ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 58, Вып. 1 1994

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Исследуются осесимметричные колебания круглой проводящей упругой мембраны, помещенной между заземленными обкладками конденсатора и подверженной воздействию переменного напряжения. В квазистационарном приближении уравнений электродинамики получены приближенные выражения для потенциала электрического поля между обкладками и самосогласованное интегродифференциальное в частных производных уравнение колебаний мембраны. Построено решение соответствующей краевой задачи и проведен качественный анализ параметрически возбуждаемых колебаний. В терминах электромеханических параметров системы получены условия устойчивости и неустойчивости собственных колебаний различных мод.

1. Исходные предположения и постановка задачи. Рассмотрим колебания электромеханической системы, схематически представленной на фигуре (вид спереди или сбоку). Система состоит из плоского конденсатора, расстояние между обкладками 1 (нижняя) и 2 (верхняя) которого равно $2h$. Полагаем, что внешние обкладки заземлены, т.е. их потенциал равен нулю. Между обкладками симметрично помещена упругая мембрана на одинаковом расстоянии h от верхней и нижней обкладок. К мембране приложено электрическое напряжение, потенциал которого относительно обкладок равен $U = U_0 \cos \Omega t$, где U_0, Ω – постоянные, характеризующие амплитуду и частоту соответственно.

Относительно геометрических и электромеханических свойств системы сделаем следующие упрощающие предположения:

1) мембрана и обкладки конденсатора представляют собой круги радиуса a (вид сверху), причем, по предположению, $h \ll a$, что позволяет пренебречь краевыми эффектами [1];

2) они являются идеальными проводниками, а диэлектрическая проницаемость среды в цилиндрических областях D_1 и D_2 принята равной единице (для определенности);

3) выполняется неравенство $a\Omega \ll c$, где c – скорость света, что позволяет пренебречь токами смещения и ограничиться квазистатическим приближением для описания электрического поля [2, 3];

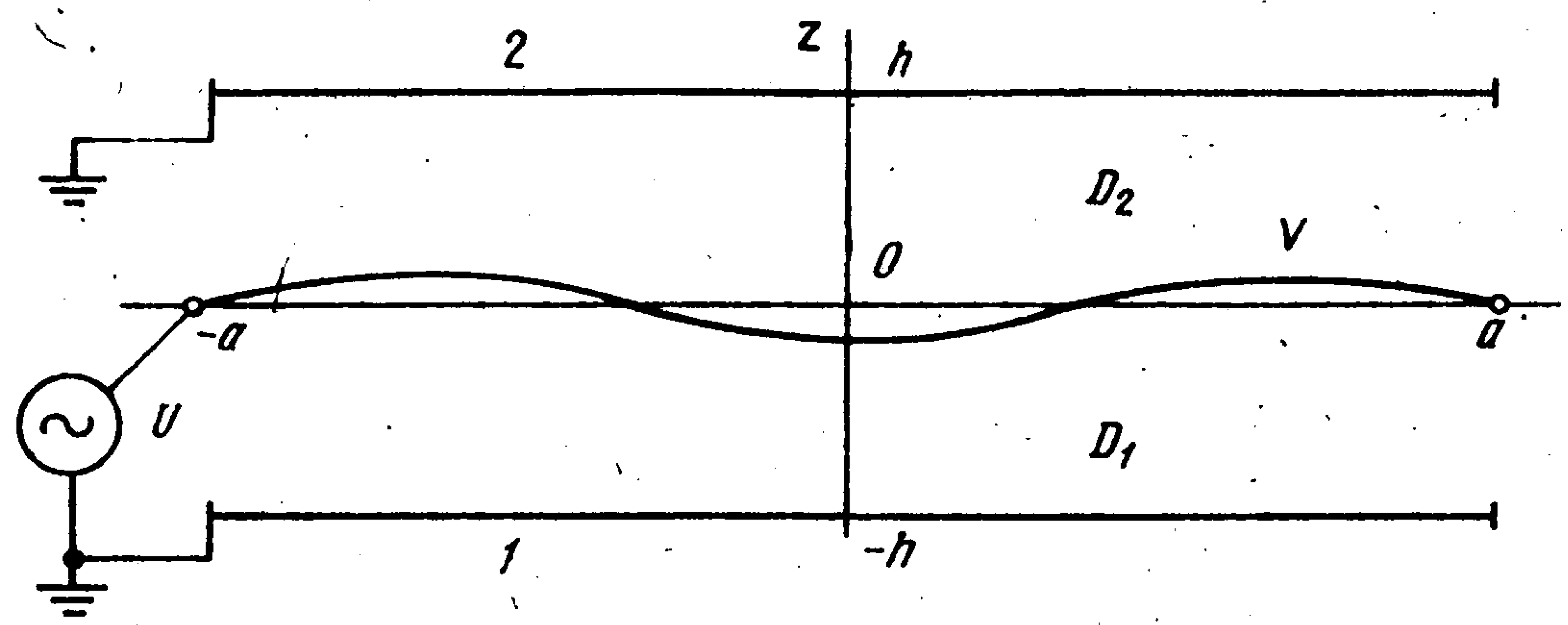
4) мембрана считается закрепленной (защемленной) по контуру и идеальной;

