УДК 539.3

© 1994 г. Б.Е. Победря

ЗАДАЧА В НАПРЯЖЕНИЯХ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Новая постановка задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) в напряжениях, предложенная автором [1] и получившая дальнейшее развитие ([2–5] и др.), распространяется на анизотропные среды, физически линейные и нелинейные, при использовании тензорных базисов, связанных с определенной группой анизотропии [6] механических свойств. Подробно рассматривается случай трансверсальной изотропии.

1. Всюду предполагается введенной прямоугольная декартова система координат в R^3. Вместо "компоненты тензора" для сокращения часто пишется "тензор". Для выполнения условий совместности малых деформаций ε_{ij} [7]

$$\eta_{ij} \equiv \in_{ikl} \in_{jmn} \varepsilon_{kn,lm} = 0 \tag{1.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\eta_{ij} \equiv \Delta\varepsilon_{ij} + \theta_{,ij} - \varepsilon_{ik,kj} - \varepsilon_{jk,ki} = 0, \quad \theta \equiv \varepsilon_{ii} \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует, что

$$\eta^\circ \equiv \eta_{ij}\delta_{ij} \equiv 2(\Delta\theta - \varepsilon_{mn,mn}) = 0 \tag{1.3}$$

$$\eta_{ij,j} \equiv (\Delta\theta - \varepsilon_{mn,mn})_{,i} = 0$$

Пусть для группы G, характеризующей некоторую анизотропию механических свойств, построен тензорный базис. Каждый тензор, входящий в этот базис, инвариантен относительно группы G [6]. Сконструируем на основе этого базиса тензоры второго ранга $a_{ij}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, ..., N$; $N \leq 3$), которые в сумме составляют единичный тензор δ_{ij} и попарно ортогональны, т.е.

$$\sum_{\alpha=1}^{N} a_{ij}^{(\alpha)} = \delta_{ij}, \quad \frac{a_{ij}^{(\alpha)} a_{ij}^{(\beta)}}{a_{(\alpha)} a_{(\beta)}} = \delta_{\alpha\beta}, \quad a_{(\alpha)} \equiv \sqrt{a_{ij}^{(\alpha)} a_{ij}^{(\alpha)}} \tag{1.4}$$

Заметим также, что справедливы соотношения

$$a_{ik}^{(\alpha)} a_{kj}^{(\beta)} = a_{ij}^{(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} \tag{1.5}$$

Рассмотрим теперь тензор несовместности η_{ij} (1.2). Его линейные инварианты образуются при помощи тензорного базиса группы G:

$$\eta_{(\alpha)} \equiv \eta_{ij} a_{ij}^{(\alpha)} \tag{1.6}$$

Из первых соотношений (1.3), (1.4) и (1.6) следует, что

$$\eta^\circ \equiv \eta_{ij}\delta_{ij} \equiv \eta_{ij} \sum_{\alpha=1}^{N} a_{ij}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^{N} \eta_{(\alpha)} \tag{1.7}$$

Пусть $\xi^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, ..., N$) – некоторые, пока произвольные, числа. Тогда тензор H_{ij}, построенный следующим образом:

$$H_{ij} = \eta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{N} \xi^{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} a_{ij}^{(\alpha)} \tag{1.8}$$

обращается в нуль вместе с тензором η_{ij}.

В самом деле, из (1.2), согласно (1.6), следует, что

$$\eta_{(\alpha)} = 0 \tag{1.9}$$

А поэтому из (1.8) вытекает, что

$$H_{ij} = 0 \tag{1.10}$$

Если же выполнено равенство (1.10), то, свертывая тензор H_{ij} с тензором базиса $a_{ij}^{(\beta)}$ ($\beta = 1, ..., N$), получим из (1.8) и второго соотношения (1.4)

$$H_{ij} a_{ij}^{(\beta)} = \eta_{(\beta)} + \xi^{(\beta)} \eta_{(\beta)} (a_{(\alpha)})^2 \tag{1.11}$$

Отсюда следует выполнение условий (1.9), если

$$\xi^{(\alpha)} \neq -(a_{(\alpha)})^{-2}, \quad \alpha = 1, \ ..., \ N \tag{1.12}$$

Поэтому из (1.8) и (1.10) следует и условие (1.2).

