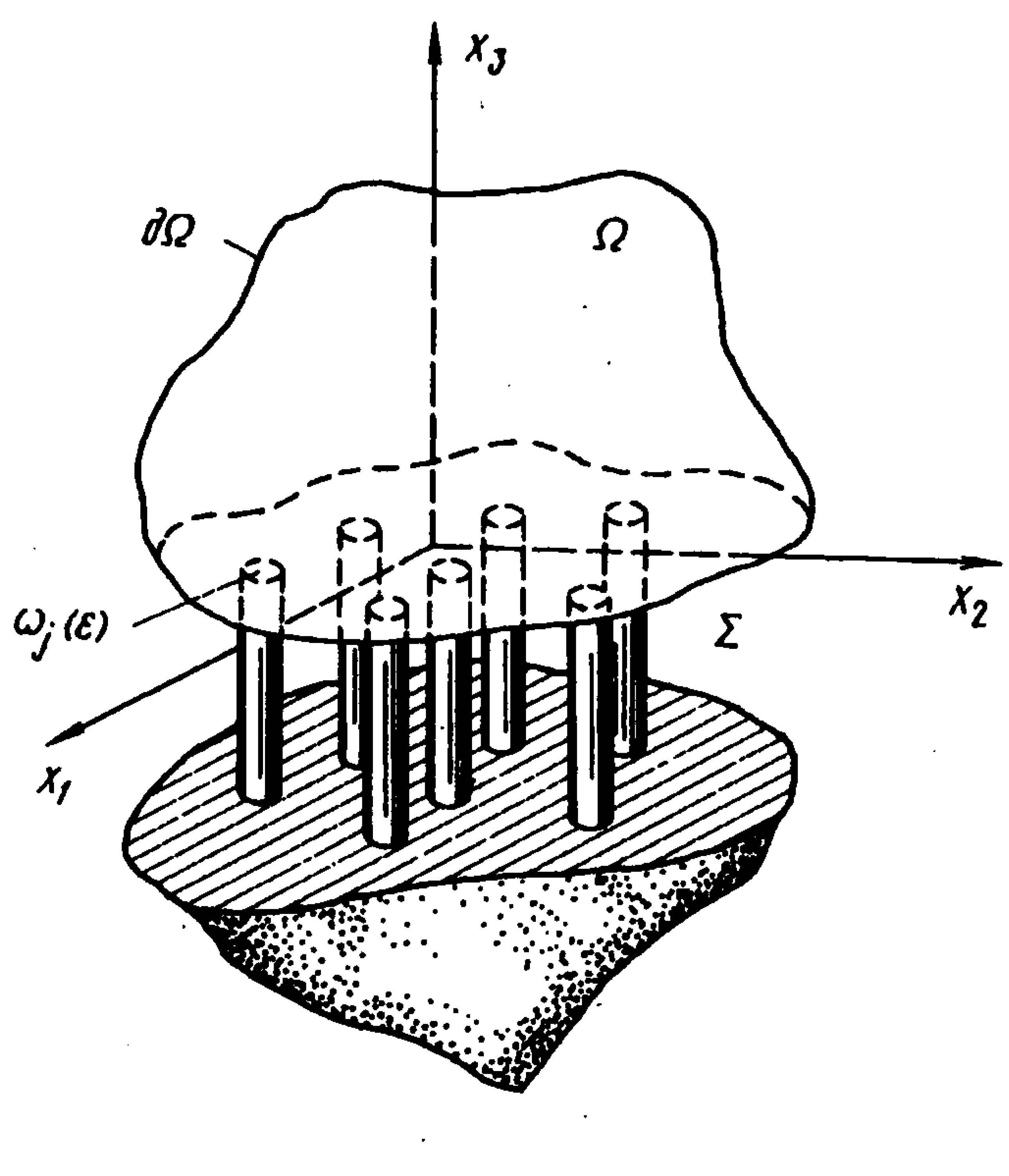
АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГОМ ТЕЛЕ, ЛЕЖАЩЕМ НА НЕСКОЛЬКИХ МАЛЫХ ОПОРАХ

Изучается равновесие упругого тела с плоским основанием на нескольких малых гладких жестких опорах $\Gamma(\varepsilon)$. На $\Gamma(\varepsilon)$ ставятся граничные условия одностороннего контакта. Строятся и обосновываются главные члены асимптотики при $\varepsilon \to 0$ решения задачи, которая становится статически неопределимой, когда число опор превышает три. Вопрос об отыскании зон контакта сводится к решению нелинейной алгебраической задачи. Помимо трех уравнений равновесия, связывающих неизвестные опорные реакции, эта задача включает условия совместности деформаций, которые содержат, в частности, три неизвестных параметра, характеризующих осадку тела. Доказаны необходимые и достаточные условия существования и единственности решения предельной алгебраической задачи.

