

УДК 539.3

© 1994 г. А.Г. Колпаков

ЖЕСТКОСТИ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ БАЛОК

В продолжение анализа [1, 2] задачи теории упругости в областях малого диаметра рассматриваются вытекающие из асимптотической теории методы расчета жесткостей цилиндрических балок, проводится их сравнение с классическими результатами [3, 4]. Используется метод двухмасштабного разложения [5–8] в предложенном в [1] виде (методы усреднения одномерных задач в рассматриваемом случае не применимы [9]). Показано, что при постоянном коэффициенте Пуассона ν жесткости балки вычисляются по формулам, следующим из классической теории плоских сечений, хотя совпадения локальных деформаций в общем случае нет. При $\nu \neq \text{const}$ жесткости отличаются от классических. Для этого случая получены двусторонние оценки. Классические жесткости являются точной нижней оценкой.

В связи с рассматриваемыми вопросами отметим работу [10].

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругое тело, занимающее цилиндрическую область $[-1, 1] \times \varepsilon S = Q_\varepsilon$ характерного диаметра $\varepsilon \ll 1$. Поперечное сечение балки S представляет собой связную область с гладкой границей. Локальные упругие постоянные a_{ijkl} полагаются функциями аргументов $x_2/\varepsilon, x_3/\varepsilon$. Показано [1], что при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение задачи теории упругости в области Q_ε сходится к решению задачи теории балок с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} N_{11} &= \varepsilon^2 A_1^0 e_{11} - \varepsilon^3 A_{1\alpha}^1 \rho_\alpha + \varepsilon^3 B_{11}^0 \varphi' \\ M_{\beta 1} &= \varepsilon^3 A_{1\beta}^1 e_{11} - \varepsilon^4 A_{\alpha\beta 1}^2 \rho_\alpha + \varepsilon^4 B_{\beta 1}^1 \varphi' \\ M &= \varepsilon^3 A e_{11} - \varepsilon^4 A_\alpha^2 \rho_\alpha + \varepsilon^4 B^1 \varphi' \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь e_{11} – осевая деформация ($e_{11} = \dot{V}_1, V_1$ – осевое перемещение), ρ_α – кривизны ($\rho_\alpha = u_\alpha^{(0)''}, u_\alpha^{(0)}$ – прогибы, $\alpha = 2, 3$), φ – угол закручивания (φ' – кручение), N_{11} – осевое усилие, $M_{\alpha 1}$ – изгибные моменты, M – крутящий момент, штрих означает производную по x_1 .

Рассмотрим ячеечную задачу (ЯЗ) теории балок [1], имеющую вид

$$\begin{aligned} (a_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\gamma,\delta}^{AB} + (-1)^{A-1} a_{\alpha\beta 11} y_B^{A-1})_{,\beta} &= 0 \text{ в } S \\ (a_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\gamma,\delta}^{AB} + (-1)^{A-1} a_{\alpha\beta 11} y_B^{A-1}) n_\beta &= 0 \text{ на } \partial S \end{aligned} \quad (1.2)$$

Аргументами в (1.2) служат y_2, y_3 ($y = x/\varepsilon$ – безразмерные переменные), $\beta = \partial/\partial y_\beta$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 2, 3$; $A = 1, 2$; $B = 2, 3$; $n = (n_2, n_3)$ – нормаль к ∂S .

Жесткости балки подсчитываются по формулам [1]:

$$A_1^0 = \langle a_{1111} + a_{11\gamma\delta} X_{\gamma,\delta}^{11} \rangle \quad (1.3)$$

$$A_{1\alpha}^1 = \langle -a_{1111} y_\alpha + a_{11\gamma\delta} X_{\gamma,\delta}^{2\alpha} \rangle \quad (1.4)$$

$${}^1A_{1\beta} = \langle y_\beta (a_{1111} + a_{11\gamma\delta} X_{\gamma,\delta}^{11}) \rangle \quad (1.5)$$

$$A_{\alpha\beta i}^2 = -\langle y_\beta (a_{i111} y_\alpha + a_{i1\gamma\delta} X_{\gamma,\delta}^{2\alpha}) \rangle \quad (1.6)$$