5) смещения мембраны для простоты вычислений считаются осесимметричными, т.е. не зависящими от полярного угла.

Постановка задачи заключается в следующем. В начальный момент времени $t = 0$ точкам мембраны сообщены осесимметричные распределения смещений и скоростей. Требуется найти движение мембраны при $t > 0$ с учетом приложенного напряжения $U(t)$.

Для того чтобы определить движение проводящей электрический ток мембраны, нужно найти распределение действующих на нее сил электрического поля. Эти силы могут быть вычислены [2, 3], если известны потенциалы электрического поля u_1, u_2 в областях D_1, D_2 соответственно. Переходим к их определению в искомом квазистатическом приближении для электрического поля.

2. Решение задачи электростатики и определение сил, действующих на мембрану. В силу предположения 3 электрическое поле описывается уравнениями электростатики. На основе предположения *1* электрическое поле сосредоточено в цилиндрической области $D = D_1 \cup D_2$ между обкладками конденсатора, и поэтому можно пренебречь краевыми эффектами (см. "конденсатор Роговского" [1]).



Введем цилиндрическую систему координат, центр которой совпадает с центром недеформированной мембраны. Ось z направим перпендикулярно ее плоскости (см. фигуру). Как указывалось, обозначим неизвестные искомые потенциалы электрического поля в областях D_1, D_2 через u_1, u_2, где $u_{1,2} = u_{1,2}(r, z, t)$. Искомое симметрическое смещение точек мембраны обозначим $V = V(r, t)$.

Потенциалы $u_{1,2}$ определяются как решения следующих задач Дирихле [2, 3]:

$$\Delta u_1 = 0, \quad (r,z) \in D_1 = \{r,z\colon\ 0 \leqslant r < a,\ V > z > -h\} \qquad (2.1)$$
$$u_1(r,-h,t) = 0, \quad u_1(r,V,t) = U_0 \cos\Omega t$$
$$\Delta u_2 = 0, \quad (r,z) \in D_2 = \{r,z\colon\ 0 \leqslant r < a,\ h > z > V\} \qquad (2.2)$$
$$u_2(r,h,t) = 0, \quad u_2(r,V,t) = U_0 \cos\Omega t$$

Здесь $\Delta = r^{-1}\partial(r\partial/\partial r)/\partial r + \partial^2/\partial z^2$ – двумерный оператор Лапласа в цилиндрических координатах (зависимость от полярного угла не возникает); значение $V = V(r, t)$ в граничных условиях неизвестно; время t входит как параметр. Граничные условия при $r = a$ несущественны в силу предположения *1*. Кроме того, решение $u(r, z, t)$ должно быть ограниченным при $r \to 0$: $|u| \leqslant M < \infty$.