Итак, условия совместности (1.9), (1.10), условия совместности (1.2) и условия совместности (1.1) эквивалентны между собой при выполнении неравенств (1.12).

2. Пусть R_{ij} – положительно определенный оператор. Тогда из условия

$$A_i \equiv R_{ij}(\sigma_{jk,k} + \rho F_j) = 0 \tag{2.1}$$

следует

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0 \tag{2.2}$$

Образуем линейные инварианты тензора $A_{ij} \equiv A_{i,j} + A_{j,i}$:

$$A_{(\alpha)} \equiv A_{ij} a_{ij}^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, \ ..., \ N \tag{2.3}$$

По аналогии с (1.7) имеем

$$A^\circ \equiv A_{ij}\delta_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} A_{(\alpha)} \tag{2.4}$$

Очевидно, что для удовлетворения условиям

$$A_{ij} = 0 \tag{2.5}$$

необходимо и достаточно удовлетворение условий

$$\overline{A}_{ij} \equiv A_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{N} \xi^{(\alpha)} A_{(\alpha)} a_{ij}^{(\alpha)} = 0 \tag{2.6}$$

если справедливы неравенства (1.12).

В самом деле, из (2.3) и (2.4) следует соотношение (2.6). Пусть теперь задано (2.6). Свернем его с каждым тензором базиса $a_{ij}^{(\beta)}$ ($\beta = 1, ..., N$). Тогда на основании определений (2.3), (1.4) получим

$$\overline{A}_{ij}a_{ij}^{(\beta)} \equiv A_\beta + \xi^{(\beta)}A_{(\beta)}(a_{(\beta)})^2 = 0 \tag{2.7}$$

При выполнении условия (1.12) из (2.7) следует

$$A_{(\alpha)} = 0, \ \ \alpha = 1, \ \ldots, \ N \tag{2.8}$$

Поэтому из (2.6) следует (2.5).

Пусть теперь определяющие соотношения МДТТ (физически линейные или нелинейные) позволяют выразить тензор деформаций ε_{ij} через напряжения σ_{ij}. После проведенной замены обозначим условно тензор H_{ij} (1.8) через $H_{ij}(\sigma)$.

Образуем тензор

$$\overline{H}_{ij}(\sigma) \equiv H_{ij}(\sigma) + \overline{A}_{ij} \tag{2.9}$$

Из соотношений (2.1) и (2.2) следует, что введенный тензор H_{ij} удовлетворяет уравнениям

$$H_{ij}(\sigma) = 0 \tag{2.10}$$

Новая постановка задачи МДТТ для анизотропных сред заключается в отыскании достаточно гладкого поля напряжений σ_{ij}, удовлетворяющих в односвязной области трехмерного евклидова пространства уравнениям (2.10) при выполнении на границе этой области – некоторой гладкой поверхности Σ – граничных условий

$$\sigma_{ij}n_j\big|_\Sigma = S_i^0 \ \ (\sigma_{ij,j} + \rho F_i)\big|_\Sigma = 0 \tag{2.11}$$

где n_j – компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности, F_i – массовые, S_i^0 – поверхностные силы.

Докажем, что решение поставленной задачи (2.10), (2.11) удовлетворяет уравнениям равновесия (2.2) во всей области и условиям совместности (1.1).

Для этого свернем выражение (2.8) с каждым тензором базиса $a_{ij}^{(\beta)}$, $\beta = 1, \ldots, N$. Тогда на основании (1.11) и (2.7) получим

$$\overline{H}_{ij}(\sigma)a_{ij}^{(\beta)} \equiv (\eta_{(\beta)} + A_{(\beta)})(1 + \xi^{(\beta)}(a_{(\beta)})^2) = 0$$

откуда при выполнении условий (1.9) следует

$$\eta_{(\beta)} + A_{(\beta)} = 0$$

Продифференцируем теперь (2.9) по j-й координате:

$$\overline{H}_{ij,j}(\sigma) = H_{ij,j}(\sigma) + \overline{A}_{ij,j} \tag{2.12}$$