$$B_{11}^0 = \langle a_{111\alpha} X_{1,\alpha}^3 \rangle, \quad B_{\alpha\beta}^1 = \langle y_\beta a_{\alpha 1\gamma\delta} X_{\gamma,\delta}^3 \rangle \quad (1.7)$$

$${}^1A = {}^1A_{23} - {}^1A_{32}, \quad A_\alpha^2 = A_{\alpha 23}^2 - A_{\alpha 32}^2, \quad B = B_{32}^1 - B_{23}^1 \quad (1.8)$$

$$\langle \cdot \rangle = \int_S dy_2 dy_3$$

Здесь X_1^3 – решение ЯЗ, связанной с кручением балки [1]

$$(a_{1\delta 1\gamma} X_{1,\gamma}^3 + a_{1\delta\beta 1} s_\beta y_{\tilde{\beta}}),_{\delta} = 0 \quad \text{в } S \quad (1.9)$$

$$(a_{1\delta 1\gamma} X_{1,\gamma}^3 + a_{1\delta\beta 1} s_\beta y_{\tilde{\beta}}) n_\delta = 0 \quad \text{на } \partial S$$

где $\tilde{\beta} = 3$ при $\beta = 2$, $\tilde{\beta} = 2$ при $\beta = 3$; $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = -1$.

Перемещения балки, рассматриваемой как трехмерное тело, имеют вид [1]

$$\mathbf{u}^{(0)}(x_1) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(x_1, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)}(x_1, \mathbf{y}) + \dots \quad (1.10)$$

$$(\mathbf{y} = \mathbf{x} / \varepsilon, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(x_1), \quad \varphi = \varphi(x_1), \quad u_\alpha^{(0)} = u_\alpha^{(0)}(x_1), \quad u_1^{(0)} = 0) \quad (1.11)$$

$$u_1^{(1)} = -y_\alpha u_\alpha^{(0)'} + V_1, \quad u_\beta^{(1)} = S_\beta y_{\tilde{\beta}} \varphi + V_\beta \quad (1.12)$$

$$u_1^{(2)} = X_1^{11}(\mathbf{y}) V_1' - y_\alpha V_\alpha' + X_1^{2\alpha}(\mathbf{y}) u_\alpha^{(0)''} + X_1^3(\mathbf{y}) \varphi' \\ u_\beta^{(2)} = X_\beta^{11}(\mathbf{y}) V_1' + X_\beta^{2\alpha}(\mathbf{y}) u_\alpha^{(0)''} + X_\beta^3(\mathbf{y}) \varphi' \quad (1.13)$$

$$\alpha, \beta = 2, 3$$

Формулы (1.11)–(1.13) определяют локальные деформации балки как трехмерного тела. Члены порядка ε в (1.10) соответствуют гипотезе плоских сечений [3], но жесткости определяются также членами содержащими решение ЯЗ, т.е. членами порядка ε^2 .

Формулы (1.11)–(1.13) определяют локальные деформации балки.

Далее рассматривается случай, когда материал балки изотропный:

$$a_{ijkl} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.14)$$

(δ_{ij} – дельта Кронеккера).

Как будет видно, в рассматриваемой задаче классификация происходит по условию: $\nu = \text{const}$ или $\nu \neq \text{const}$.

2. Случай $\nu = \text{const}$.

2.1. Жесткость балки на растяжение. Решение ЯЗ (1.2) при $A = 1$ есть $X_\beta^{11} = -\nu y_\beta$. Его подстановка в (1.3) дает формулу

$$A_1^0 = \langle E \rangle \quad (2.1)$$

совпадающую с получаемой на основании гипотезы плоских сечений.

2.2. Жесткости балки на изгиб. Решение задачи (1.2) при $A = 2$ имеет вид (приводится решение при $B = 2$, соответствующее изгибу в плоскости Ox_2x_3)

$$X_2^{22} = \nu \frac{y_2^2}{2} - \nu \frac{y_3^2}{2}, \quad X_3^{22} = \nu y_2 y_3 \quad (2.2)$$

Как можно проверить, для X_2^{22}, X_3^{22} , даваемых (2.2),

$$a_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\gamma,\delta}^{22} - a_{\alpha\beta 11} = 0$$

для любых E . Решение ЯЗ (1.2) при $B = 3$ получается из (2.2) заменой индексов $2 \rightleftharpoons 3$.