Предполагая смещения мембраны V достаточно малыми, т.е. $V/h \ll 1$ (и тем более $V/a \ll 1$), будем искать решения задач (2.1), (2.2) в виде разложений по степеням V. Применение стандартных процедур метода возмущений становится более удобным, если сделать замену $V \to \varepsilon V$, где ε – числовой параметр, и после проведения формальных разложений по степеням ε положить $\varepsilon = 1$. Для дальнейшего анализа основных качественных свойств движения системы оказывается достаточным ограничиться первым приближением: $u = u_{1,2} = u_{1,2}^{(0)} + \varepsilon u_{1,2}^{(1)} + \varepsilon^2 \ldots$ ($\varepsilon = 1$). Неизвестные коэффициенты $u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots$ получаются последовательно решением соответствующих краевых задач. Для определения неизвестных $u_{1,2}^{(0)}$ имеем согласно (2.1), (2.2) в областях $D_{1,2}^{(0)}$ задачи

$$\Delta u_{1,2}^{(0)} = 0, \quad u_{1,2}^{(0)}(r, \mp h, t) = 0$$
$$D_{1,2}^{(0)} = D_{1,2}|_{V=0}, \quad u_{1,2}^{(0)}(r,0,t) = U_0 \cos\Omega t$$

не содержащие в граничных условиях неизвестную V. С учетом условия ограниченности решения $u^{(0)}$ при $r \to 0$ получаем выражения

$$u_{1,2}^{(0)} = U_0(1 \pm zh^{-1})\cos\Omega t \tag{2.3}$$

не зависящие от координаты r. Они отвечают случаю недеформируемой мембраны.

Определение неизвестных функций $u_{1,2}^{(1)}$ в соответствующих недеформированных областях $D_{1,2}^{(0)}$ требует решения краевых задач, содержащих неизвестную функцию $V = V(r, t)$:

$$\Delta u_{1,2}^{(0)} = 0, \quad u_{1,2}^{(1)}(r, \mp h, t) = 0, \quad u_{1,2}^{(1)}(r, 0, t) = \mp V h^{-1} U_0 \cos\Omega t$$

При этом функции $u_{1,2}^{(1)}$ должны быть ограниченными для $r \to 0$. Поскольку при $h/a \ll 1$ краевыми эффектами на границе $r = a$ можно пренебречь [1], то можно поставить произвольные граничные условия для $u_{1,2}^{(1)}$. Так как мембрана жестко закреплена по краю ($V(a, t) = 0$), то в рассматриваемом случае удобно положить также $u^{(1)}(a, z, t) = 0$.

Предположим пока, что функция $V(r, t)$ известна и является достаточно гладкой. Тогда искомые функции $u_{1,2}^{(1)}(r, z, t)$ определяются однозначно в виде рядов

$$u_{1,2}^{(1)}(r, z, t) = \mp \frac{U_0}{h}\cos\Omega t \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\operatorname{sh}\gamma_n (h \pm z)a^{-1}}{\operatorname{sh}(\gamma_n h a^{-1})} R_n(r) \tag{2.4}$$

$$R_n(r) = J_0(\gamma_n r a^{-1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\gamma_n \simeq (n - 1/4)\pi + 0{,}05\pi(4n-1)^{-1} + O(n^{-2}), \quad \gamma_{n+1} \simeq \gamma_n + \pi + O(n^{-2})$$

Здесь J_0 – функция Бесселя нулевого порядка; собственные значения задачи γ_n – корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$ ($\gamma_1 = 2{,}4048$, $\gamma_2 = 5{,}5201$, $\gamma_3 = 8{,}6537$, $\gamma_4 = 11{,}7915$, $\gamma_5 = 14{,}9309$, и т.д. [4]). Коэффициенты c_n ряда в (2.4) – коэффициенты Фурье функции $V(r, t)$ по ортогональной системе $\{R_n(r)\}$ с весом r:

$$c_n = c_n(t) = \frac{1}{\|R_n\|^2}\int_0^a V(\rho, t) R_n(\rho)\rho\, d\rho$$

$$\|R_n\|^2 = \int_0^a J_0^2\left(\gamma_n \frac{\rho}{a}\right)\rho\, d\rho = \frac{a^2}{2} J_1^2(\gamma_n) \tag{2.5}$$

В результате для искомых потенциалов $u_{1,2}$ получены приближенные выражения с точностью до квадратичных членов относительно $\|V\|$. При учете (2.3), (2.4) заключаем, что в областях D_1 и D_2 соответственно они имеют вид

$$u_{1,2}(r, z, t) = U_0\left(1 \pm \frac{z}{h}\right)\cos\Omega t \mp \frac{U_0}{h}\cos\Omega t \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \frac{\operatorname{sh}\gamma_n (h \pm z)a^{-1}}{\operatorname{sh}(\gamma_n h a^{-1})} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)$$

$$(r, z) \in D_{1,2} \tag{2.6}$$

где $c_n(t)$ – линейные функционалы от V (2.5).