1. Постановка задачи. Пусть в недеформированном состоянии тело занимает область Ω пространства $\mathbf{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, часть Σ которой совпадает с участком плоскости $x_3 = 0$ (фигура). На $\Sigma \setminus \partial\Sigma$, выделим точки $P^1,\ldots, P^J$ с координатами $(x_1^j, x_2^j, 0)$, $j = 1,\ldots,J$. Здесь и далее множества и точки в $\mathbf{R}^2$ и их изображения в $\mathbf{R}^3$ на плоскости $\{\mathbf{x}\colon x_3 = 0\}$ не различаются в обозначениях. Пусть еще ω_j – область в $\mathbf{R}^2$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром $\partial\omega_j$, ε – малый положительный параметр,

$$\omega_j(\varepsilon) = \{(x_1, x_2, 0) \in \Sigma \setminus \partial\Sigma\colon \varepsilon^{-1}(x_1 - x_1^j, x_2 - x_2^j) \in \omega_j\}; \quad j = 1,\ldots,J$$

Относительно взаимного расположения точек P^j и множество $\omega_j(\varepsilon)$ в разд. 3, 4 будет сделано дополнительное предположение. Объединение всех замыканий $\overline{\omega_j(\varepsilon)}$ обозначим $\Gamma(\varepsilon)$. Под действием объемных сил $\mathbf{f}$ тело может опираться на плоские абсолютно жесткие и гладкие опоры $\Gamma(\varepsilon)$. Поверхность $\partial\Omega \setminus \Gamma(\varepsilon)$ считается свободной от нагрузок.



Для того чтобы записать уравнения теории упругости в удобной форме, введем ряд обозначений. Пусть

$$\Phi^i(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^i x_i,\ \Phi^4(\mathbf{x}) = 2^{-1/2}(x_2\mathbf{e}^3 + x_3\mathbf{e}^2) \tag{1.1}$$

$$\Phi^5(\mathbf{x}) = 2^{-1/2}(x_1\mathbf{e}^3 + x_3\mathbf{e}^1),\quad \Phi^6(\mathbf{x}) = 2^{-1/2}(x_2\mathbf{e}^1 + x_1\mathbf{e}^2)$$

$$\varphi^i = \mathbf{e}^i,\quad \varphi^{3+i}(\mathbf{x}) = 2^{-1/2}\mathbf{x}\times\mathbf{e}^i \tag{1.2}$$

Здесь $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{e}^i$ – орт оси x_i, крестом обозначено векторное произведение и все векторы реализуются как столбцы. Пусть еще $D(\mathbf{x})$ – (3×6)-матрица со столбцами $\Phi^1(\mathbf{x}),\ldots,\Phi^6(\mathbf{x})$, $d(\mathbf{x})$ – (3×6)-матрица со столбцами $\varphi^1,\ldots,\varphi^6(\mathbf{x})$ и через A обозначена (6×6)-матрица упругих модулей изотропного тела

$$A_{jk} = \lambda + 2\mu\delta_{jk},\ A_{pq} = \mu\delta_{pq}$$

$$A_{jq} = A_{pk} = 0,\ j,k = 1,2,3;\ p,q = 4,5,6$$

δ_{jk} – символ Кронекера, λ и μ – коэффициенты Ламе.

Если $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^t$ – вектор смещений, t – знак транспонирования и ∇_x – градиент, то шестимерные столбцы

$$D(\nabla_x)^t\mathbf{u}(\mathbf{x}),\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = AD(\nabla_x)^t\mathbf{u}(\mathbf{x})$$

представляют собой векторы деформаций и напряжений. К примеру, вектор напряжений выражается через декартовы компоненты σ_{ij} тензора напряжений следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, 2^{-1/2}\sigma_{23}, 2^{-1/2}\sigma_{31}, 2^{-1/2}\sigma_{12})^t$$

Можно проверить, что система Ламе и однородные краевые условия на $\partial\Omega\setminus\Gamma(\varepsilon)$ записываются так

$$L(\nabla_x)\mathbf{u}(\varepsilon,\mathbf{x}) \equiv -D(\nabla_x)AD(\nabla_x)^t\mathbf{u}(\varepsilon,\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega \tag{1.3}$$

$$B(x,\nabla_x)\mathbf{u}(\varepsilon,\mathbf{x}) \equiv D(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}))AD(\nabla_x)^t\mathbf{u}(\varepsilon,\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x}\in\partial\Omega\setminus\Gamma(\varepsilon)$$

Здесь $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор внутренней нормали к границе области Ω. Уравнения (1.3) замыкаются условиями одностороннего контакта на множествах $\omega_j(\varepsilon)$:

$$\sigma_{31}(\mathbf{u};\varepsilon,\mathbf{x}) = \sigma_{32}(\mathbf{u};\varepsilon,\mathbf{x}) = 0 \tag{1.4}$$

$$u_3(\varepsilon,\mathbf{x}) \geqslant 0,\ \sigma_{33}(\mathbf{u};\varepsilon,\mathbf{x}) \leqslant 0$$

$$u_3(\varepsilon,\mathbf{x})\sigma_{33}(\mathbf{u};\varepsilon,\mathbf{x}) = 0,\quad \mathbf{x}\in\omega_j(\varepsilon);\ j = 1,\ldots,J \tag{1.5}$$

Известно (см. [1, 2] и др.), что задачи Синьорини (1.3) – (1.5) эквивалентна поиску минимума функционала потенциальной энергии $\mathbf{J}(\mathbf{v}) = a(\mathbf{v},\mathbf{v}) - F(\mathbf{v})$ на выпуклом конусе

$$K = \{\mathbf{v}\in H^1(\Omega): \upsilon_3(\mathbf{x}) \geqslant 0,\ \mathbf{x}\in\Gamma(\varepsilon)\}$$

