

УДК 539.3

© 1994 г. Ю.И. Виноградов, Г.Б. Меньков

## ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ НОРМИРОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Предлагается простой и эффективный, основанный на известном аналитическом решении метод расчета напряженно-деформированного состояния слоистых ортотропных цилиндрических оболочек. Функциональное нормирование фундаментальной системы решений обыкновенных дифференциальных уравнений устраняет трудности, обусловленные наличием быстро возрастающих и быстроубывающих решений, и позволяет рассчитывать оболочки любой длины и толщины.

Используя уравнения равновесия, деформационные соотношения [1] и соотношения упругости для слоистого ортотропного материала [2], получим систему уравнений равновесия в перемещениях:

$$\mathcal{L}U = R^2 h^{-1} \mathbf{q} \quad (1)$$

где  $\mathbf{U} = (u, v, w)^T$  – вектор перемещений,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, -q_3)^T$  – вектор внешних нагрузок, компоненты матрицы  $J$  имеют вид

$$J_{11} = b_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + b_{33} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$J_{12} = J_{21} = (b_{12} + b_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \varphi}, \quad J_{13} = J_{31} = b_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

$$J_{22} = b_{22} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + b_{33} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + a^2 \left( d_{22} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 4d_{33} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right)$$

$$J_{23} = J_{32} = b_{22} \frac{\partial}{\partial \varphi} - a^2 \left( (d_{12} + 4d_{33}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \varphi} + d_{22} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right)$$

$$J_{33} = b_{22} + a^2 \left( d_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + (2d_{12} + 4d_{33}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \varphi^2} + d_{22} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \right)$$

$$a^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad b_{ij} = \frac{B_{ij}}{h}, \quad d_{ij} = D_{ij} \frac{12}{h^3}$$

$\alpha = s/R$ ,  $\varphi$  – безразмерные продольная и окружная координаты.

Разделяя переменные при помощи разложения в ряды Фурье по окружной координате [1], получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение

их однородной части ищем в виде

$$u_k = A_k e^{\lambda \alpha}, \quad v_k = B_k e^{\lambda \alpha}, \quad w_k = C_k e^{\lambda \alpha} \quad (2)$$

После указанной подстановки для каждого  $k$ -го члена ряда Фурье имеем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $A_k, B_k, C_k$ . Условие существования нетривиальных решений системы (равенство нулю ее определителя) дает характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \lambda^8 + a_* \lambda^6 + b_* \lambda^4 + c_* \lambda^2 + d_* &= 0 \\ a_* &= -k^2 (F_1 - 2f_{12} + 2g_{12} + 4g_{33}) \\ b_* &= k^4 [2(F_1 - 2f_{12})(g_{12} + 2g_{33}) + f_{22} + g_{22}] + 2k^2 (g_{12} + 4g_{33})(f_{12} - F_1) + F_2 / a^2 \\ c_* &= -k^2 (k^2 - 1)^2 (4f_{22}g_{33} + F_1g_{22}) - 2k^4 (k^2 - 1)(f_{22}g_{12} - f_{12}g_{22}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$d_* = k^4 (k^2 - 1)^2 f_{22}g_{22}$$

$$f_{12} = \frac{b_{12}}{b_{11}}, \quad f_{22} = \frac{b_{22}}{b_{11}}, \quad f_{33} = \frac{b_{33}}{b_{11}}, \quad g_{12} = \frac{d_{12}}{d_{11}}, \quad g_{22} = \frac{d_{22}}{d_{11}}, \quad g_{33} = \frac{d_{33}}{d_{11}}$$

$$F_1 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{b_{11}b_{33}}, \quad F_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{b_{11}d_{11}}$$

В данное уравнение искомые характеристические показатели  $\lambda$  входят только в четных степенях. Поэтому оно сводится к уравнению четвертой степени, которое можно решить по формулам Феррари. Для каждого корня  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) с точностью до множителя определяются величины  $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}, C_k^{(i)}$ , и общее решение однородной системы уравнений получается в виде

$$\begin{pmatrix} u_k(\alpha) \\ v_k(\alpha) \\ w_k(\alpha) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 C_i \begin{pmatrix} A_k^{(i)} \\ B_k^{(i)} \\ C_k^{(i)} \end{pmatrix} \exp(\lambda_i \alpha) \quad (4)$$