Рассмотрим каждое из слагаемых в правой части (2.12). Из (1.3) и (1.8) следует, что

$$H_{ij,j} = \tfrac{1}{2}\eta^{\circ}_{,i} + \sum_{\alpha=1}^{N}\xi^{(\alpha)}a_{ij}^{(\alpha)}\eta_{(\alpha),j}$$

а при учете (1.7) получим

$$H_{ij,j} = \sum_{\alpha=1}^{N}(\tfrac{1}{2}\delta_{ij} + \xi^{(\alpha)}a_{ij}^{(\alpha)})\eta_{(\alpha),j} \tag{2.13}$$

Для второго слагаемого в (2.12) из (2.6) имеем при учете (2.4):

$$\overline{A}_{ij,j} = \Delta A_i + \sum_{\alpha=1}^{N}(\tfrac{1}{2}\delta_{ij} + \xi^{(\alpha)}a_{ij}^{(\alpha)})A_{(\alpha),j} \tag{2.14}$$

Подставляя теперь выражения (2.14) и (2.13) в (2.12), получим

$$\overline{H}_{ij,j}(\sigma) = \Delta A_i + \sum_{\alpha=1}^{N}(\tfrac{1}{2}\delta_{ij} + \xi^{(\alpha)}a_{ij}^{(\alpha)})(\eta_{(\alpha)} + A_{(\alpha)})_{,j} = 0 \qquad (2.15)$$

Однако согласно (2.12) сумма в правой части (2.15) обращается в нуль, поэтому $\Delta A_i = 0$, т.е. A_i – гармонический вектор. На границе рассматриваемой односвязной области этот вектор, согласно (2.1) и (2.11), обращается в нуль. Следовательно, он равен нулю и внутри этой области. Поэтому уравнения равновесия (2.2) удовлетворяются всюду в области. Тогда из (2.10) в соответствии с (2.9) следует равенство (1.10), а из него получаются (1.1) и (1.2).

3. Результат, полученный в разд. 2, справедлив для любой физически нелинейной среды, обладающей анизотропией механических свойств.

В качестве примера рассмотрим трансверсально-изотропную среду. Для такой среды тензорный базис состоит из двух тензоров [6]

$$a_{ij}^{(1)} \equiv a_{ij} = \delta_{ij} - l_i l_j, \quad a_{(1)} = \sqrt{2}$$

$$a_{ij}^{(2)} \equiv l_i l_j, \quad a_{(2)} = 1$$

где единичный вектор l_i характеризует направление оси трансверсальной изотропии.

Тензор деформации ε_{ij} может быть представлен в виде суммы четырех попарно ортогональных тензоров:

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\tilde{\theta}\, a_{ij} + \varepsilon^{\circ} l_i l_j + p_{ij} + 2q_{ij} \qquad (3.1)$$

где линейные инварианты тензора деформаций $\tilde{\theta}$ и ε^0 образованы сверткой тензора деформации с тензорами базиса

$$\tilde{\theta} \equiv a_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon^{\circ} \equiv l_i l_j \varepsilon_{ij}$$

а девиаторы p_{ij} и q_{ij} имеют вид

$$q_{ij} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{ik} l_k l_j + \varepsilon_{jk} l_k l_i) - \varepsilon^{\circ} l_i l_j \qquad (3.2)$$

$$p_{ij} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{ik} a_{kj} + \varepsilon_{jk} a_{ki}) - \tfrac{1}{2}\tilde{\theta}\, a_{ij} - q_{ij}$$

Формулы (3.2) следуют из тождества

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{ik} a_{kj} + \varepsilon_{jk} a_{ki}) + \tfrac{1}{2} l_k (\varepsilon_{ik} l_j + \varepsilon_{jk} l_i)$$

Отметим также полезные тождества

$$p_{ij} l_j = 0, \quad q_{ij} l_j = l_k q_{kj} a_{ji} = \tfrac{1}{2} l_k \varepsilon_{kj} a_{ji} \qquad (3.3)$$