Через $H^1(\Omega)$ обозначено пространство вектор-функций с конечной упругой энергией

$$a(\mathbf{v},\mathbf{v}) \equiv {}^1\!/_2(AD(\nabla_x)^t\mathbf{v}, D(\nabla_x)^t\mathbf{v})_\Omega$$

$F(\mathbf{v}) \equiv (\mathbf{f},\mathbf{v})_\Omega$ – работа объемных сил $\mathbf{f}\in L_2(\Omega)$ на допустимых перемещениях $\mathbf{v}\in K$; при этом $(\ ,\ )_\Omega$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Из рассмотрения исключается случай уравновешенных нагрузок. Уравнения равновесия тела на гладких опорах требуют, чтобы

$$F_1(1) = F_2(1) = 0,\ F_2(x_1) - F_1(x_2) = 0,\ F_3(1) < 0 \tag{1.6}$$

Здесь $F_i(\gamma) \equiv (\mathbf{f},\gamma\mathbf{e}^i)_\Omega$ для $\gamma\in L_2(\Omega)$.

В этом случае система сил статически эквивалентна одной равнодействующей $F_3(1)\mathbf{e}^3$, приложенной в произвольной точке центральной оси системы

$$x_1 = x_1^0 \equiv F_3(1)^{-1}(F_3(x_1) - F_1(x_3))$$

$$x_2 = x_2^0 \equiv F_3(1)^{-1}(F_3(x_2) - F_2(x_3))$$

Пересечение $\Gamma(\varepsilon)$ замкнутых полуплоскостей, содержащих $\Gamma(\varepsilon)$, называется выпуклой оболочкой $\Phi(\varepsilon)$. Многоугольник $\Gamma(0)$ будем обозначать через $\mathbf{P}$. Пусть $\mathbf{R} = \{r\colon r = d(\mathbf{x})a,\ a \in \mathbf{R}^6\}$ – пространство жестких смещений, $\mathbf{R}' = \mathbf{R} \cap K$ и $\mathbf{R}'' = \{r \in \mathbf{R}' : -r \in \mathbf{R}'\}$ – подмножество в $\mathbf{R}'$, образованное всеми "двусторонними" перемещениями $r_1 = c_1 - c_0 x_2$, $r_2 = c_2 + c_0 x_1$, $r_3 = 0$.

Для существования абсолютного минимума функционала $\mathbf{J}$ на K необходимо и достаточно ([1], § 2.10) следующее условие: центральная ось приложенной системы сил пересекает множество $\Gamma(\varepsilon)$ во внутренней точке. При сделанных выше предположениях минимизирующая $\mathbf{J}$ вектор-функция из K, если таковая существует, определена с точностью до произвольного двустороннего перемещения.

В данной статье методом сращиваемых асимптотических разложений построена асимптотика при $\varepsilon \to 0$ решения задачи Синьорини (1.3) – (1.5). Подчеркнем, что простой предельный переход в ней невозможен: при $\varepsilon = 0$ соотношения (1.4), (1.5) исчезают, а уравнения (1.3) трансформируются во вторую основную краевую задачу теории упругости:

$$L(\nabla_x)\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega;\ B(\mathbf{x}, \nabla_x)\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega \qquad (1.7)$$

Эта задача в случае (1.6) решений не имеет.

2. Построение асимптотики. Воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений (см. [3, 4] и др.) и будем искать разложения двух типов: внешнее, справедливое на удалении от множества $\Gamma(\varepsilon)$

$$\mathbf{u}(\varepsilon, \mathbf{x}) = \varepsilon^{-1}\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) + \varepsilon^0\mathbf{v}^1(\mathbf{x}) + \ldots \qquad (2.1)$$

и внутреннее, справедливы в малых окрестностях $\omega_j(\varepsilon)$:

$$\mathbf{u}(\varepsilon, \mathbf{x}) = \varepsilon^{-1}\mathbf{w}^{0j}(\boldsymbol{\xi}^j) + \varepsilon^0\mathbf{w}^{1j}(\boldsymbol{\xi}^j) + \ldots \qquad (2.2)$$

В (2.2) введены "растянутые" переменные

$$\boldsymbol{\xi}^j = (\xi_1^j, \xi_2^j, \xi_3^j), \quad \boldsymbol{\xi}^j = \varepsilon^{-1}(\mathbf{x} - P^j) \qquad (2.3)$$

Подставляя (2.1) в (1.3), получаем, что $\mathbf{v}^0$ – жесткое смещение из $\mathbf{R}\setminus\mathbf{R}''$, т.е. $\mathbf{v}^0 = d(\mathbf{x})a^0$, $a^0 \in \mathbf{R}^6$, $a_i^0 = 0$ (i = 1, 2, 6). Кроме того, функция $\mathbf{v}^1$ должна удовлетворять задаче (1.7). Метод сращиваемых разложений подразумевает, что слагаемые $\varepsilon^{k-1}\mathbf{v}^k$ из правой части (2.1) могут иметь особенности порядков $O(|\mathbf{x} - P^j|^{-k})$ в точках P^j (вблизи зон возмущения краевых условий). Это позволяет допустить в выражение для $\mathbf{v}^1$ особенности $O(|\mathbf{x} - P^j|^{-1})$, порождаемые сосредоточенными силами. Обозначим через $\mathbf{G}^j$ обобщенные вектор-функции Грина, которые удовлетворяют соотношениям

$$L(\nabla_x)\mathbf{G}^j(\mathbf{x}) = -d(\mathbf{x})c^j, \mathbf{x} \in \Omega;\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \nabla_x)\mathbf{G}^j(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega \setminus P^j \qquad (2.4)$$

$$(\mathbf{G}^j, \varphi^i)_\Omega = 0, i = 3,4,5;\ \mathbf{G}^j(x) = \mathbf{T}(\mathbf{x} - P^j) + O(1), \mathbf{x} \to P^j$$

