

УДК 539.3

© 1994 г. Ю.В. Зеленев, О.И. Медведков

К ОПИСАНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КЛИНООБРАЗНОЙ ПЛАСТИНЫ

При учете поперечного сдвига строится уточненное решение задачи Войновского–Кригера [1, 2] о деформации трансверсально–изотропной клинообразной пластины. Используется преобразование Меллина.

Необходимость привлечения уточненных теорий к задаче Войновского–Кригера (учет деформации поперечного сдвига) связана с трансверсальной изотропностью пластины и наличием у нее свободного края [3, 4]. При этом необходимо уточнение перерезывающих сил, так как при наличии свободного края они могут даже на порядок превышать соответствующие усилия в теории Кирхгофа–Лява [3, 4].

Используем уравнения равновесия в компонентах напряжений пространственной задачи теории упругости в криволинейных ортогональных координатах. Интегрированием по толщине оболочки (при постоянстве касательных τ_{13} , τ_{23} , σ_{12} и нормальных σ_{11} , σ_{22} напряжений), получим уравнения равновесия (нулевое приближение, безмоментный случай по Векуа [5]).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_1^0) - N_2^0 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} (AS_{12}^0) + S_{21}^0 \frac{\partial A}{\partial \beta} + Q_1^0 k_1 AB + ABF_1 = 0 \quad (1 \rightarrow 2, A \rightarrow B) \\ -(k_1 N_1^0 + k_2 N_2^0) + \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (BQ_1^0) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AQ_2^0) \right] + F = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

(α , β – криволинейные ортогональные координаты, выбранные на срединной поверхности оболочки; N_1^0 , N_2^0 , $S_{12}^0 = S_{21}^0 = S^0$ – нормальные и сдвигающие усилия, возникающие в оболочке; Q_1^0 , Q_2^0 – перерезывающие силы; F_1 , F_2 , F – проекции интенсивности нагрузки на направления α , β , z ; k_1 и k_2 – кривизны координатных линий α и β ; A , B – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки).

Наличие перерезывающих сил в уравнениях равновесия (1) указывает на то, что эти уравнения учитывают поперечный сдвиг [6–8]. Применение уравнений (1) развивает и обобщает сдвиговую модель Тимошенко [9].

Изучение поперечного сдвига в оболочках в рассматриваемом случае выделено в самостоятельную задачу, описываемую системой дифференциальных уравнений более низкого порядка, чем исходная задача.

Анализ напряженно-деформированного состояния анизотропных оболочек показывает [10–11], что деформация, обусловленная поперечным сдвигом, преобладает по сравнению с деформациями, обусловленными нормальными напряжениями и обжатием.

Из физических соображений имеем

$$\epsilon_{j3} = \epsilon_{j3}^0 \quad (j = 1, 2) \quad (2)$$

($\epsilon_{\beta\beta}, \epsilon_{\beta\beta}^0$ – компоненты деформации поперечного сдвига, определяемые по теории Тимошенко [9] и нулевому приближению соответственно).

Задаемся физическим условием вида

$$U_j = U_j^* + U_j^0, \quad w = w^* + w^0 \quad (3)$$

(U_1, U_2, w – проекции вектора смещения точек срединной поверхности на направления α, β, z ; U_1^*, U_2^*, w^* – проекции вектора смещения точек

срединной поверхности, определяемые по классической теории (с использованием гипотезы Кирхгофа); U_1^0, U_2^0, w^0 – проекции вектора смещения точек срединной поверхности, определяемые по рассматриваемому методу).

Использование выражений для компонент деформации $\epsilon_{\beta\beta}, \epsilon_{\beta\beta}^0$ при учете соотношений (2), (3) приводит к соотношению

$$\gamma_1 = -A^{-1} \partial w^* / \partial \alpha + k_1 U_1^* \quad (1 \rightarrow 2, A \rightarrow B) \quad (4)$$

(γ_1, γ_2 – углы поворота нормали к срединной поверхности).

Условия (4), а следовательно, и (2) согласуются с условием эквивалентности [12]. Таким образом, раздельное рассмотрение задачи по классической теории и рассматриваемому методу определяет решение исходной задачи. Для полного построения напряженно-деформированного состояния оболочки используются пять уравнений равновесия. Для постановки краевых условий подсчитывается работа действующих вдоль контура оболочки усилий на соответствующих перемещениях.

Положив в уравнениях (1) $k_1 = k_2 = 0$, получаем уравнения равновесия пластин по рассматриваемому методу. Первые два уравнения определяют обобщенное плоско-напряженное состояние пластинки. Третье уравнение равновесия

$$\partial Q_1^0 / \partial x + \partial Q_2^0 / \partial y + F = 0 \quad (5)$$

определяет поперечный сдвиг [6–8]. (x, y – декартовы координаты точек срединной плоскости пластины).