Формула (1.6) после подстановки в нее (2.2) дает классическую формулу

$$A_{\alpha\beta 1}^2 = \langle E y_{\beta} y_{\alpha} \rangle \quad (2.3)$$

В то же время локальные деформации балки в поперечном сечении не совпадают с даваемыми гипотезой плоских сечений.

Отметим, что поскольку формула (2.3) справедлива для произвольного сечения балки S , то вытягивание области S вдоль одной из ее осей не даст формул для изгибных жесткостей пластины. Это свидетельствует о том, что разложения из [1] для балок и из [11] для пластин, при всем их сходстве, имеют принципиальное отличие.

3. Случай $\nu \neq \text{const}$. Здесь будет показано, что в общем случае классические формулы не имеют места в асимптотической теории. В этом случае выводы асимптотической теории согласуются с выводами трехмерной теории упругости [4]. Будет рассмотрен пример, когда E постоянно, а ν мало отличен от постоянного и для исследования задачи можно применить классический метод малого параметра [12].

Введем функцию напряжений F^A [13] формулами

$$s_{22} = F_{,33}^A, \quad s_{33} = F_{,22}^A, \quad s_{23} = s_{32} = -F_{,23}^A \quad (3.1)$$

$$s_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\gamma,\delta}^{AB} + (-1)^{A-1} a_{\alpha\beta 11} y_B^{A-1} \quad (3.2)$$

В этом случае уравнения равновесия из ЯЗ (1.2) удовлетворяются тождественно, а граничные условия из (1.2) дают

$$F^A = \partial F^A / \partial n = 0 \quad \text{на} \quad \partial S \quad (3.3)$$

При учете закона Гука (1.14) получаем из (3.2)

$$\begin{aligned} e_{22} &= \frac{1-\nu^2}{E} F_{,33}^A - \frac{\nu(1-\nu^2)}{E} F_{,22}^A + \nu y_B^{A-1} \\ e_{33} &= -\frac{\nu(1-\nu^2)}{E} F_{,33}^A + \frac{1-\nu^2}{E} F_{,22}^A + \nu y_B^{A-1} \\ e_{23} &= e_{32} = -\frac{1+\nu}{E} F_{,23}^A \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $e_{\alpha\beta} = (X_{\alpha,\beta}^{AB} + X_{\beta,\alpha}^{AB})/2$ – деформации, для которых должно быть выполнено условие совместности [13]

$$e_{22,33} + e_{33,22} - 2e_{23,23} = 0$$

принимая при учете (3.4) вид ($E = \text{const}$, Δ – оператор Лапласа)

$$\begin{aligned} L(\nu)F^A &\equiv [(1-\nu^2)F_{,33}^A - \nu(1-\nu^2)F_{,22}^A]_{,33} + [(1-\nu^2)F_{,22}^A - \nu(1-\nu^2)F_{,33}^A]_{,22} + \\ &+ 2[(1+\nu)F_{,23}^A]_{,23} + E^{-1}\Delta(\nu y_B^{A-1}) = 0 \quad \text{в} \quad S \end{aligned} \quad (3.5)$$

Пусть коэффициент Пуассона имеет вид $\nu = \nu_0 + \delta\nu^{(1)}$, $\nu_0 = \text{const}$, $\delta \ll 1$, $\|\nu^{(1)}\|_{C^1(S)} \leq 1$.