Поясним принятые обозначения: $\mathbf{T}$ – решение задачи Буссинеска о нагружении упругого полупространства $x_3 \geqslant 0$ единичной сосредоточенной силой, приложенной в начале координат и направленной вдоль оси x_3,

$$4\pi\mu\mathbf{T}_i(\mathbf{x}) \equiv x_i x_3 |\mathbf{x}|^{-3} + (1 - \alpha^{-1})x_i|\mathbf{x}|^{-1}(|\mathbf{x}| + x_3)^{-1}, i = 1,2$$

$$4\pi\mu\mathbf{T}_3(\mathbf{x}) \equiv x_3^2|\mathbf{x}|^{-3} + \alpha^{-1}|\mathbf{x}|^{-1}, \alpha \equiv (\lambda + 2\mu)^{-1}(\lambda + \mu)$$

Вектор c^j определяется из системы

$$Sc^j = b^j = (0,0,1,2^{-1/2}x_2^j, -2^{-1/2}x_1^j, 0)^t \tag{2.5}$$

Напомним, что матрица Грама $S = \left\|(\varphi^i, \varphi^k)_\Omega\right\|_{i,k=1}^6$ неособенная.

Пусть еще $\mathbf{v}^{10} \in H^2(\Omega)$ – решение задачи (1.7) для самоуравновешенной нагрузки

$$\mathbf{f}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - d(\mathbf{x})c^0 \tag{2.6}$$

причем $(\mathbf{v}^{10}, \varphi^i)_\Omega = 0$ $(i = 3, 4, 5)$. Вектор c^0 удовлетворяет системе (2.5) с компонентами правой части $b_i^0 = (\mathbf{f}, \varphi^i)_\Omega$ $(i = 1,\ldots,6)$. Тогда для $\mathbf{v}^1$ можно предложить такое представление:

$$\mathbf{v}^1(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^{10}(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})a^1 + R_1\mathbf{G}^1(\mathbf{x}) + \ldots + R_J\mathbf{G}^J(\mathbf{x}) \tag{2.7}$$

Здесь $d(\mathbf{x})a^1 \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{R}''$; R_j – некоторые постоянные.

Поскольку векторы $\mathbf{v}^{10}$ и $\mathbf{G}^j$ оставляют невязки в системе уравнений равновесия (вида $d(\mathbf{x})\,c^h$; см. (2.6) и (2.4)), то вектор (2.7) удовлетворяет (1.7) лишь при дополнительных условиях

$$-F_3(1) = R_1 + \ldots + R_J \tag{2.8}$$

$$-x_1^\circ F_3(1) = x_1^1 R_1 + \ldots + x_1^J R_J, \quad -x_2^\circ F_3(1) = x_2^1 R_1 + \ldots + x_2^J R_J$$

Обратимся к построению членов внутренних разложений, при помощи которых соблюдается условие (1.6). Перейдем к быстрым переменным (2.3), а затем положим $\varepsilon = 0$. В результате из (1.4)–(1.6) получаем модельную задачу Синьорини для определения $\mathbf{w}^{0j}$:

$$L(\nabla_\xi)\mathbf{w}^{0j}(\xi) = 0, \; \xi \in \mathbf{R}_+^3 = \{\xi \in \mathbf{R}^3 : \xi_3 > 0\} \tag{2.9}$$

$$\sigma_{31}(\mathbf{w}^{0j}(\xi',0)) = \sigma_{32}(\mathbf{w}^{0j}(\xi',0)) = 0, \; \xi' \equiv (\xi_1,\xi_2) \equiv \mathbf{R}^2$$

$$\mathbf{w}_3^{0j}(\xi',0) \geqslant 0, \; \sigma_{33}(\mathbf{w}^{0j}(\xi',0)) \leqslant 0 \tag{2.10}$$

$$\mathbf{w}_3^{0j}(\xi',0)\sigma_{33}(\mathbf{w}^{0j}(\xi',0)) = 0, \; \xi' \in \omega_j$$

Индекс в символе ξ^j не пишется. Соотношения (2.9), (2.10) снабжаются дополнительным асимптотическим условием, получающимся при сращивании внешнего и внутренних разложений. Поскольку $|\xi^j| = \varepsilon^{-1}|\mathbf{x} - P^j|$, то, выделяя в $\mathbf{v}^0$ и $\mathbf{v}^1$ главные члены асимптотик при $\mathbf{x} \to P^j$, получаем

$$\varepsilon^{-1}\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^1(\mathbf{x}) \sim \varepsilon^{-1}\{d(P^j)a^0 + R_j\mathbf{T}(\xi^j)\} \tag{2.11}$$