Подстановка выражений для перерезывающих сил в уравнение (5) приводит к уравнению для прогиба трансверсально-изотропных пластин

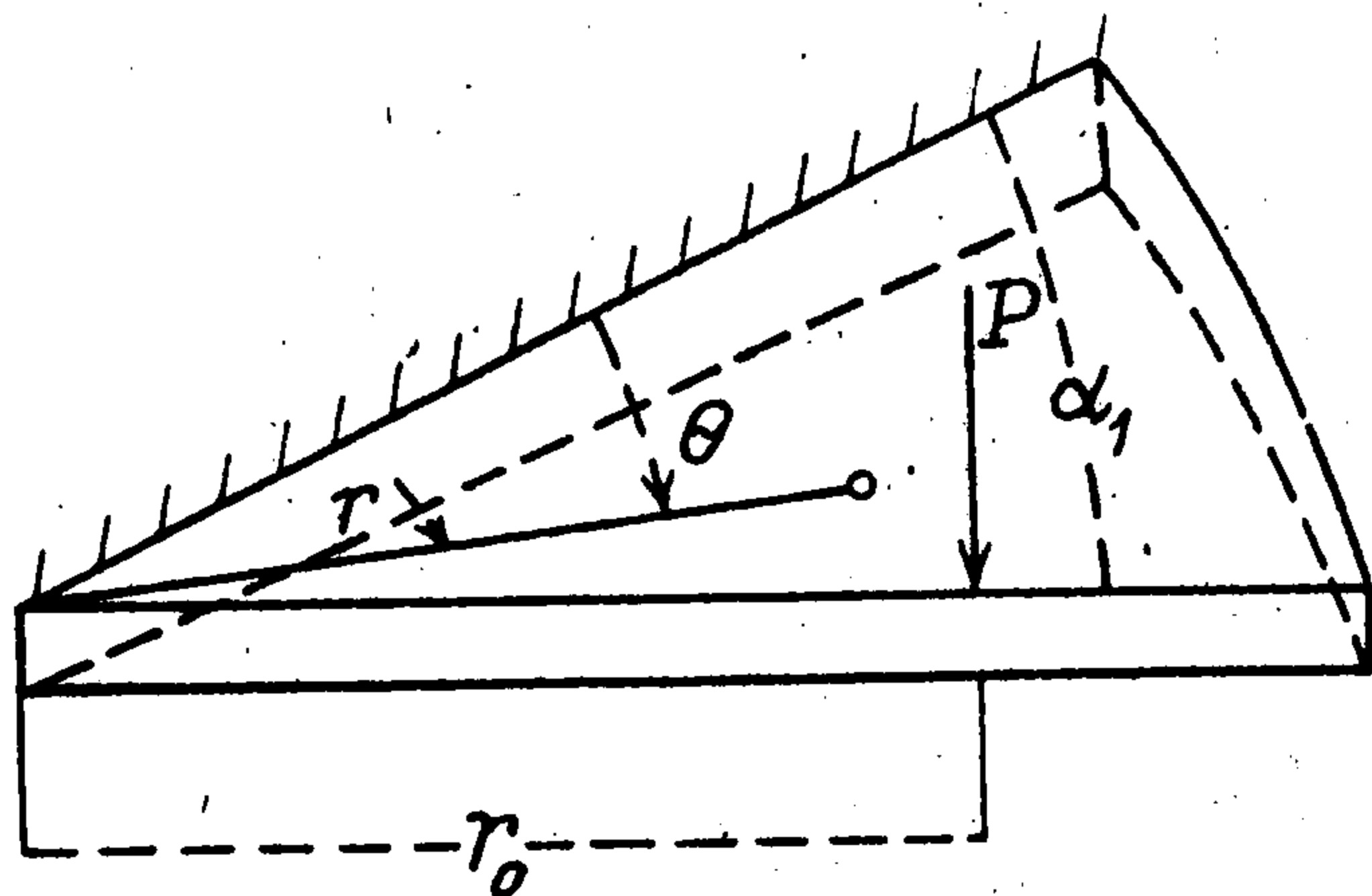
$$\Delta w^0 = -F / 2G'kh \quad (6)$$

(Δ – оператор Лапласа, G' – модуль сдвига в нормальной плоскости, k – коэффициент сдвига, определяемый законом изменения касательных напряжений по толщине [12]). Отметим, что уравнение (6) может быть также получено из принципа возможных перемещений. В дальнейшем используется уравнение $\Delta w^0 = 0$.

Рассмотрим клинообразную пластину (фигура). Положим, что край $\theta = 0$, зашпелен, а край $\theta = \alpha_1$ свободен, за исключением точки $r = r_0$, где приложена сосредоточенная сила P .