где  $C_i$  — произвольные постоянные интегрирования. Исключение составляют лишь случаи  $k = 0$  и  $k = 1$ , когда четыре из восьми корней уравнения (3) являются нулевыми. Приведем соответствующую этим корням часть общего решения однородной системы уравнений:

для  $k = 0$

$$\begin{pmatrix} u_0(\alpha) \\ v_0(\alpha) \\ w_0(\alpha) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\frac{f_{12}}{f_{22}} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

для  $k = 1$

$$\begin{pmatrix} u_1(\alpha) \\ v_1(\alpha) \\ w_1(\alpha) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2\alpha \\ -\alpha^2 \\ 2\frac{f_{12}}{f_{22}} + \alpha^2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 6F_1f_{22} - 3\alpha^2 \\ -\alpha^3 \\ 6\frac{f_{12}}{f_{22}}\alpha + \alpha^3 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

После определения перемещений усилия вычисляются при помощи деформационных соотношений и соотношений упругости.

Расчеты проводились для нагрузок, изменяющихся вдоль образующей по законам полиномов некоторой степени. В этом случае частное решение неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для  $k$ -го члена ряда Фурье удобно искать методом неопределенных коэффициентов.

Численный эксперимент выявил некоторые особенности аналитического решения.

Во-первых, при определенных значениях обобщенных жесткостей  $b_{ij}$  и  $d_{ij}$  корнями уравнения (3) являются не только комплексные числа (как в случае изотропного тела), но и чисто действительные и/или чисто мнимые числа. Например, для шестого и последующих членов рядов Фурье при  $R/h = 100$ ,  $d_{11} = b_{11}$ ,  $f_{12} = g_{12} = 0,02$ ,  $f_{22} = g_{22} = 0,6$ ,  $f_{33} = g_{33} = 0,04$ , (т.е. в случае, когда сдвиговая жесткость материала мала по сравнению с жесткостями на растяжение) все восемь корней характеристического уравнения являются действительными величинами.

Во-вторых, при больших длинах рассчитываемых оболочек непосредственное применение формул (4) приводит к тому, что матрица системы линейных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных из граничных условий оказывается плохо обусловленной из-за наличия среди решений быстро возрастающих и быстро убывающих функций. Известные способы решения этой проблемы (методом прогонки с ортогонализацией и нормированием и др.) требуют очень больших вычислительных затрат, приводящих к увеличению времени расчета и неэффективному использованию памяти ЭВМ.

Появление указанной трудности, очевидно, связано лишь с особенностями применения ЭВМ. Ведь в тех случаях, когда объем вычислений допускает расчет "в ручную", наличие быстроизменяющихся аналитических функций, наоборот, облегчает задачу расчетчика, так как характерным для оболочек напряженным состоянием является краевой эффект, и взаимным влиянием условий на торцах оболочки можно пренебречь. Использовать эти идеи при расчете на ЭВМ цилиндрических оболочек оказалось весьма просто. Хорошо известно [1], что на левом торце длинной оболочки играют роль только убывающие решения (соответствующие корням вида  $\lambda_1 = -p + iq$ ,  $p > 0$ ), а на правом — только возрастающие (соответствующие корням вида  $\lambda_2 = p + iq$ ,  $p > 0$ ). С математической точки зрения это означает, что если координаты левого и правого торцов оболочки равны  $\alpha_{\min}$  и  $\alpha_{\max}$ , то произвольная постоянная, соответствующая корню  $\lambda_2$ , имеет порядок, в  $\exp[p(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})]$  меньший, чем произвольная постоянная, соответствующая корню  $\lambda_1$ . Тем самым становится очевидным ключ к решению проблемы: в быстроубывающих решениях следует заменить  $\exp(\lambda_i \alpha)$  на  $\exp[\lambda_i(\alpha - \alpha_{\min})]$ , а в быстро возрастающих на  $\exp[\lambda_i(\alpha - \alpha_{\max})]$ .