Сравнивая разложения (2.1) и (2.2) одной и той же функции $\mathbf{u}$ в зоне $\{\mathbf{x} : c\varepsilon^{1/2} \leqslant |\mathbf{x} - P^j| \leqslant C\varepsilon^{1/2}\}$ (или, что то же, при $|\xi^j| = O(\varepsilon^{-1/2})$), выводим упомянутые условия

$$\mathbf{w}^{0j}(\xi) = d(P^j)a^0 + R_j\mathbf{T}(\xi) + o(|\xi|^{-1}), |\xi| \to \infty. \tag{2.12}$$

3. Решение модельной задачи Синьорини. Если выполняется неравенство $a_3^0 + 2^{-1/2}(a_4^0 x_2^j - a_5^0 x_1^j) \geqslant 0$, то, как нетрудно видеть, задаче (2.9), (2.10), (2.12) удовлетворяет постоянный вектор $\mathbf{w}^{0j} = d(P^j)a^0$, а величина R_j равна нулю.

Обратимся к случаю $a_3^0+2^{-1/2}(a_4^0x_2^j-a_5^0x_1^j)<0$. Обозначим через $\mathbf{c}_j$ емкость cap(ω_j) множества $\omega_j=\{\xi:\xi\in\omega_j,\xi_3=0\}$, а через Y_j – соответствующий емкостный потенциал (см. [5]),

$$-\Delta_\xi Y_j(\xi)=0,\ \xi\in\mathbf{R}^3\setminus\overline{\omega}_j;\quad Y_j(\xi)=1,\ \xi\in\omega_j \tag{3.1}$$

$$Y_j(\xi)=\mathbf{c}_j|\xi|^{-1}+O(|\xi|^{-2}),|\xi|\to\infty$$

Согласно представлению Папковича–Нейбера, емкостной потенциал дает решение контактной задачи о внедрении (без поворота) гладкого штампа с плоским основанием в форме области ω_j в упругое полупространство $\xi_3\geqslant 0$ на единичную глубину (см. [6, 7]):

$$W_i^j(\xi)=\alpha[(\alpha^{-1}-1)\int_{\xi_3}^{\infty}\partial_iY_j(\xi',\zeta)d\zeta\,\xi_3\partial_iY_j(\xi)],\quad i=1,2$$

$$W_3^j(\xi)=Y_j(\xi)-\alpha\xi_3\partial_3Y_j(\xi),\ \partial_i=\partial/\partial\xi_i$$

Давление на границу полупространства со стороны штампа вычисляется по значению нормальной производной функции Y_j и равно

$$-\sigma_{33}^j(\xi',0)=-2\mu\alpha\partial_3Y_j(\xi',+0)$$

Давление под подошвой штампа положительно (в силу принципа максимума $\partial_3Y_j(\xi',+0)<0$ при $\xi'\in\omega_j$) и имеет корневую особенность на краю площадки контакта,

$$Y_j(\xi)=1+K_j(\tau)\rho^{1/2}\cos{}^1\!/\!_2\varphi+\tilde{Y}(\xi),\ \left|\nabla_\xi^k\tilde{Y}_j(\xi)\right|\leqslant c_\delta\rho^{\delta-k+3/2} \tag{3.2}$$

Здесь τ – длина дуги на $\partial\omega_j$, (ρ,φ) – полярные координаты в плоскостях, перпендикулярных $\partial\omega_j$; K_j – положительная функция из $C^\infty(\partial\omega_j)$, $0<\delta$ – произвольное число.

Для того чтобы штамп, нагруженный сосредоточенной силой, параллельной оси ξ_3, совершил только поступательное перемещение, необходимо и достаточно, чтобы ось действия силы совпадала с прямой

$$\xi_i=\xi_i^{\circ j}\equiv\left(\int_{\omega_j}\partial_3Y_j(\eta,+0)d\eta\right)^{-1}\left(\int_{\omega_j}\eta_i\partial_3Y_j(\eta,+0)d\eta\right),\quad i=1,2$$

Точку $(\xi_1^{\circ j},\xi_2^{\circ j})$ назовем центром давления плоской фигуры ω_j. Если начало координат перенести в точку $(\xi_1^{\circ j},\xi_2^{\circ j},0)$, то асимптотика Y_j на бесконечности примет вид $Y_j(\xi)=\mathbf{c}_j|\xi|^{-1}+O(|\xi|^{-3})$, (ср. с (3.1)). В дальнейшем будем считать, что точки P_j совпадают с центрами давлений ω_j.

Таким образом, условия (2.9) – (2.12) удовлетворяются, если

$$\mathbf{w}^{0j}(\xi)=d(P^j)a^0-(a_3^0+2^{-1/2}(a_4^0x_2^j-a_5^0x_1^j))\mathbf{W}^j(\xi) \tag{3.3}$$

Сравнивая асимптотику вектора (3.3) на бесконечности с формулой (2.12), получаем

$$R_j=-\kappa_j(a_3^0+2^{-1/2}(a_4^0x_2^j-a_5^0x_1^j)),\quad \kappa_j\equiv 4\mu\alpha\mathbf{c}_j$$

Пусть $(t)_+=(t+|t|)/2$ – положительная часть числа $t\in\mathbf{R}$. Члены разложений (2.1) и (2.2) найдены с точностью до некоторых постоянных. Вектор a^1 вычисляется на следующем шаге построения асимптотики, а для определения опорных реакций $R_1,\ldots,R_J$