В линейной теории упругости деформации связаны с напряжениями законом Гука [7]

$$\varepsilon_{ij} = J_{ijkl}\sigma_{kl} \qquad (3.4)$$

где J_{ijkl} – тензор упругих податливостей, который для трансверсально-анизотропной среды имеет пять независимых констант

$$J_{ijkl} = \mu_1 a_{ij} a_{kl} + \mu_2 (a_{ij} l_k l_l + a_{kl} l_i l_j) + \mu_3 l_i l_j l_k l_l + \mu_4 (a_{ik} a_{jl} + a_{il} a_{jk}) + \qquad (3.5)$$

$$+ \mu_5 (a_{ik} l_j l_l + a_{il} l_j l_k + a_{jk} l_i l_l + a_{jl} l_i l_k)$$

Аналогично тензору деформаций (3.1) представим тензор напряжений в виде суммы четырех попарно ортогональных тензоров

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma} a_{ij} + \sigma^\circ l_i l_j + P_{ij} + 2Q_{ij} \tag{3.6}$$

$$\tilde{\sigma} \equiv \tfrac{1}{2} a_{ij}\sigma_{ij}, \quad \sigma^\circ = l_i l_j \sigma_{ij}$$

$$Q_{ij} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{ik} l_k l_j + \sigma_{jk} l_k l_i) - \sigma^\circ l_i l_j$$

$$P_{ij} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{ik} a_{kj} + \sigma_{jk} a_{ki}) - \tilde{\sigma} a_{ij} - Q_{ij}$$

Подставив теперь разложения (3.1), (3.5), (3.6) в формулу (3.4) и производя необходимые свертки, учитывающие формулы (1.5), (3.3), получим

$$\tfrac{1}{2}\tilde{\theta} a_{ij} + \varepsilon^\circ l_i l_j + p_{ij} + 2q_{ij} = (\mu_1 + \mu_4) a_{ij}\tilde{\sigma} + \mu_2 l_i l_j \tilde{\sigma} + \tag{3.7}$$

$$+ \, (\mu_2 a_{ij} + \mu_3 l_i l_j)\sigma^\circ + 2\mu_4 P_{ij} + 4\mu_5 (Q_{im} l_m l_j + Q_{jm} l_m l_i)$$

Свертывая левую и правую части (3.7) сначала с a_{ij}, а затем с $l_i l_j$, получим соответственно

$$\tilde{\theta} = (\mu_1 + \mu_4)\tilde{\sigma} + \mu_2 \sigma^\circ, \quad \varepsilon^\circ = \mu_2 \tilde{\sigma} + \mu_3 \sigma^\circ \tag{3.8}$$

Вычитая теперь из равенства (3.7) первое равенство (3.8), умноженное на $^1/_2\, a_{ij}$, и второе равенство (3.8), умноженное на $l_i l_j$, получим

$$p_{ij} + 2q_{ij} = 2\mu_4 P_{ij} + 4\mu_5 (Q_{im} l_m l_j + Q_{jm} l_m l_i) \tag{3.9}$$

Свертывая левую и правую части (3.9) с $a_{ik} a_{jl}$ и учитывая (3.3), получим

$$p_{kl} = 2\mu_4 P_{kl} \tag{3.10}$$

Принимая во внимание тождество

$$Q_{im} l_m l_j + Q_{jm} l_m l_i = Q_{ij}$$

получим из (3.9)

$$q_{ij} = 2\mu_5 Q_{ij} \tag{3.11}$$

Итак, для трансверсально-изотропной среды равенство (3.4) эквивалентно двум соотношениям (3.8), связывающим линейные инварианты тензоров деформаций и напряжений, и двум соотношениям (3.10) и (3.11), показывающим пропорциональность двух девиаторов тензоров деформаций и напряжений.