Чтобы определить поверхностные силы, действующие на проводящую мембрану, нужно вычислить напряженность электрического поля $\mathbf{E}_{1,2}$ в областях $D_{1,2}$ соответственно по формулам: $\mathbf{E}_{1,2} = -\operatorname{grad} u_{1,2}$. Распределение сил, т.е. нормальное давление, определяется следующим образом [2, 3]:

$$P=\frac{E_2^2-E_1^2}{8\pi}\bigg|_{z=V}=\frac{U_0^2\cos^2\Omega t}{4\pi ah^2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\gamma_n\,\mathrm{cth}\left(\gamma_n\frac{h}{a}\right)J_0\left(\gamma_n\frac{r}{a}\right) \tag{2.7}$$

При выводе выражения (2.7) учитывались только линейные относительно V члены и то обстоятельство, что представления (2.6) в указанном приближении справедливы в исходных областях $D_{1,2}$. Из (2.7) следует, что при $V\equiv 0$ нормальное давление $P\equiv 0$, поскольку $c_n(t)\equiv 0$, $n=1, 2,...$ Заметим, что это обусловлено симметричным (на равных расстояниях h от обкладок) расположением мембраны.

3. Построение и решение краевой задачи, описывающей осесимметричные движения мембраны. На основе известного выражения (2.7) для распределенных ортогональных поверхности сил P можно выписать уравнение движения мембраны [5]

$$\mu V^{\cdot\cdot}-T\Delta V=P,\quad V=V(r,t),\quad r\leqslant a \tag{3.1}$$

$$P=P(r,t,[V])\equiv\frac{U_0^2\cos^2\Omega t}{4\pi ah^2}\int_0^a G(r,\rho)V(\rho,t)d\rho$$

$$G(r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\,\mathrm{cth}\left(\gamma_n\frac{h}{a}\right)\|R_n\|^{-2}R_n(r)R_n(\rho)\rho$$

Точками обозначено дифференцирование по времени t, $\Delta=r^{-1}\partial(r\partial/\partial r)/\partial r$ – одномерный оператор Лапласа по r, μ – поверхностная плотность, а T – натяжение мембраны. Зависимость от полярного угла отсутствует в силу предположения 5 разд. 1. Заметим, что состояние мембраны описывается интегродифференциальным уравнением в частных производных (3.1). Правая часть уравнения содержит интегральный по r оператор типа Фредгольма.

Требуется найти решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условиям закрепления и ограниченности

$$V(a,t)=0,\quad |V(r,t)|\leqslant M<\infty,\quad r\to 0 \tag{3.2}$$

а также заданным осесимметричным начальным условиям

$$V(r,0)=f(r),\quad V^{\cdot}(r,0)=g(r) \tag{3.3}$$

Функции f, g предполагаются согласованными с условиями (3.2) и достаточно гладкими, чтобы существовало сильное решение [5] задачи (3.1)–(3.3).

Это решение естественно искать в виде разложений по ортогональной с весом r системе функций $R_n(r)=J_0(\gamma_n ra^{-1})$:

$$V=V(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)R_n(r) \tag{3.4}$$

Стандартными методами математической физики [5] для коэффициентов $V_n(t)$ (3.4) получаются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами типа Матье [6]

$$V_n^{\cdot\cdot}+(\omega_n^2-\nu_n^2\cos^2\Omega t)V_n=0,\quad n=1,2,\dots \tag{3.5}$$

$$\omega_n^2=\gamma_n^2T(\mu a^2)^{-1},\quad \nu_n^2=U_0^2(4\pi ah^2\mu)^{-1}\gamma_n\,\mathrm{cth}(\gamma_n ha^{-1})$$