и параметров $\overset{0}{a}_3, \overset{0}{a}_4, \overset{0}{a}_5$, характеризующих осадку тела, в дополнение к уравнениям равновесия (2.8) возникли условия

$$a_3^0 + 2^{-1/2}(a_4^0 x_2^j - a_5^0 x_1^j) \geqslant 0 \Rightarrow R_j = 0$$

$$a_3^0 + 2^{-1/2}(a_4^0 x_2^j - a_5^0 x_1^j) < 0 \Rightarrow R_j = -\kappa_j(a_3^0 + 2^{-1/2}(a_4^0 x_2^j - a_5^0 x_1^j))$$

Краткая запись этих условий такова:

$$R_j = \kappa_j(-a_3^0 + 2^{-1/2}(a_5^0 x_1^j - a_4^0 x_2^j))_+, \ j = 1,\dots,J \tag{3.4}$$

Соотношения (3.4) вместе с (2.8) назовем предельной алгебраической задачей. Подчеркнем, что после решения этой задачи восстанавливаются члены $\mathbf{w}^{0j}$ внутренних разложений (2.2), а также слагаемое $\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x})a^0$ из (2.1). Наконец, второй член (2.7) внешнего разложения определен с точностью до слагаемого $d(\mathbf{x})a^1$. Ограничиваясь построением основных членов асимптотики, далее полагаем $a^1 = 0$.

4. Разрешимость предельной алгебраической задачи. Сформулируем и докажем достаточные условия существования и единственности решения задачи (2.8), (3.4).

Предложение 1. Пусть соблюдены следующие два условия: 1) среди точек $P^j, j = 1,\dots, J$ ($J \geqslant 3$) найдутся три, не лежащие на одной прямой; 3) x^0 – внутренняя точка $\mathbf{P}$. Тогда предельная алгебраическая задача имеет единственное решение.

Доказательство. Определим непрерывный нелинейный оператор $N{:}\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ по формуле $N(a) = XM[X^t a]_+$, где X – $3{\times}J$-матрица со столбцами $(1, x_1^j, x_2^j)^t$, M – диагональная $J{\times}J$-матрица $\operatorname{diag}\{\kappa_1,\dots,\kappa_J\}$ и $[q]_+ = ((q_1)_+,\dots,(q_J)_+)^t$ для вектора q из $\mathbf{R}^J$. Задача (2.8), (3.4) эквивалентна решению операторного уравнения

$$N(\mathbf{a}) = h \equiv (-F_3(1), -x_1^\circ F_3(1), -x_2^\circ F_3(1))^t \tag{4.1}$$

Обозначим, $\langle\ ,\ \rangle$ скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$. Предельную алгебраическую задачу можно свести также к задаче о минимуме на $\mathbf{R}^3$ функционала

$$\Phi(\mathbf{a};h) = \tfrac{1}{2}\langle N(\mathbf{a}),\mathbf{a}\rangle - \langle h,\mathbf{a}\rangle$$

Для любого ненулевсго $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ точка $e_a = \|\mathbf{a}\|^{-1}\mathbf{a}$ попадает на единичную сферу S и справедливо представление

$$\Phi(\mathbf{a};h) = \tfrac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2\langle XM[X^t e_a]_+, e_a\rangle - \|\mathbf{a}\|\langle h, e_a\rangle$$

Так как функция $\mathbf{R}^1 \ni t \mapsto (t)_+ t$ выпукла и M – диагональная матрица, то функционал Φ выпуклый на $\mathbf{R}^3$, т.е.

$$\Phi(\lambda\mathbf{a}^1 + (1-\lambda)\mathbf{a}^2 \leqslant \lambda\Phi(\mathbf{a}^1) + (1-\lambda)\Phi(\mathbf{a}^2) \forall \mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2 \in \mathbf{R}^3, \forall\lambda \in (0,1)$$

Кроме того, выполняется соотношение $\langle XM[X^t e]_+, e\rangle \geqslant 0$.

Обозначим через K_N ядро сужения оператора N на S,

$$K_N = \{e \in S{:}\, N(e) = 0\} = \{e \in S{:}\langle XM[X^t e]_+, e\rangle = 0\}$$

Включение $e \in K_N$ эквивалентно системе неравенств

$$e_1 + e_2 x_1^j + e_3 x_2^j \leqslant 0, \quad j = 1,\dots,J \tag{4.2}$$

Следовательно, K_N – замкнутое подмножество S.

Условия (4.2) обеспечивают попадание всех точек P^j в одну замкнутую полуплоскость $e_1 + e_2 x_1 + e_3 x_2 \leqslant 0$, которой принадлежит и многоугольник $\mathbf{P}$. Согласно первому предположению выпуклая оболочка точек P^j не вырождается в отрезок, и следовательно, внутренность **P** целиком лежит в открытой полуплоскости $e_1+e_2x_1+e_3x_2<0$. Поэтому, если $F_3(1)<0$ (см. условия (1.6)), то $-\langle h,e\rangle>0$ для любого $e\in K_N$. В силу замкнутости K_N найдется такое открытое множество $Q\subset S$, что $Q\supset K_N$ и для $\forall e\in\overline{Q}$ верно неравенство $-\langle h,e\rangle\geqslant\beta_1>0$. Положим

$$\max_{e\in S}\langle h,e\rangle=\beta_2>0,\quad \min_{e\in S\setminus Q}\langle N(e),e\rangle=\beta_3>0$$