При $\delta = 0$ решение задачи (3.5), (3.3) нулевое. Возмущенное решение задачи (3.5), (3.3) имеет вид

$$F^A = 0 + \delta F^{(1)A} + \delta^2 F^{(2)A} + \dots \quad (3.6)$$

Для $F^{(1)A}$, подставив (3.6) в (3.5), (3.3) и приравняв члены при δ , получаем задачу

$$L(\nu_0)F^{(1)A} = -\frac{1}{E}\Delta(\nu^{(1)}y_B^{A-1}) \text{ в } S$$

$$F^{(1)A} = \partial F^{(1)A} / \partial n = 0 \text{ на } \partial S \quad (3.7)$$

Для жесткостей из (1.3), (1.6), (1.14) и формул (3.4) следует, что

$$A_1^0 = \langle \xi - \eta \Delta F^{(1)} \rangle, \quad A_{\alpha\beta}^2 = \langle y_\beta (\xi y_\alpha - \eta \Delta F^{(2)}) \rangle$$

$$\xi = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \eta = \frac{E\nu(1-\nu)^2}{1-2\nu} \quad (3.8)$$

Возмущенные значения величин (3.8) при учете формулы

$$\frac{\nu(1-\nu)^2}{1-2\nu} = \frac{\nu_0(1-\nu_0)^2}{1-2\nu_0} + \left[1 + \frac{3\nu_0^2 - 4\nu_0^3}{(1-2\nu_0)^2} \right] \delta\nu^{(1)} + \dots = a + b\delta\nu^{(1)} + \dots$$

даются выражениями

$$E \text{mes } S - Ea\delta \langle \Delta F^{(1)1} \rangle - \delta b^2 \langle \nu^{(1)} \Delta F^{(1)1} \rangle - \delta^2 a \langle \Delta F^{(1)2} \rangle + \dots$$

$$E \langle y_\alpha y_\beta \rangle - Ea\delta \langle \Delta F^{(1)2} y_\beta \rangle - \delta^2 b \langle \nu^{(1)} \Delta F^{(1)2} y_\beta \rangle - \delta^2 a \langle \Delta F^{(2)2} y_\beta \rangle + \dots \quad (3.9)$$

Здесь сохранены члены порядка δ^2 , см (3.6). Отметим, что в силу (3.3), (3.6) $F^{(i)A} = \partial F^{(i)A} / \partial n = 0$ на ∂S , и интегрирование по частям дает

$$\langle \Delta F^{(i)A} y_\beta^{A-1} \rangle = \int_S F^{(i)A} \Delta y_\beta^{A-1} dy_2 dy_3 +$$

$$+ \int \frac{\partial F^{(i)A}}{\partial s} y_\beta^{A-1} dy_2 dy_3 - \int \frac{\partial F^{(i)A}}{\partial n} \frac{\partial y_\beta^{A-1}}{\partial n} dy_2 dy_3 = 0$$

Таким образом, возмущение жесткостей, отличающее их от даваемых классическими формулами, равно

$$\delta^2 b \langle \nu^{(1)} \Delta F^{(1)A} y_\beta^{A-1} \rangle \quad (3.10)$$

Умножив (3.7) на $F^{(1)C}$ и проинтегрировав результат по частям с учетом краевых условий для $F^{(1)A}$, при $\nu_0 = 0$ получаем, что выражение (3.10) равно

$$\delta^2 \langle \Delta F^{(1)\alpha} \Delta F^{(1)\beta} \rangle, \quad (\alpha, \beta) = (0, 0), (1, 1)$$

Последнее выражение при $\alpha = \beta$ может быть отлично от нуля.

4. Кручение. При $E = \text{const}$, $\nu = \text{const}$ задача совпадает с классической, что можно проверить пользуясь ЯЗ (1.9) и формулой (1.7).