Здесь ω_n – собственные частоты круглой мембраны, совершающей осесимметричные колебания. Параметры ν_n также имеют размерность частот, причем $\nu_n\sim\sqrt{\gamma_n}\sim\sqrt{n}$. Поэтому при $n\to\infty$ величины $\nu_n^2\omega_n^{-2}\sim n^{-1}$, т.е. "главными" в уравнении (3.5) для достаточно больших n являются члены $\omega_n^2 V_n$. Функции V_n должны удовлетворять начальным условиям, вытекающим из (3.3):

$$V_n(0) = f_n, \quad f_n = (f(r), R_n(r))_r \|R_n\|^{-2} \tag{3.6}$$

$$V_n^{\cdot}(0) = g_n, \quad g_n = (g(r), R_n(r))_r \|R_n\|^{-2}$$

Предполагается, что коэффициенты f_n, g_n достаточно быстро убывают при $n \to \infty$.

Таким образом, краевая задача (3.1)–(3.3) сведена к решению счетной системы задач Коши (3.5), (3.6) для линейных уравнений с периодическими коэффициентами, частота изменения которых равна 2Ω. Отметим, что влияние внешнего электрического поля определяется квадратом напряжения $U^2 = U_0^2 \cos^2 \Omega t$. Если $U_0 = 0$, то $\nu_n = 0$ и уравнения интегрируются в явном виде. Получающееся решение описывает свободные осесимметричные колебания круглой мембраны. При $U_0 \neq 0$, $\Omega \neq 0$ искомое решение $V_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ выписывается при помощи функций Матье [6]. Случай $\Omega = 0$ (постоянное напряжение) также представляет интерес (см. ниже).

4. Качественный анализ движения мембраны. *4.1. Устойчивость положения равновесия и движений мембраны в постоянном электрическом поле.* Положим в уравнениях (3.5) частоту $\Omega = 0$; получим счетную систему

$$V_n^{\cdot\cdot} + (\omega_n^2 - \nu_n^2) V_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует устойчивость в линейном приближении колебаний мембраны и ее положения равновесия $V_n \equiv 0$, $V_n^{\cdot} \equiv 0$, если $\omega_n > \nu_n$ для всех $n \geqslant 1$. В исходных содержательных переменных условие $\omega_n > \nu_n$ можно записать следующим образом:

$$(U_0 / h)^2 < 4\pi T a^{-1} \gamma_n \operatorname{th}(\gamma_n h a^{-1}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

Итак, устойчивость по линейному приближению имеет место, если средняя (по z) напряженность электрического поля U_0/h достаточно мала по сравнению с характеристикой натяжения мембраны $(T/a)^{1/2}$. Вследствие монотонности правой части неравенства (4.2) по γ_n представляется достаточным его выполнение при $n = 1$, т.е.для γ_1. Поскольку имеет место сильное неравенство $ha^{-1} \ll 1$, то условие (4.2) при $n = 1$ примет вид

$$(U_0 / h)^2 < 4\pi \gamma_1^2 (h / a) T a^{-1} \quad (\gamma_1^2 \simeq 5{,}7831) \tag{4.3}$$

Колебания мембраны теряют устойчивость и становятся экспоненциально неустойчивыми, если для некоторых значений $n = 1, 2, \ldots, n^*$ выполняются неравенства, обратные (4.2). В частности, потеря устойчивости по основной первой моде происходит при выполнении обратного неравенства (4.3)

$$U_0^2 a^2 (4\pi h^3 T) > \gamma_1^2 \simeq 5{,}7831 \tag{4.4}$$

Неравенство (4.4) по своей форме и физическому смыслу аналогично условию неустойчивости заряженной жидкой капли, находящейся в равновесии под действием сил поверхностного натяжения (Релей, см. [7]).

Наличие линейной диссипации приведет к тому, что устойчивые в линейном приближении моды колебаний станут асимптотически (экспоненциально) устойчивыми. Экспоненциально устойчивые моды останутся таковыми. Критические случаи, когда вместо строгих неравенств имеют место равенства, требуют дополнительных исследований с учетом нелинейности. Отметим, что наличие постоянного электрического поля приводит к уменьшению частот колебаний мембраны согласно (4.1).