Справедливы оценки

$$\Phi(\mathbf{a};h)\geqslant\|\mathbf{a}\|\beta_1,\quad \forall\|\mathbf{a}\|^{-1}\mathbf{a}\in\overline{Q}$$

$$\Phi(\mathbf{a};h)\geqslant{}^1\!/_2\|\mathbf{a}\|^2\beta_3-\|\mathbf{a}\|\beta_2,\ \forall\|\mathbf{a}\|^{-1}\mathbf{a}\in S\setminus\overline{Q}$$

По каждому $T>0$ найдется такое $t>0$ (зависящее только от T), что для любых **a** и $\mathbf{R}^3$, подчиненных условию $\|\mathbf{a}\|\geqslant t$, имеет место неравенство $\Phi(\mathbf{a};h)\geqslant T$. Действительно, достаточно положить

$$t=\max\{\beta_1^{-1}T,\beta_3^{-1}(\beta_2+(\beta_2^2+2\beta_3T)^{1/2})\}$$

Таким образом, $\lim\Phi(\mathbf{a})=\infty$ при $\|\mathbf{a}\|\to\infty$ и согласно известной теореме выпуклого анализа (см., например [2], § 2.2) решения задачи (4.1) существуют и образуют замкнутое выпуклое подмножество $\mathbf{R}^3$.

Единственность решения доказывается опять-таки применением упомянутой выше теоремы, так как на множестве решений функционал строго выпуклый в силу диагональности M и неравенства

$$(\lambda t+(1-\lambda)s)_+(\lambda t+(1-\lambda)s)<\lambda t_+t+(1-\lambda)s_+s$$

$$\forall s,t\in\mathbf{R},s\neq t,s>0;\quad \lambda\in(0,1)$$

5. О свойствах решений предельной алгебраической задачи. Допустим, что столбец $\mathbf{a}^0\in\mathbf{R}^3$ – решение уравнения (4.1). Перенумеровав по необходимости точки P^j, можем считать, что положительные компоненты вектора $M[X^t\mathbf{a}^\circ]_+$ из $\mathbf{R}^J$ определяют набор опорных реакций $R_1,\ldots,R_{J^\circ}$ $(J^\circ\leqslant J)$. Следующее очевидное утверждение содержит необходимое условие существования решения уравнения (4.1).

Предложение 2. Если решение задачи (2.8), (3.4) существует, то $x^\circ=(x_1^\circ,x_2^\circ)$ принадлежит выпуклой оболочке $\mathbf{P}^\circ$ точек $\mathbf{P}^1,\ldots,\mathbf{P}^{J^\circ}$.

Следствие. Если x° не принадлежит **P**, то решений предельной алгебраической задачи не существует.

Количество опор и их взаимное расположение, разумеется, влияют на свойства предельной задачи, причем удобной характеристикой оказывается ранг матрицы X. Одна опора соответствует равенству $\operatorname{rank}X=1$. Для нескольких точек, лежащих на одной прямой, $\operatorname{rank}X=2$. Если же $\operatorname{rank}X=3$, то, во-первых, $J\geqslant3$ и, во-вторых, найдутся по крайней мере три точки, не попадающие на одну прямую.

В случаях $\operatorname{rank}X=1,2$, $x^\circ\in\mathbf{P}$ или $\operatorname{rank}X=3$, $x^\circ\in\partial\mathbf{P}$ уравнение (4.1) имеет бесконечно много решений. Заметим, что при условии $x^\circ\in\mathbf{P}$ точка x° является внутренней точкой $\Gamma(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon>0$, и решение исходной задачи (1.3)–(1.5) единственно. Данное противоречие объясняется тем, что в описанной ситуации использованная ранее конструкция асимптотики нуждается в исправлении. При этом уместно охарактеризовать положение равновесия тела Ω на опорах $\Gamma(\varepsilon)$ как неустойчивое в асимптотическом смысле.

Укажем некоторые свойства решений предельного алгебраического неравенства в нетривиальном случае.

Предложение 3. Пусть $\operatorname{rank} X = 3$ и x° – внутренняя точка **P**. Если $\mathbf{a}^0$ – решение задачи (4.1), то, во-первых, $J^\circ \geqslant 3$, во-вторых, точки $\mathbf{P}^1,\ldots,\mathbf{P}^{J^\circ}$ расположены в открытой полуплоскости $\mathbf{a}_1^0+\mathbf{a}_2^0x_1+\mathbf{a}_3^0x_2>0$ и, в-третьих, x° принадлежит внутренности опорного многоугольника $\mathbf{P}^\circ$.

Для доказательства сформулированных утверждений (см. также [8], п. 112) удобно снабдить точки P^j положительными весами κ_j и ввести системы координат, связанные с главными осями инерции систем материальных точек $P^1,\ldots,P^j$ или $P^1,\ldots,P^{J^\circ}$. Данная механическая аналогия подсказывает ответ на вопрос, в каких случаях тело заведомо будет опираться на все опоры.

Предложение 4. Если в условиях предложения 3 точка x° содержится в достаточно малой окрестности центра масс системы материальных точек $P^1,\ldots,P^j$, то $J^\circ = J$.

Подчеркнем, что попутно установлена необходимость условий, сформулированных в предложении 1.

