ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 58, Вып. 1 1994

УДК 532.529

© 1994 г. Ф.А. Кривошей

МОДЕЛЬ ДВУХСКОРОСТНОГО ДВИЖЕНИЯ БАРОТРОПНОЙ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

Получена модель двухскоростного движения баротропной двухфазной среды в виде системы параболических уравнений. Результаты численной реализации модели применительно к истечению вскипающей воды хорошо согласуются с экспериментом и расчетными данными других авторов.

Известно, что базисная система уравнений двухжидкостной модели двухфазного потока гиперболична. Различные физические допущения приводят к потере гиперболичности системы. Этому вопросу посвящен ряд работ [1–5], в которых рассмотрены методы компенсации негиперболичности, приводящие к значительному сокращению ее области. Полного ее исключения, как правило, достичь не удается. Обстоятельный анализ этого вопроса проведен в [4]. Различные алгоритмические процедуры, подавляющие развитие неустойчивости решения негиперболической системы, могут приводить к неоцениваемой численной диффузии. Источником трудностей является гипотеза о равенстве давлений фаз, и кажется естественным обращение к модели с неравными давлениями [5]. Однако для приложений эта модель практически не используется из-за отсутствия достоверной информации для построения системы замыкающих соотношений при определении коэффициентов и правых частей системы основных уравнений этой модели.

Покажем возможность получения модели двухфазного баротропного потока в результате изменения типа уравнений исходной системы, когда она перестает быть гиперболической. С этой целью используем процедуру стохастической аппроксимации флуктуирующего параметра и последующего осреднения уравнений по его реализациям.

1. Общепринятые операторы осреднения уравнений двухфазных потоков по числу реализаций, пространству и времени [1] тривиальны в том смысле, что используемые в этих операторах статистические свойства параметров дают только определение средних [6].

Рассмотрим подход, использующий нетривиальные статистические свойства параметров двухфазных сред. Имея в виду существование в потоках пространственно – временных флуктуаций параметров, можно использовать процедуру статистического осреднения, учитывающего стохастический характер флуктуирующих параметров. Известно (например, [7]), что во многих физических задачах процессы изменения параметров во времени можно рассматривать в приближении дельта-коррелированных случайных процессов. В частности, применительно к парожидкостным потокам такая аппроксимация флуктуирующих параметров имеет достаточно ясную физическую природу: спонтанные процессы образования паровых пузырей, их разрушение, образование пленок, снарядов можно трактовать как скачки статистических средних значений параметров для рассматриваемого дельта-коррелированного процесса. Для распределенных во времени значений параметров потока как результата одновременного действия совокупности факторов приемлемым приближением можно считать гауссовский характер флуктуаций. Такое приближение широко используется, например, при изучении турбулентных потоков [8–10].

Матричный вид системы исходных гиперболических уравнений в приближении баротропности фаз таков [1]:

$$\upsilon_{it} + \upsilon_i \upsilon_{ix} + \rho_i^{-1} p_x = \Pi_i \qquad (1.1)$$

$$p_t + A_i B_i + B_i C_i p_x + B_i \Delta\upsilon \varphi_{2x} = \Pi_3 \qquad (1.2)$$

$$\varphi_{2t} + \varphi_2 (1 - D_i) \upsilon_{2x} - D_i (1 - \varphi_2) \upsilon_{1x} + \qquad (1.3)$$

$$+ \rho_2^{-1} a_2^{-2} (\upsilon_2 - B_i C_i) \varphi_i p_x + (\upsilon_2 - D_i \Delta\upsilon) \varphi_{2x} = \Pi_4$$

$$h_{it} + \rho_i^{-1} A_i B_i - \rho_i^{-1} (\upsilon_i - B_i C_i) p_x + \rho_i^{-1} B_i \Delta\upsilon \varphi_{2x} + \upsilon_i h_{ix} = \Pi_{i+4} \qquad (1.4)$$

где $\varphi, \rho, p, h, \upsilon$ – соответственно объемная концентрация, плотность, давление, энтальпия и скорость фаз, a – скорость распространения акустических возмущений в фазе, x – координата, t – время, i = 1, 2 (1 – жидкая фаза, 2 – газовая фаза), П – правые части уравнений, $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$. Приняты следующие обозначения (суммирование по индексу i):

$$\Sigma \varphi_i \upsilon_{ix} = A_i, \quad \Sigma \langle \varphi_i \rangle \langle \upsilon_i \rangle = \langle A_i \rangle$$

$$\left(\Sigma \frac{\varphi_i}{\rho_i a_i^2}\right)^{-1} = B_i, \quad \Sigma \frac{\varphi_i \upsilon_i}{\rho_i a_i^2} = C_i$$

$$\Sigma \frac{\langle \varphi_i \rangle \langle \upsilon_i \rangle}{\rho_i a_i^2} = \langle C_i \rangle, \quad \upsilon_2 - \upsilon_1 = \Delta\upsilon$$