Такая замена (по сути — функциональное нормирование фундаментальной системы решений) соответствует выбору новых произвольных постоянных. Все они оказываются примерно одного порядка, а матрица системы линейных алгебраических уравнений — хорошо обусловленной для сколь угодно больших величин длины оболочки и номера  $k$  члена рядов Фурье.

Итак, найден эффективный способ расчета слоистых ортотропных цилиндрических оболочек произвольной длины и толщины.

Для иллюстрации предложенной методики приведем результаты решения задачи о напряженно-деформированном состоянии консольно закрепленной слоистой цилиндрической оболочки ( $R/h = 100$ ,  $l/R = 1$ ), нагруженной на свободном торце радиальной сосредоточенной силой, направленной к оси оболочки. Рассматривались структуры из восьми слоев, в каждом из которых армирующие волокна уложены под определенным углом  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$

(материал Торнелл-300,  $E_1 = 142,8 \times 10^9$  Па,  $E_2 = 9,13 \times 10^9$  Па,  $G_{12} = 5,49 \times 10^9$  Па,  $\nu_{12} = 0,02$ ,  $\nu_{21} = 0,32$  [2]). Все слои имеют одинаковую толщину, относительно срединной

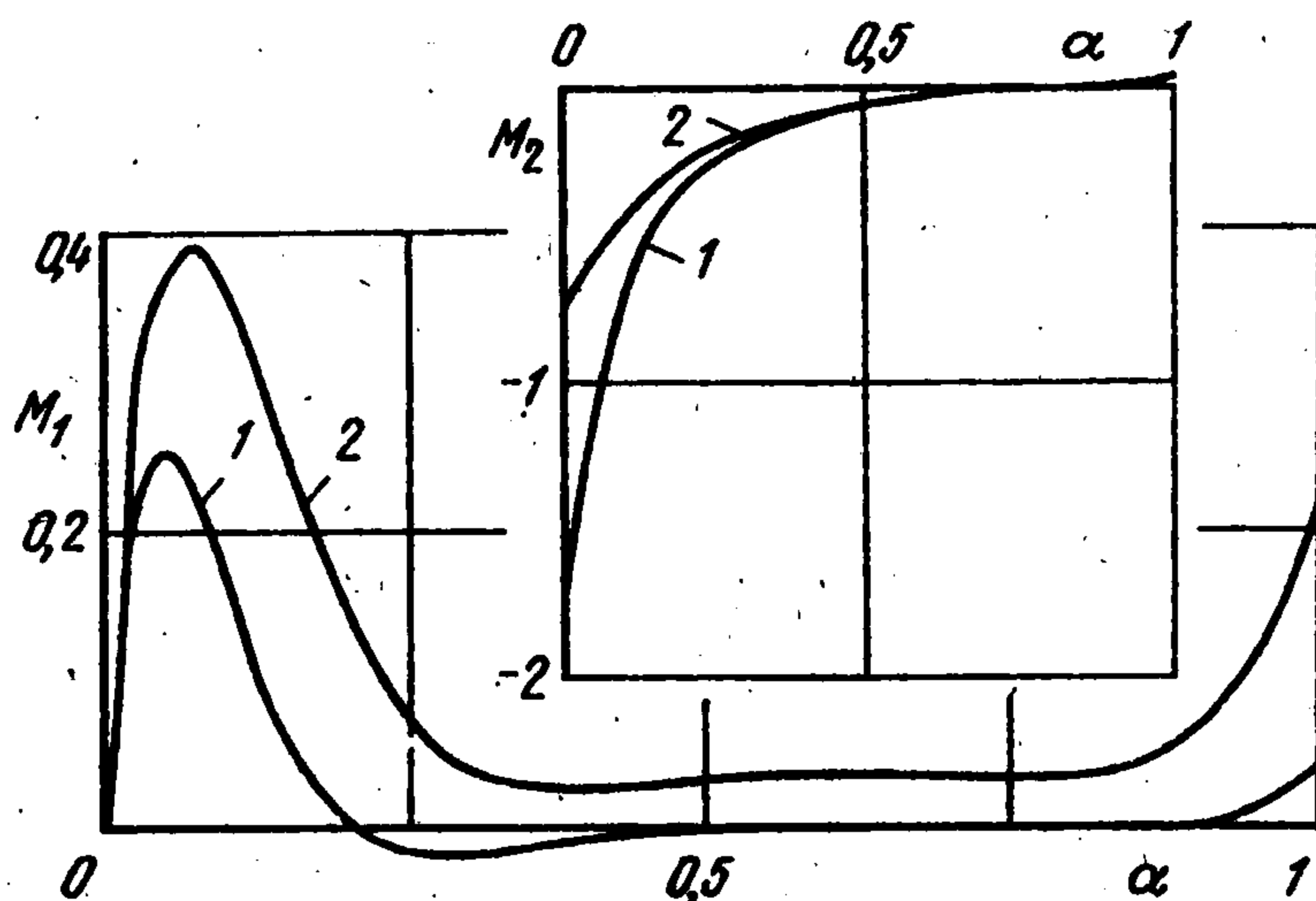
поверхности пакет симметричен, обобщенные жесткости вычисляются по известным формулам [2].