6. Обоснование асимптотики. Предположим дополнительно, что решение предельной алгебраической задачи обладает следующим свойством:

$$a_3^0+2^{-1/2}(a_4^0x_2^j-a_5^0x_1^j)\neq 0,\quad j=1,\ldots,J \tag{6.1}$$

Таким образом, исключается случай касания телом какой-либо опоры без положительной реакции. Пусть J° – число из предыдущего раздела. Можно убедиться, что в исходной задаче Синьорини (1.4)–(1.6) реализуются краевые условия

$$\begin{gathered} u_3(\varepsilon,\mathbf{x})=0,\quad \mathbf{x}\in\omega_j(\varepsilon),\ j=1,\ldots,J^\circ \\ \sigma_{33}(\mathbf{u};\varepsilon,\mathbf{x})=0,\ \mathbf{x}\in\omega_j(\varepsilon),\ j=1+J^\circ,\ldots,J \end{gathered} \tag{6.2}$$

Наметим доказательство этого факта. В качестве асимптотического приближения к решению $\mathbf{u}(\varepsilon,\mathbf{x})$ возьмем вектор

$$\mathbf{U}(\varepsilon,\mathbf{x})=\chi_0(\varepsilon,\mathbf{x})[\varepsilon^{-1}d(\mathbf{x})a^0+\mathbf{v}^1(\mathbf{x})]+\varepsilon^{-1}\sum_{j=1}^{J^\circ}\chi_j(\mathbf{x})\mathbf{w}^{0j}(\xi^j)-$$

$$\varepsilon^{-1}\chi_0(\varepsilon,\mathbf{x})\sum_{j=1}^{J^\circ}\chi_j(\mathbf{x})[d(P^j)a^0+R_j\mathbf{T}(\xi^j)] \tag{6.3}$$

Здесь $a^0,\mathbf{v}^1,\mathbf{w}^{0j},R_j$ – определенные ранее величины, а χ_j,χ_j' – срезающие функции из $C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, причем $\chi_j'=1$ вблизи множества ω_j, $\chi_j=1$ в окрестности точки P^j, $\chi_j=0$ вблизи $\partial\Omega\setminus\Sigma$ и $\chi_j=0$ около $P^q(q\neq j)$

$$\chi_0(\varepsilon,\mathbf{x})=1-\chi'_1(\varepsilon^{-1}(\mathbf{x}-P^1))-\ldots-\chi'_{J^\circ}(\varepsilon^{-1}(\mathbf{x}-P^{J^\circ})). \tag{6.4}$$

Поясним конструкцию (6.3). Первое слагаемое справа представляет собой главные члены внешнего разложения; при помощи срезки (6.4) они аннулированы вне зоны действия этого разложения (в непосредственной близости от P^j, $j=1,\ldots,J^\circ$). Второе слагаемое содержит члены внутренних разложений; благодаря срезкам χ_j пограничные слои локализованы вблизи P^j. Наконец, члены асимптотических представлений (2.11) и (2.12) одинаковы (они подверглись сращиванию) и учтены в (6.3) дважды: и в первом, и во втором выражении справа. Такое дублирование устранено вычитаемым, третьим слагаемым.

Подставим (6.3) в (линейную!)задачу (1.4), (1.5), (6.2); точное решение последней обозначим $\mathbf{u}^l$. В соответствии с проведенными построениями невязки в равенствах (1.4) оказываются малыми, а краевые условия (1.5), (6.2) удовлетворяются полностью.

При помощи результатов [9, 10] получается оценка разности $\mathbf{r} = \mathbf{u}^l - \mathbf{U}$ в некотором весовом пространстве. Из такой оценки вытекает, в частности, малость следов r_3 на $\omega_j(\varepsilon), j = 1 + J^\circ, \ldots, J$, откуда в силу (6.1) следуют неравенства $u_3^l = U_3 - r_3 > 0$ на $\omega_j(\varepsilon)$, $j = 1 + J^\circ, \ldots, J$, при достаточно малом ε. Упомянутая оценка не может гарантировать малость следов $\sigma_{33}(\mathbf{r})$ из-за особенностей напряжений на ребрах $\partial\omega_j(\varepsilon)$. Однако благодаря формулам (6.1) и (3.2) (напоминаем; что $K_j > 0$) верны соотношения $\sigma_{33}(\mathbf{U}) + \sigma_{33}(\mathbf{r}) < 0$ на $\omega_j(\varepsilon)$, $j = 1 + J^\circ$. Итак, для $\mathbf{u}^l$ выполняются неравенства из (1.6), а значит, $\mathbf{u}^l$ – решение задачи Синьорини (1.4)–(1.6). Наконец, использовавшаяся оценка обосновывает асимптотику $\mathbf{u} \sim \mathbf{U}$, а также оправдывает внешнее (2.1) и внутреннее (2.2) разложения решения $\mathbf{u}(\varepsilon, \mathbf{x})$.

Отметим, что произвол (элемент линеала $\mathbf{R}''$) в выборе решений всех возникающих задач одинаков и потому не принимался во внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
2. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. М.: Мир, 1989. 492 с.
3. *Ван Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
4. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
5. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
6. *Лурье А.И.* Некоторые контактные задачи теории упругости // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 3. С. 383–408.
7. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
8. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. 515 с.
9. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области // Проблемы мат. анализа, Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. Вып. 8. С. 72–153.
10. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Bd. 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1990. 430 S.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
17.V.1993