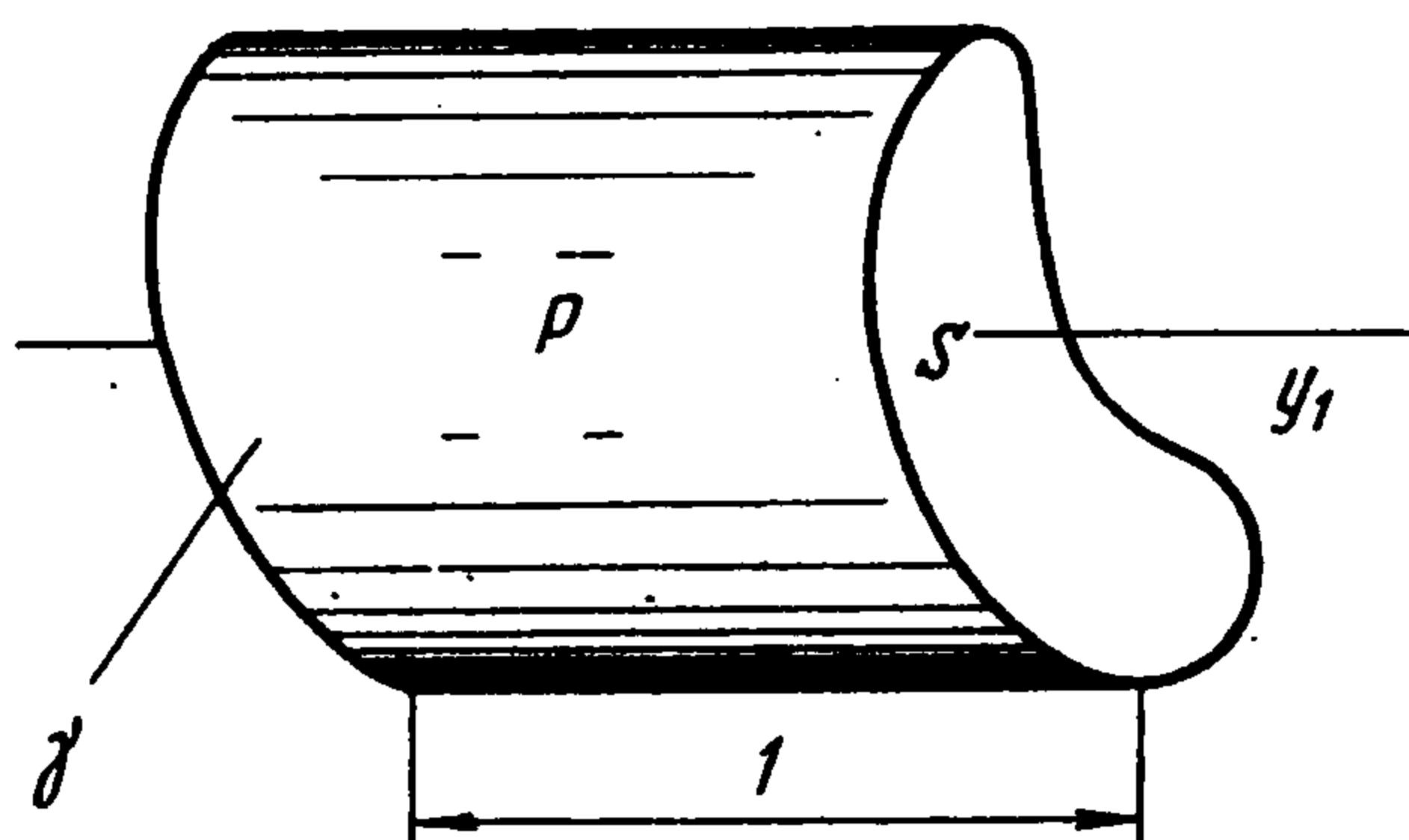
5. Оценка жесткостей неоднородных цилиндрических балок.

5.1. Жесткости на изгиб. Как будет видно из дальнейшего, функционалы для вычисления жесткостей балки естественно вычисляются при рассмотрении в качестве

исходной трехмерной ЯЗ. Приведем ЯЗ, соответствующую изгибным жесткостям, см. [1]:

$$\begin{aligned} (a_{ijkl}X_{k,l}^\alpha - a_{ij11}y_\alpha)_{,j} &= 0 \text{ в } P \\ (a_{ijkl}X_{k,l}^\alpha - a_{ij11}y_\alpha)n_j &= 0 \text{ на } \gamma \\ ,j &= \partial / \partial y_j; \quad i, j, k, l = 1, 2, 3; \quad \alpha = 2, 3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Функция $X^\alpha(y)$ периодична по y_1 с периодом 1, $P = [0, 1] \times S$ – трехмерный элемент балки (фигура).