В классической постановке решение этой задачи известно [1, 2]. Построим решение, учитывающее поперечный сдвиг. Функцию $f(r)$ можно представить при помощи формулы Меллина следующим образом:

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} r^{-s} ds \int_0^{\infty} \rho^{s-1} f(\rho) d\rho \quad (7)$$



$2hr_0$	r/r_0	$z' = E/G'$	$(w^0 \cdot Pr_0^2/D) \cdot 10^{+3}$	w^0/w^*
0,05	0,1	2	0,0031832	
	0,2		0,012739	
	0,3		0,028726	
	0,4		0,051371	
	0,5		0,081300	
	0,6		0,11997	
	0,7		0,17063	
	0,8		0,24133	
	0,9		0,55875	
0,35	0,1	2	0,15597	
	0,2		0,62422	
	0,3		1,4076	
	0,4		2,5172	
	0,5		3,9837	
	0,6		5,8783	
	0,7		8,3610	
	0,8		11,825	0,16904
	0,9		17,579	0,22507
0,05	0,1	8	0,012733	
	0,2		0,050957	
	0,3		0,1149	
	0,4		0,20549	
	0,5		0,32520	
	0,6		0,47987	
	0,7		0,68253	
	0,8		0,96534	
	0,9		1,4350	
0,25	0,1	8	0,31832	
	0,2		1,2739	
	0,3		2,8726	
	0,4		5,1371	
	0,5		8,4300	
	0,6		11,997	
	0,7		17,063	
	0,8		24,133	0,34498
	0,9		35,875	0,45932
0,3	0,1	8	0,45837	
	0,2		1,8344	
	0,3		4,1365	
	0,4		7,3974	
	0,5		11,707	
	0,6		17,275	
	0,7		24,571	
	0,8		34,752	0,49678
	0,9		51,659	0,66141
0,35	0,1	8	0,62390	
	0,2		2,4969	
	0,3		6,6302	
	0,4		10,069	
	0,5		15,935	
	0,6		23,513	
	0,7		33,444	
	0,8		47,301	0,67617
	0,9		70,314	0,90026
0,4	0,1	8	0,81489	
	0,2		3,2612	
	0,3		7,3537	
	0,4		13,151	
	0,5		20,81	
	0,6		30,711	
	0,7		43,682	
	0,8		61,781	0,88316
	0,9		91,839	1,1759

(s – параметр, σ – вещественная постоянная, подчиняющаяся некоторым ограничительным условиям).

В частности, для силы P , сосредоточенной в точке $r = r_0$, получим

$$f(r) = \frac{P}{2\pi i r_0} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-(s+3)} ds \quad (8)$$

Для изображения прогиба W^0 из уравнения $\Delta W^0 = 0$ имеем

$$W^0 = r^{-s-2} (C(s) \cos((s+2)\theta) + D(s) \sin((s+2)\theta))$$

($C(s), D(s)$ – искомые функции).

Используя граничные условия $w^0|_L = 0, \theta = 0$, где L – прямойный заземленный край (фигура), получим $C(s) = 0$.

Учитывая граничные условия на свободном краю пластины, имеем $(Q_t^0)_{\theta=\alpha_1} = f(r)$. (Функция $f(r)$

определяется по формуле (8), Q_t^0 – тангенциальная перерезывающая сила.) Тогда

$$D(s) = \frac{Pr_0^{s+2}}{2hG'(s+2) \cos((s+2)\alpha_1)k}$$

Для искомого прогиба после преобразований получаем [13]

$$w^0 = \frac{P}{4hG'\pi k} \ln \left[\frac{\text{ch } \xi + \sin \eta}{\text{ch } \xi - \sin \eta} \right]$$

$$\xi = \frac{\pi}{2\alpha_1} \ln \frac{r_0}{r}, \quad \eta = \frac{\pi\theta}{2\alpha_1} \quad (9)$$

При $r = r_0, \theta = \alpha_1$ (свободный край) имеем логарифмическую особенность для прогиба пластины w^0 . При $G' \rightarrow \infty$ (классический случай) $w^0 \rightarrow 0$.

Физическое уравнение для перерезывающих сил приводит к выражению

$$Q_t^0 = \frac{P}{2r\alpha_1} \frac{\text{ch } \xi \cos \eta}{\text{ch}^2 \xi - \sin^2 \eta} \quad (10)$$

Полный прогиб w определяется выражением (3). Использование выражения (10) для построения

эпюр перерезывающих сил более рационально, по сравнению с классическим рассмотрением, а также может дать значительно более точные результаты [3, 4]. При этом удовлетворяются естественные граничные условия на краю пластины.