Запишем для трансверсально-изотропной среды уравнения (2.10). Для этого оператор Лапласа представим в виде

$$\Delta \equiv \delta_{ij}\partial_i\partial_j = (a_{ij} + l_i l_j)\partial_i\partial_j = \tilde{\Delta} + \Delta^\circ$$

$$\tilde{\Delta} \equiv a_{ij}\partial_i\partial_j, \quad \Delta^\circ \equiv (l_k \partial_k)^2$$

Из (1.2) имеем

$$\eta_{ij} = (\tilde{\Delta} + \Delta^\circ)(\tfrac{1}{2}\tilde{\theta} a_{ij} + \varepsilon^\circ l_i l_j + p_{ij} + 2q_{ij}) + \tilde{\theta}_{,ij} + \varepsilon^\circ_{,ij} - \tfrac{1}{2}\tilde{\theta}_{,kj} a_{ik} - \tag{3.12}$$

$$- \varepsilon^\circ_{,kj} l_i l_k - p_{ik,kj} - 2q_{ik,kj} - \tfrac{1}{2}\tilde{\theta}_{,kj} a_{jk} - \varepsilon^\circ_{,ki} l_j l_k - p_{jk,ki} - 2q_{jk,ki}$$

Тогда согласно (1.6)

$$\eta_{(1)} \equiv \eta_{ij}a_{ij} = \tilde{\Delta}\varepsilon^\circ + \Delta^\circ\tilde{\theta} - 2q_{mn,mn} + \tilde{\Delta}\tilde{\theta} - 2p_{mn,mn} \qquad (3.13)$$

$$\eta_{(2)} \equiv \eta_{ij}l_i l_j = \tilde{\Delta}\varepsilon^\circ + \Delta^\circ\tilde{\theta} - 2q_{mn,mn}$$

Примем для простоты оператор R_{ij} (2.1) в виде

$$R_{ij} = a_{ij}R_{(1)} + l_i l_j R_{(2)}$$

Тогда согласно (2.3) имеем

$$A_{(1)} \equiv A_{ij}a_{ij} = 2R_{(1)}a_{ij}(\sigma_{ik,kj} + \rho F_{i,j}) \qquad (3.14)$$

$$A_{(2)} \equiv A_{ij}l_i l_j = 2R_{(2)}l_i l_j(\sigma_{ik,kj} + \rho F_{i,j})$$

Выразим в соотношениях (3.12), (3.13) деформации через напряжения по формулам (3.8), (3.10), (3.11) и подставим результат в (1.8) и (2.9).

Тогда, полагая

$$b_{ij} \equiv \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_4)\ a_{ij} + \mu_2 l_i l_j,\quad c_{ij} \equiv \tfrac{1}{2}\mu_2 a_{ij} + \mu_3 l_i l_j$$

получим уравнения (2.10) в виде

$$\Delta(b_{ij}\tilde{\sigma} + c_{ij}\sigma^\circ + 2\mu_4 P_{ij} + 4\mu_5 Q_{ij}) + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_4)\tilde{\sigma}_{,ij} + (\mu_2 + \mu_3)\sigma^\circ_{,ij} - \qquad (3.15)$$

$$-\ (b_{ik}\tilde{\sigma}_{,kj} + b_{jk}\tilde{\sigma}_{,ki}) - (c_{ik}\sigma^\circ_{,kj} + c_{jk}\sigma^\circ_{,ki}) - 2\mu_4(P_{ik,kj} + P_{jk,ki}) - 4\mu_5(Q_{ik,kj} + Q_{jk,ki}) +$$

$$+\ a_{ij}\xi^{(1)}[\mu_2\tilde{\Delta}\tilde{\sigma} + \mu_3\tilde{\Delta}\sigma^\circ + (\mu_1 + \mu_4)\ \Delta\tilde{\sigma} + \mu_2\Delta\sigma^\circ - 4\mu_4 P_{mn,mn} - 4\mu_5 Q_{mn,mn}] +$$

$$+\ (R_{(1)}a_{ik} + R_{(2)}l_i l_k)(\sigma_{kl,lj} + \rho F_{k,j}) + (R_{(1)}a_{jk} + R_{(2)}l_j l_k)(\sigma_{kl,li} + \rho F_{k,i}) +$$

$$+ a_{ij}\xi^{(1)}A_{(1)} + l_i l_j \xi^{(2)}A_{(2)} = 0$$

(величины $A_{(1)}$ и $A_{(2)}$ определены в (3.14))

Уравнения (3.15) содержат четыре произвольных постоянных, две из них $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ – безразмерные, для которых, согласно (1.12)

$$\xi^{(1)} \neq -\tfrac{1}{2},\quad \xi^{(2)} \neq -1$$

и две $R_{(1)}$ и $R_{(2)}$ отличны от нуля и имеют размерность упругих податливостей.