Жесткости на изгиб даются формулой

$$A_{\alpha\beta 1}^2 = \langle y_\beta (a_{1111}y_\alpha - a_{11kl}X_{k,l}^\alpha) \rangle \quad (5.2)$$

Замечание. Задача (3.1) имеет решение вида [1]

$$X_1^\alpha = 0, \quad X_\beta^\alpha = X_\beta^\alpha(y_2, y_3) \quad (5.3)$$

Подстановка (5.3) в (5.1), (5.2) дает задачу (1.2) и формулу (1.6).

Преобразование формулы (5.2) к квадратичным формам. Приведение исходной задачи к задачам о экстремумах является основой для получения двусторонних оценок [14, 15]. Получим формулы, позволяющие вычислять изгибные жесткости $A_{\alpha\beta 1}^2$ как экстремальные значения некоторых функционалов.

Умножим уравнение (5.1) на $X_{i,j}^\beta$, просуммируем и проинтегрируем по частям на P при учете краевых условий из (5.1). Получим

$$\begin{aligned} \langle (a_{ijkl}X_{k,l}^\alpha - a_{ij11}y_\alpha \delta_{kl} \delta_{11}) X_{i,j}^\beta \rangle_P &= 0 \\ \langle \cdot \rangle_P &= \int_P dy_1 dy_2 dy_3 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Формула (5.2) приводится к виду

$$A_{\alpha\beta 1}^2 = \langle y_\beta (a_{ijkl} \delta_{kl} \delta_{11} y_\alpha - a_{ijkl} X_{k,l}^\alpha) \delta_{i1} \delta_{j1} \rangle_P \quad (5.5)$$

Вычитая (5.5) из (5.4), получаем

$$A_{\alpha\beta 1}^2 = \langle a_{ijkl} (X_{k,l}^\alpha - \delta_{kl} \delta_{11} y_\alpha) (X_{i,j}^\beta - \delta_{i1} \delta_{j1} y_\beta) \rangle_P \quad (5.6)$$

Связь (5.6) с функционалами Лагранжа и Кастильяно задачи (5.1). Рассмотрим функционалы Лагранжа $J_u(X)$ и Кастильяно $J_\sigma(\sigma)$ для ЯЗ (5.1) [11, 13]:

$$\begin{aligned} J_u(X) &= -\langle a_{ij11} y_\alpha X_{ij} \rangle_P - \frac{1}{2} \langle a_{ijkl} X_{i,j} X_{k,l} \rangle_P \\ J_\sigma(\sigma) &= \frac{1}{2} \langle a_{ijkl}^{-1} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \rangle_P \end{aligned} \quad (5.7)$$

где возможные перемещения [13] X периодичны по y_1 с периодом 1, а допустимые напряжения [13] $\{\sigma_{ij}\}$ принадлежат множеству $\Sigma = \{\sigma_{ij}: (\sigma_{ij} - a_{ij11}y_\alpha)_{,j} = 0 \text{ в } P, (\sigma_{ij} - a_{ij11}y_\alpha)n_j = 0 \text{ на } \gamma, \sigma_{i1} \text{ периодичны по } y_1 \text{ с периодом } 1\}$.

Здесь $\{a_{ijkl}^{-1}\}$ – тензор, обратный к $\{a_{ijkl}\}$.

Как известно [13, 14]

$$\max_X J_u(X) = \min_{\sigma_{ij} \in \Sigma} J_\sigma(\sigma) \quad (5.8)$$

и уравнением Эйлера для $J_u(X)$ является задача (5.1). В силу этого из (5.6)–(5.8) получаем после преобразования при $\alpha = \beta$

$$\max_X J_u(X) = -\frac{1}{2}(A_{\alpha\alpha 1}^2 - \langle a_{1111}y_\alpha^2 \rangle_P) = \min_{\sigma_{ij} \in \Sigma} J_\sigma(\sigma)$$

и после алгебраических преобразований имеем двустороннюю оценку

$$\langle a_{ijkl}(X_{k,l} - \delta_{kl}\delta_{11}y_\alpha)(X_{i,j} - \delta_{ij}\delta_{11}y_\alpha) \rangle_P \geq A_{\alpha\alpha 1}^2 \geq \langle a_{1111}y_\alpha^2 \rangle_P - \langle a_{ijkl}^{-1}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \rangle_P \quad (5.9)$$

для любой функции X , периодичной по y_1 с периодом 1 и любой функции $\{\sigma_{ij}\} \in \Sigma$.