Результаты расчетов прогибов при нулевом ν и $\alpha_1 = \pi/4$ приведены в таблице. (ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга). Из таблицы, в частности, следует, что при $2h/r_0 = 0,4$; $E/G' = 8$; $r/r_0 = 0,9$; отношение w/w^* составляет 2,1759.

Или при $2h/r_0 = 0,4$; $E/G' = 8$; $r/r_0 = 0,8$; отношение w/w^* составляет 1,88316. Приводимые результаты указывают на существенное влияние деформации поперечного сдвига на прогиб пластины, что обуславливает необходимость уточнения рассматриваемой задачи. Отметим, что $w^0/w^* \sim E/G'$, а $w^0/w^* = 1 + w/w^*$.

Это позволяет по приводимым в таблице результатам, например, при $E/G' = 20$; 40; 60 легко указать более сильное влияние деформации поперечного сдвига на прогиб пластины. Так, при $2h/r_0 = 0,4$; $E/G' = 40$; $r/r_0 = 0,9$ отношение w/w^* составляет 6,8795. Для сравнения (таблица) необходимо отметить, что прогиб w^* при $r = r_0$ составляет $0,0815Pr_0^2/D$ [1, 9].

Проведенные сравнения (таблица) показывают, что эффект поперечного сдвига для пластины определяется толщиной пластины и отношением E/G' , равным нулю в классической постановке задачи ($G' \rightarrow \infty$), т.е. классическая теория совершенно не реагирует на изменения отношения E/G' .

Применение принципа соответствия [14] позволяет сделать обобщение полученных результатов на вязкоупругие пластины. Трансформация результатов от упругой к вязкоупругой задаче осуществляется следующим образом:

$$P/D \rightarrow \int_0^t \Pi(t-s)dP(s) + (2B_0)^{-1} \int_0^t g_{12}(t-s)dP(s) \quad (11)$$

$$P/G' \rightarrow \int_0^t \Pi_0(t-s)dP(s), \quad P = P(t) \quad (12)$$

(B_0 , $\Pi(t)$, $g_{12}(t)$ – величины, определяемые экспериментально [14]. B_0 – объемный модуль упругости; $\Pi(t)$ – функция ползучести; $g_{12}(t)$ – функция, значения которой определяются коэффициентом Пуассона; $\Pi_0(t)$ – функция ползучести, определяемая деформацией поперечного сдвига; t – время; s – параметр).

Уточнение для рассматриваемой задачи с позиций непосредственно сдвиговой модели Тимошенко до настоящего времени не получено.

Случай равномерного распределения касательных и нормальных напряжений по толщине, соответствующий отдельному рассмотрению деформации поперечного сдвига [6–8], непосредственно следует из сдвиговой модели Тимошенко при $z \rightarrow 0$ (рассматривается срединная поверхность оболочки).

ЛИТЕРАТУРА

1. Woinowsky-Krieger S. Über die Anwendung der Mellin-Transformation zur Lösung einer Aufgabe der Plattenbiegung // Ing-Arch. 1952. Bd. 20. H. 6. S. 391–397.
2. Koiter W.T. Einige ergänzende Bemerkungen zum Aufsatz des Herr Woinowsky-Krieger im Ing.-Arch. Bd. 20. S. 391 // Ing.-Arch. 1953. Bd. 21. H. 5/6. S. 381.
3. Аксентян О.К., Ворович И.И. Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 589–596.
4. Пелех Б.Л. К определению коэффициентов концентрации при изгибе плит с отверстиями // Прикл. мех. 1965. Т. 1. Вып. 7. С. 139–143.
5. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. // Тр. Тбил. мат. ин-та им. Размадзе. АН ГССР. 1965. Т. 30. 103 с.

6. *Медведков О.И.* Определение прогиба призматических оболочек // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 6. С. 46–52.
7. *Медведков О.И., Зеленев Ю.В.* Деформационные свойства полимерных композиционных материалов при статическом и динамическом видах нагружения // Применение полимерных композиционных материалов в машиностроении. Ворошиловград: 1987. С. 211–212.
8. *Медведков О.И.* Описание особенностей вязкоупругих свойств композиционных материалов // Релаксационные явления и свойства полимерных материалов. Тез. докл. Всесоюз. конф. с международным участием. Воронеж, 1990. С. 50.
9. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
10. *Болотин В.В., Москаленко В.Н.* Пластины и оболочки из армированных материалов. Основные уравнения, количественные результаты // Докл. научно-техн. конф. по итогам научно-исследовательских работ за 1966–1967 г. МЭИ. Секц. энергомашиностроит. Подсекция динамики и прочности машин. М.: МЭИ, 1967. С. 26–45.
11. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
12. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
13. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 542 с.
14. *Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г.* Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: 1983. 239 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.IX.1992