4. Для физически нелинейной среды уравнения (2.10) будут нелинейными за счет нелинейности определяющих соотношений, т.е. нелинейности первого слагаемого в (2.9).

Рассмотрим одно из возможных описаний таких определяющих соотношений на том же примере трансверсально-изотропной среды.

Предположим сначала, что определяющие соотношения потенциальны, т.е. существует такая скалярная функция W инвариантов тензора напряжений, что

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ji}}\right) \qquad (4.1)$$

Всякий симметричный тензор второго ранга для трансверсально-изотропной среды имеет пять независимых инвариантов [6]. Два из них – линейные $\tilde{\theta}$, σ°, два –

"квадратичные", которые можно связать с интенсивностями девиаторов:

$$P \equiv \sqrt{P_{ij}P_{ij}}, \quad Q \equiv \sqrt{2Q_{ij}Q_{ij}} \tag{4.2}$$

В качестве пятого инварианта выберем определитель суммы девиаторов P_{ij} и Q_{ij}, который обозначим через R:

$$R = P_{ij}Q_{jk}Q_{ki} \tag{4.3}$$

Итак, известна скалярная функция инвариантов

$$W = W(\tilde{\sigma}, \ \sigma^{\circ}, P, Q, R) \tag{4.4}$$

Производные инвариантов по тензору напряжения имеют вид

$$\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{1}{2}a_{ij}, \quad \frac{\partial\sigma^{\circ}}{\partial\sigma_{ij}} = l_i l_j, \quad \frac{\partial P}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{P_{ij}}{P}, \quad \frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{Q_{ij}}{Q}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial R}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{1}{2}(P_{ik}Q_{kj} + P_{jk}Q_{ki}) + Q_{ik}Q_{kj} - \frac{1}{4}Q^2(l_i l_j + \frac{1}{2}a_{ij})$$

Используя (4.5), получим из (4.1)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial\tilde{\sigma}}a_{ij} + \frac{\partial W}{\partial\sigma^{\circ}}l_i l_j + \frac{\partial W}{\partial P}\frac{P_{ij}}{P} + \frac{\partial W}{\partial Q_{ij}}\frac{Q_{ij}}{Q} + \frac{\partial W}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial\sigma_{ij}} \tag{4.6}$$

С определяющими соотношениями (4.6) поступим так же, как и в разд. 3 в линейном случае. Свернем соотношения (4.6) последовательно с a_{ij}, а затем с $l_i l_j$. Имеем

$$\tilde{\theta} = \partial W / \partial\tilde{\sigma}, \quad \varepsilon^{\circ} = \partial W / \partial\sigma^{\circ} \tag{4.7}$$

Тогда из (4.6), (4.7), (3.2) получим

$$p_{ij} + 2q_{ij} = \frac{\partial W}{\partial P}\frac{P_{ij}}{P} + \frac{\partial W}{\partial Q}\frac{Q_{ij}}{Q} + \frac{\partial W}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial\sigma_{ij}} \tag{4.8}$$

Свертывая (4.8) с тензором $a_{ik}a_{jl}$ и учитывая (4.5), получим

$$p_{ij} = \frac{\partial W}{\partial P}\frac{P_{ij}}{P} + \frac{\partial W}{\partial R}\left[Q_{ik}Q_{kj} - \frac{1}{4}Q^2\left(l_i l_j + \frac{1}{2}a\right)\right] \tag{4.9}$$

Из сравнения (4.8), (4.9) вытекает

$$q_{ij} = \frac{\partial W}{\partial Q}\frac{Q_{ij}}{Q} + \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial R}(P_{ik}Q_{kj} + P_{jk}Q_{ki}) \tag{4.10}$$

Итак, потенциальные определяющие соотношения для трансверсально-изотропной среды (4.1), (4.4) эквивалентны определяющим соотношениям (4.7), (4.9), (4.10).