Оценка (5.9) для цилиндрических балок. Для рассматриваемого случая множество допустимых перемещений X сужается до (5.3), а соответствующее им множество напряжений описывается условиями (именно здесь используется общая трехмерная ЯЗ)

$$(\sigma_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta 11}y_A)_{,\beta} = 0 \text{ в } S$$

$$(\sigma_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta 11}y_A)n_\beta = 0 \text{ на } \partial S \quad (5.10)$$

$\sigma_{11} = \sigma_{11}(y_2, y_3)$ – любая достаточно гладкая функция, $\sigma_{1\alpha} = 0$, $\alpha = 2, 3$.

Таким образом, для цилиндрических балок область минимизации/максимизации может быть сужена до (5.3), (5.10). Рассмотрение неравенства (5.9) на множествах (5.3), (5.10) дает

$$\langle a_{1111}y_A^2 \rangle_P + \langle a_{\alpha\beta\gamma\delta}X_{\alpha,\beta}X_{\gamma,\delta} \rangle_P \geq A_{AA1}^2 \quad (5.11)$$

$$A_{AA1}^2 \geq \langle a_{1111}y_A^2 \rangle_P - \langle a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta} \rangle_P - 2\langle a_{\alpha\beta 11}^{-1}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{11} \rangle_P - \langle a_{1111}\sigma_{11}^2 \rangle_P \quad (5.12)$$

для X , $\{\sigma_{ij}\}$, удовлетворяющих соотношениям (5.3), (5.10) соответственно.

Приняв во внимание, что σ_{11} в (5.10) является произвольной функцией, можно провести независимую максимизацию правой части (5.12) по σ_{11} , для чего достаточно решить задачу

$$2\langle a_{\alpha\beta 11}^{-1}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{11} \rangle_P + \langle a_{1111}\sigma_{11}^2 \rangle_P \rightarrow \min$$

Уравнение Эйлера для нее в силу (5.3) есть (т.к. $\langle \rangle_P = \langle \rangle$)

$$a_{\alpha\beta 11}^{-1}\sigma_{\alpha\beta} + a_{1111}\sigma_{11} = 0$$

В результате $\sigma_{11} = -a_{\alpha\beta 11}^{-1}\sigma_{\alpha\beta}/a_{1111}$ и подстановка этого выражения в (5.12) дает оценку

$$A_{AA1}^2 \geq \langle a_{1111}y_A^2 \rangle - \langle a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta} \rangle + \left\langle \frac{(a_{\alpha\beta 11}^{-1}\sigma_{\alpha\beta})^2}{a_{1111}} \right\rangle \quad (5.13)$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ удовлетворяют (5.10).

Одна оценка жесткостей для цилиндрических областей. Оценки (5.11), (5.13) на множестве допустимых функций (5.3), (5.10) являются точными (т.е. минимум левой части (5.11) и максимум правой части (5.13) совпадают). При произвольном выборе пробных функций получаются двусторонние оценки. Возьмем функцию X в виде $X = 0$. Из (5.11) получаем оценку

$$A_{\alpha\alpha 1}^2 \leq \langle a_{1111} y_\alpha^2 \rangle = \left\langle \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} y_\alpha^2 \right\rangle \quad (5.14)$$

Допустимое поле напряжений выберем в виде

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \nu y_\alpha, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0 \quad (5.15)$$

Подставив (5.15) в (5.13), после алгебраических преобразований (имея в виду, что $a_{\alpha\alpha\gamma\gamma}^{-1} \sigma_{\gamma\gamma} = \frac{1}{E} \delta_{\alpha\alpha} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\gamma\gamma}$ при $\gamma \neq \alpha$) получаем, что

$$-\langle a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta} \rangle + \left\langle \frac{(a_{\alpha\beta 11}^{-1} \sigma_{\alpha\beta})^2}{a_{1111}^{-1}} \right\rangle = - \left\langle \frac{2\nu^2 E y_\alpha^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right\rangle$$