На фиг. 1 приведены результаты расчета – распределение по образующей цилиндра ( $\varphi = 0$ ) моментов  $M_1$  и  $M_2$  – для двух вариантов армирования:

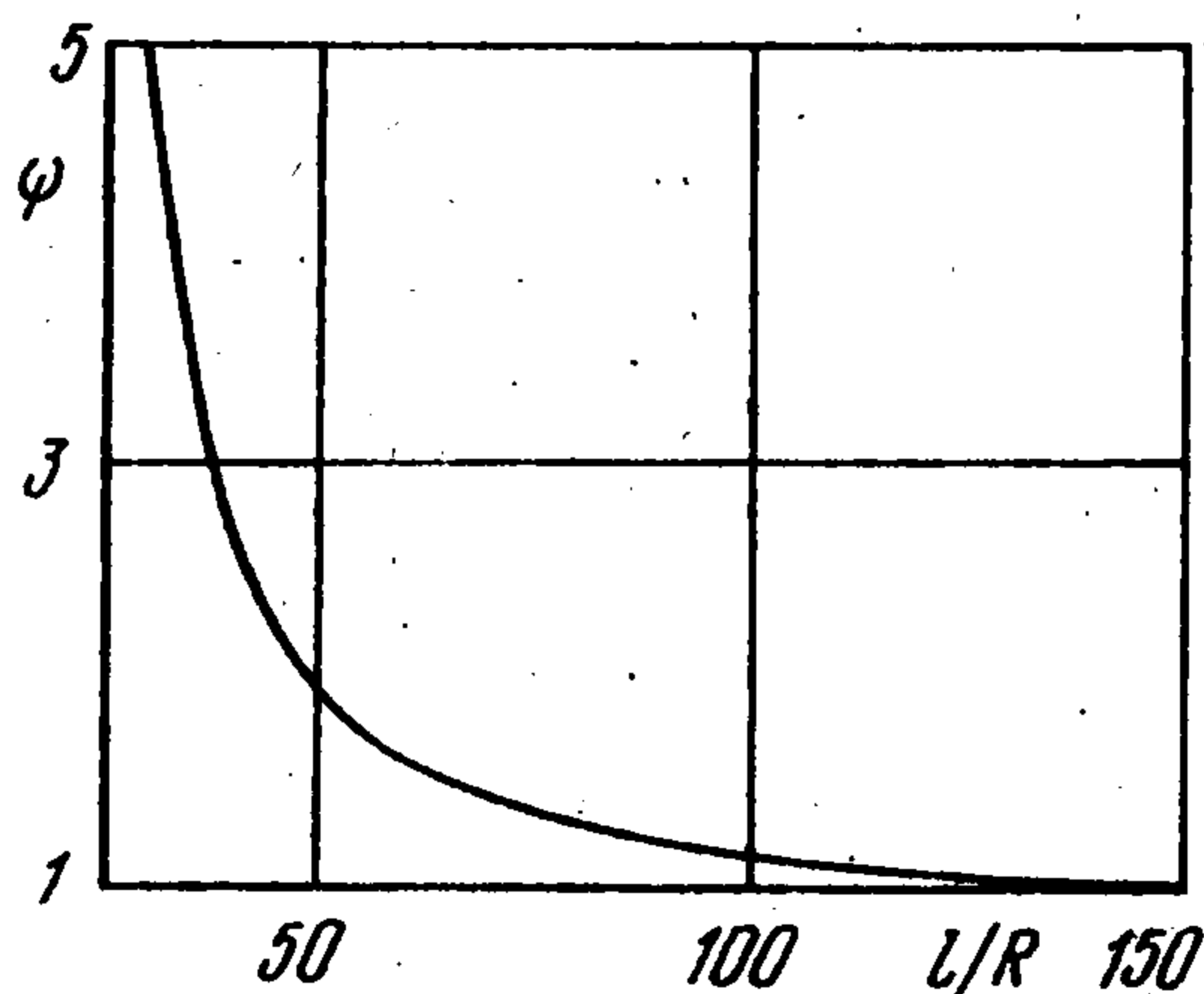
1)  $\beta_1 = \beta_8 = 90^\circ$ ,  $\beta_2 = \beta_7 = 45^\circ$ ,  $\beta_3 = \beta_6 = 22,5^\circ$ ,  $\beta_4 = \beta_5 = 0^\circ$ ;