Если определяющие соотношения квазилинейны [6], то W в (4.4) не зависит от пятого инварианта (4.3). В этом случае соотношения (4.9) и (4.10) имеют соответственно вид

$$p_{ij} = \frac{\partial W}{\partial P}\frac{P_{ij}}{P}, \quad q_{ij} = \frac{\partial W}{\partial Q}\frac{Q_{ij}}{Q} \tag{4.11}$$

Из (4.11) следует

$$p = \frac{\partial W}{\partial P}, \quad q = \frac{\partial W}{\partial Q}$$

Поэтому формулы (4.11) могут быть записаны в виде

$$p_{ij} = \frac{p}{P} P_{ij}, \quad q_{ij} = \frac{q}{Q} Q_{ij} \tag{4.12}$$

Если определяющие соотношения не потенциальны, то они могут быть записаны для тензора деформации (3.1) в виде, обобщающем (4.9), (4.10)

$$p_{ij} = f_1 P_{ij} / P + f_2 [Q_{ik} Q_{kj} - 1/4Q^2 (l_i l_j + 1/2a_{ij})] \tag{4.13}$$

$$q_{ij} = f_3 Q_{ij} / Q + f_4 (P_{ik} Q_{kj} + P_{jk} Q_{ki})$$

где функции f_1, f_2, f_3, f_4, так же как и линейные инварианты тензора деформаций $\tilde{\theta}$, ε°, зависят от пяти инвариантов тензора напряжений $\tilde{\sigma}$, σ°, P, Q, R (3.4), (4.2), (4.3).

Если определяющие соотношения являются квазилинейными, то в (4.13) следует положить $f_2 = f_4 = 0$ и тогда их можно записать в виде (4.12).

Заметим, что нелинейным может оказаться и второе слагаемое в (2.9) за счет выбора нелинейного оператора R_{ij} в (2.1). В этом случае массовые силы будут входить в уравнения (2.10) нелинейно, в отличие от уравнений (3.15).

Если определяющие соотношения зависят от температуры T, причем справедлива гипотеза Дюгамеля – Неймана [7], то в уравнения (3.9) температура войдет линейно даже в случае физической нелинейности. Тензор η_{ij} (1.2) будет дополнен слагаемым η_{ij}^T, которое для трансверсально-изотропного случая выражается следующим образом:

$$\eta_{ij}^T = (\alpha_1 a_{ij} + \alpha_2 l_i l_j)\Delta T + (\alpha_1 + 2\alpha_2)\ T_{,ij} - \alpha_1 (a_{ik} T_{,kj} + a_{jk} T_{,ki}) - \alpha_2 l_k (l_i T_{,kj} + l_j T_{,ki})$$

При этом

$$\eta_{(1)}^T = 2\alpha_1 \Delta^\circ T + (2\alpha_1 + \alpha_2)\tilde{\Delta} T$$

$$\eta_{(2)}^T = 2\alpha_1 \Delta^\circ T + \alpha_2 \tilde{\Delta} T$$

Здесь тензор теплового расширения α_{ij} представлен в виде

$$\alpha_{ij} = \alpha_1 a_{ij} + \alpha_2 l_i l_j$$

В заключение заметим, что для трансверсально-изотропной среды оператор дифференцирования ∂_i также может быть представлен в виде

$$\partial_i = \tilde{\partial}_i + l_i \partial^0; \quad \partial^0 = l_i \partial_i; \quad \tilde{\partial}_i = a_{ij} \partial_j$$

Поэтому имеем

$$\Delta \equiv \delta_{ij} \partial_i \partial_j = (a_{ij} + l_i l_j) \partial_i \partial_j = \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_i + (\partial^\circ)^2 = \tilde{\Delta} + \Delta^\circ$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б.Е.* О задачах в напряжениях // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 3. С. 564–567.
2. *Победря Б.Е.* Новая постановка задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 2. С. 295–297.
3. *Победря Б.Е.* Квазистатическая задача механики деформируемого твердого тела в напряжениях // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 205–214.
4. *Победря Б.Е., Шешенин С.В., Холматов Т.* Задача в напряжениях. Ташкент: Фан, 1988. 198 с.
5. *Лазарев М.И., Матехин Н.А.* О краевых задачах в постановке Победри. Пущино: Науч. центр биол. исследований АН СССР, 1988. 24 с.
6. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 263 с.
7. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Поступила в редакцию 17.III.1993

Москва