4.2. Неустойчивость параметрических колебаний мембраны в переменном электрическом поле. Приведем уравнения (3.5) к стандартному виду уравнений Матье [6]. С этой целью введем безразмерные время τ и параметры α_n, β_n по формулам

$$\tau = \Omega t, \quad \alpha_n = \omega_n^2 \Omega^{-2}(1 - \tfrac{1}{2}\nu_n^2\omega_n^{-2}), \quad 2\beta_n = \tfrac{1}{2}\nu_n^2\Omega^{-2} \tag{4.5}$$

$$(\alpha_n \simeq \omega_n^2\Omega^{-2}[1 - U_0^2 a^2 (8\pi h^3 T\gamma_n^2)^{-1}], \quad 2\beta_n \simeq U_0^2(8\pi\mu h^3\Omega^2)^{-1}, \quad \gamma_n h a^{-1} \ll 1)$$

Уравнения (3.5) приводятся к виду уравнения Матье [6] (точкой вновь обозначено дифференцирование по аргументу τ)

$$\ddot{V_n} + (\alpha_n - 2\beta_n \cos 2\tau)V_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.6}$$

Далее естественно предположить, что $\beta_n \ll \alpha_n$. Как следует из (4.5), для достаточно больших n допущение справедливо, поскольку $\alpha_n \sim n^2$, $\beta_n \sim n$ при $n \to \infty$. Это позволяет применить методы теории возмущений и найти условия, при которых происходит потеря устойчивости нулевого (или любого) решения уравнений (4.6). В малой окрестности резонансных значений параметров α_n, отвечающих основной и более высоким резонансным зонам, условия экспоненциальной неустойчивости на плоскости параметров α_n, β_n имеют вид двусторонних неравенств [6]. Выпишем эти условия для первых четырех резонансных зон параметрических колебаний мембраны произвольной моды с номером n, $n = 1, 2, \ldots$ Согласно [6] имеем:

$$\begin{gathered}
1 - \beta_n - \frac{1}{8}\beta_n^2 + \frac{1}{64}\beta_n^3 < \alpha_n < 1 + \beta_n - \frac{1}{8}\beta_n^2 + \frac{1}{64}\beta_n^3 \\
4 - \frac{1}{12}\beta_n^2 + \frac{5}{13824}\beta_n^4 < \alpha_n < 4 + \frac{5}{12}\beta_n^2 - \frac{763}{13824}\beta_n^4 \\
9 + \frac{1}{16}\beta_n^2 - \frac{1}{64}\beta_n^3 < \alpha_n < 9 + \frac{1}{16}\beta_n^2 + \frac{1}{64}\beta_n^3 \\
16 + \frac{1}{30}\beta_n^2 - \frac{317}{864000}\beta_n^4 < \alpha_n < 16 + \frac{1}{30}\beta_n^2 + \frac{433}{864000}\beta_n^4
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Левые и правые части неравенств (4.7) представляются степенными рядами от β_n, в которых удержаны члены не выше четвертой степени. Эти неравенства определяют резонансные зоны возбуждения параметрических колебаний. Отметим, что их ширина имеет порядок β_n^k, где k – номер зоны, т.е. становится весьма узкой при $k \gg 1$, $\beta_n < 1$.

Задание границ областей неустойчивости вблизи различных резонансных зон в форме двусторонних неравенств (4.7) может оказаться не очень удобным при больших $n \gg 1$, поскольку $\beta_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому вместо β_n (4.5) предпочтительнее ввести параметры ξ_n так, чтобы уравнения (4.6) приняли вид

$$\ddot{V_n} + \alpha_n(1 + \xi_n \cos 2\tau)V_n = 0$$

$$\beta_n = -\tfrac{1}{2}\xi_n\alpha_n, \quad \xi_n = -\tfrac{1}{2}\nu_n^2\omega_n^{-2}(1 - \tfrac{1}{2}\nu_n^2\omega_n^{-2}) \to 0, \quad n \to \infty$$

Подставляя β_n в (4.7) и разрешая неравенства относительно α_n последовательно по степеням малой величины ξ_n, получим условия неустойчивости, эквивалентные указанным и удобные для использования при $n \gg 1$, поскольку $\xi_n \sim n^{-1} \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим основную резонансную зону $k = 1$ (первое двустороннее неравенство (4.7)). В этой области значений параметров, имеющей ширину $2\beta_n$, происходит экспоненциальное нарастание амплитуды колебаний n-й моды. Частота колебаний близка к частоте Ω изменения электрического поля; отличие составляет величину порядка β_n (4.5). Инкремент нарастания амплитуды равен $\tfrac{1}{2}\beta_n$ [6].