2)  $\beta_1 = \beta_8 = 0^\circ$ ,  $\beta_2 = \beta_7 = 22,5^\circ$ ,  $\beta_3 = \beta_6 = 45^\circ$ ,  $\beta_4 = \beta_5 = 90^\circ$ .

В данном случае в зоне приложения сосредоточенной силы момент  $M_2$  имеет особенность. Поэтому при определении внутренних силовых факторов удобнее вместо силы



Фиг. 1



Фиг. 2

рассматривать нагрузку, распределенную по дуге величиной, например, в  $1^\circ$ . Результаты представлены в безразмерной форме (в долях произведения интенсивности нагрузки на толщину оболочки). Видно, что при изменении структуры происходит существенное перераспределение внутренних силовых факторов: во втором случае, когда жесткость пакета в окружном направлении уменьшилась, величина момента  $M_2$  также уменьшилась, а величина момента  $M_1$  увеличилась.

Предложенная методика расчета позволяет при большой длине оболочки сопоставить результаты расчета по теориям оболочек и стержней. Такой анализ достоверности получаемых в расчетах результатов практически невозможен при использовании других методов. На фиг. 2 приведен график отношения  $\psi$  вертикального перемещения (в точке приложения силы) изотропной оболочки к величине  $Pl^3/(3EJ)$ , равной максимальному прогибу консольно закрепленной балки трубчатого поперечного сечения при

$$\frac{R}{h} = 300, \quad J = \frac{\pi}{64} [(2R+h)^4 - (2R-h)^4]$$

При  $l > 125 R$  максимальные перемещения, рассчитанные по этим двум теориям, различаются менее чем на 5%.

Таким образом, предложенный метод функционального нормирования фундаментальной системы решений дифференциальных уравнений значительно упрощает проблему исследования напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек с любыми значениями геометрических параметров. Полученная форма аналитического решения позволяет в отличие от других методов даже в случае длинных тонких оболочек без каких-либо дополнительных приемов свести проблему к решению систем уравнений восьмого порядка, соответствующего числу граничных условий. При этом вычисления на ЭВМ выполняются с гарантированной точностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
2. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.

Москва

Поступила в редакцию  
23. III 1993