В результате с учетом (1.14) правая часть (5.13) оказывается равной $\langle E y_\alpha^2 \rangle$. Объединив последнюю оценку с (5.14), получаем следующую двустороннюю оценку:

$$\left\langle \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} y_\alpha^2 \right\rangle \geq A_{\alpha\alpha 1}^2 \geq \langle E y_\alpha^2 \rangle \quad (5.16)$$

Как следует из разд. 2 данной работы, равенство в правой части (5.16) достигается, например при $\nu = \text{const}$. Согласно разд. 3 в правой части (5.16) может реализоваться строгое неравенство. При $\nu \neq \text{const}$ имеет место представление вида $A_{\alpha\alpha 1}^2(\nu) = A_{\alpha\alpha 1}^2(\nu_0) + A(\nu - \nu_0, \nu - \nu_0)$. Отсутствие линейного члена в разложении усредненных характеристик типично для процедуры усреднения [16, 17].

Ширина зазора (разность между верхней и нижней оценками) в (5.16) равна $\langle 2\nu^2 E(1+\nu)^{-1}(1-2\nu)^{-1} y_\alpha^2 \rangle$. Для практически используемых материалов $0,2 \leq \nu \leq 0,4$ и ширина зазора оценивается величиной $12 \langle E y_\alpha^2 \rangle$.

5.2. Жесткости на растяжение. ЯЗ, соответствующая растяжению балки имеет вид [1]

$$\begin{aligned} (a_{ijkl} X_{k,l}^1 - a_{ij11})_{,j} &= 0 \quad \text{в } P \\ (a_{ijkl} X_{k,l}^1 - a_{ij11}) n_j &= 0 \quad \text{на } \gamma \end{aligned} \quad (5.17)$$

Функция $X^1(y)$ периодична по y_1 с периодом 1.

Жесткость на растяжение вычисляется по формуле

$$A_1^0 = \langle a_{1111} + a_{11kl} X_{k,l}^1 \rangle_P$$

Для приведенной формулы и ЯЗ (5.17) можно провести аналогичные предыдущим (см. разд. 5.1) рассуждения, дающие следующую двустороннюю оценку жесткости балки на растяжение:

$$\left\langle \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right\rangle \geq A_1^0 \geq \langle E \rangle$$

5.3. Жесткости на кручение. ЯЗ и формула, дающая жесткости на кручение, в асимптотической теории совпадают с классическими. Для классического случая двусторонние оценки были получены ранее, здесь они не обсуждаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колпаков А.Г. К вычислению характеристик тонких упругих стержней периодического строения // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 440–448.
2. Колпаков А.Г. К задаче теории балок с начальными напряжениями // ПМТФ. 1992. № 6. С. 139–144.
3. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1960. Т. 1. 379 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 700 с.
5. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1978. 700 p.
6. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
7. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
8. Аннин Б.Д., Каламкаргов А.Л., Колпаков А.Г., Партон В.З. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1993. 256 с.
9. Колпаков А.Г. Осреднение некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1982. Т. 119. Вып. 4. С. 538–547.
10. Козлова М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости для тонкого неоднородного бруса // Вестник Моск. ун-та. 1989. Сер. 1. № 5. С. 6–10.
11. Caillerie D. Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. in the Appl. Sci. 1984. N 6. P. 159–191.
12. Haug E.J., Choi K.K., Komkov V. Design sensitivity analysis of structural system. Orlando: Academic Press. 1986.
13. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 444 с.
14. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
15. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. О сходимости параболических операторов // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. Т 1. С. 11–58.
16. Kolpakov A.G. On dependence of velocity of elastic waves on initial stresses // Second World Cong. on Computational Mechanics. Stuttgart. Extended Abstracts of Lectures. 1990. P. 453–456.
17. Kolpakov A.G., Kolpakova I.G. Convex combinations problem and its application for problem of design of laminated composite materials // Proc. 13th World Cong. on Computational and Applied Mathematics. Dublin, 1991. V. 4. P. 1955–1956.

Новосибирск

Поступила в редакцию
25.IX.1992