Аналогично могут быть исследованы резонансные зоны более высоких порядков

$k \geqslant 2$. В этих зонах происходит экспоненциальное нарастание амплитуды колебаний с частотой, близкой ($k\Omega$). Ширина резонансной зоны (как отмечалось выше), отличие частоты и инкремент нарастания амплитуды составляют величины порядка β_n^k. Практически [8] наиболее легко происходит параметрическое возбуждение колебаний в основной резонансной зоне $k = 1$ (4.7) для низких мод колебаний $n = 1, 2, \ldots, n^*$, где n^* "не очень велико".

Если одному из условий (4.7) удовлетворяет собственная частота фиксированной моды n^*, а все остальные моды $n \neq n^*$ не удовлетворяют ни одному из указанных двусторонних неравенств, то происходит возбуждение только этой моды n^*. В противном случае может возбуждаться несколько мод колебаний в различных резонансных зонах.

Выполнение условий неустойчивости (4.7) параметрических колебаний (4.6) приводит к экспоненциальному неограниченному росту амплитуды колебаний при $t \to \pm\infty$ [6]. Это объясняется неполнотой линейной модели колебаний мембраны. При наличии нелинейности и диссипации в системе могут установиться стационарные колебания ограниченной амплитуды. Источники нелинейности могут быть следующие.

1°. Учет более высоких степеней ε (т.е. переменной V) в выражениях для потенциалов $u_{1,2}$ (см. разд. 2), т.е. учет геометрической нелинейности при расчете пондеромоторных сил электрического поля.

2°. Наличие нелинейной зависимости натяжения T мембраны от смещения (физическая нелинейность материала).

3°. Учет геометрической нелинейности при расчете упругих сил, возвращающих элементы мембраны к положению равновесия (учет растяжимости материала).

Влияние одного или нескольких типов указанных выше (и, возможно, других) нелинейностей, приводит к ограничению амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний, а также к возможности существования периодических стационарных колебаний. Отметим, что наличие существенной диссипации может привести к устойчивым стационарным колебаниям в резонансной зоне как при нелинейном, так и линейном подходах.

4.3. Выводы. На основе результатов разд. 4.1 установлена возможность потери устойчивости положения равновесия мембраны в постоянном электрическом поле. Имеются технические возможности для проведения лабораторных экспериментов с целью определения сдвига собственных частот колебаний мембраны в постоянном электрическом поле, а также наблюдения потери устойчивости равновесного состояния $V \equiv 0$.

Существует принципиальная возможность параметрического возбуждения колебаний мембраны, помещенной между заземленными обкладками конденсатора и находящейся под действием переменного электрического поля. Технически наиболее просто представляется возбуждение первой моды в зоне основного резонанса при соответствующем выборе параметров системы, таких как a, h, U_0, Ω, T, μ (см. разд. 4.2).

Отметим, что рассмотренная выше задача о параметрических колебаниях упругой мембраны в переменном электрическом поле является в определенном смысле двойственной проблеме механического возбуждения электрического тока (Л.И. Мандельштам и Н.Д. Папалекси, см. [9]). Показано [9], что посредством периодического изменения емкости, удается возбудить электрические колебания в контуре.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17594).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
2. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 604 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
4. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
6. *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.
7. *Lord Rayleigh.* On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Scient. Papers Cambridge. 1900. V. 2. P. 90.
8. *Мандельштам Л.И.* Полное собрание сочинений. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1947. 396 с.
9. *Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д.* О параметрическом возбуждении электрических колебаний // Журн. техн. физики. 1934. Т. 4. С. 5–29.

Москва

Поступила в редакцию
25.I.1993