$$\langle \upsilon_2 \rangle - \langle \upsilon_1 \rangle = \langle \Delta\upsilon \rangle, \quad \frac{B_i \varphi_2}{\rho_2 a_2^2} = D_i$$

$$\frac{B_i \langle \varphi_2 \rangle}{\rho_2 a_2^2} = \langle D_i \rangle, \quad \Sigma \frac{\sigma_i^2 \langle \varphi_i \rangle}{\rho_i a_i^2} = F_i$$

$$\Sigma \frac{\rho_i a_i^2}{\langle \varphi_i \rangle} = G_i, \quad \Sigma \frac{\sigma_i^2}{\langle \varphi_i \rangle} = H_i$$

$$\Sigma \frac{\rho_i a_i^2 \sigma_i^2}{\langle \varphi_i \rangle} = K_i, \quad \sigma_2^2 - \sigma_1^2 = \Delta\sigma^2$$

Вследствие статистического характера процессов в двухфазных потоках имеют место флуктуации скорости жидкой и газовой фаз. Представим скорость фаз υ_i как случайную функцию, равную сумме осредненного и флуктуирующего слагаемых

$$\upsilon_i = \langle \upsilon_i \rangle + \delta\upsilon_i(x, t)$$

Полагая, что флуктуации скорости фаз могут быть описаны дельта-коррелированным гауссовским процессом, введем корреляционную функцию

$$\langle \delta\upsilon_i(x_1) \delta\upsilon_i(x_2) \rangle = 2\sigma_i^2 \delta(x_1 - x_2) \qquad (1.5)$$

где σ_i^2 – дисперсия скорости υ_i. Осредняя уравнения системы (1.1)–(1.4) по реализациям случайного процесса υ_i и раскрыв возникающие при этом статистические нелинейности по формуле Фурутцу–Новикова с учетом корреляции (1.5), получим систему уравнений для средних значений искомых параметров υ_i, p, φ_i, h_i:

$$\langle\upsilon_i\rangle_t + \langle\upsilon_i\rangle\langle\upsilon_i\rangle_x - 2\sigma_i^2\langle\upsilon_i\rangle_{xx} + \rho_i^{-1}\langle p\rangle_x = \langle\Pi_i\rangle \tag{1.6}$$

$$\langle p\rangle_t + \langle A_i\rangle B_i + B_i\langle C_i\rangle\langle p\rangle_x - 2B_i\langle F_i\rangle\langle p\rangle_{xx} + B_i\langle\Delta\upsilon\rangle\langle\varphi_2\rangle_x - \tag{1.7}$$

$$-2B_i[\Delta\sigma^2\langle\varphi_2\rangle_{xx} - H_i(\langle\varphi_2\rangle)^2] = \langle\Pi_3\rangle$$

$$\langle\varphi_2\rangle_t + \langle\varphi_2\rangle(1-\langle D_i\rangle)\langle\upsilon_2\rangle_x - \langle D_i\rangle(1-\langle\varphi_2\rangle)\langle\upsilon_1\rangle_x +$$

$$+G_i^{-1}\langle\Delta\upsilon\rangle\langle p\rangle_x - G_i^{-1}\Delta\sigma^2\langle p\rangle_{xx} + (\langle\upsilon_2\rangle - \langle D_i\rangle\langle\Delta\upsilon\rangle)\langle\varphi_2\rangle_x - 2(\sigma_2^2 - \langle D_i\rangle\Delta\sigma^2)\langle\varphi_2\rangle_x + \tag{1.8}$$

$$+2G_i^{-1}K_i(\langle\varphi_2\rangle_x)^2 = \langle\Pi_4\rangle$$

$$\langle h_i\rangle_t + \rho_i^{-1}\langle A_i\rangle B_i - \rho_i^{-1}(\langle\upsilon_i\rangle - B_i\langle C_i\rangle)\langle p\rangle_x + \tag{1.9}$$

$$+\rho_i^{-1}B_i\langle\Delta\upsilon\rangle\langle\varphi_2\rangle_x + \langle\upsilon_i\rangle\langle h_i\rangle_x + 2\rho_i^{-1}(\sigma_i^2 - B_iF_i)\langle p\rangle_{xx} -$$

$$-2\rho_i^{-1}B_i[\Delta\sigma^2\langle\varphi_2\rangle_{xx} - H_i(\langle\varphi_2\rangle_x)^2] - 2\sigma_i^2\langle h_i\rangle_{xx} = \langle\Pi_{i+4}\rangle$$

Таким образом, осреднение уравнений (1.1)–(1.4) по стохастическому параметру υ_i порождает параболическую систему. В частности, осреднение полной производной скорости по ее реализациям порождает оператор Бюргерса–Хопфа для среднего значения скорости, так что уравнения (1.6) аналогичны системе типа Бюргерса–Хопфа. Появление при вторых производных множителей σ_i^2, имеющих размерность кинематической вязкости, ассоциируется с методом "вязкости" в газодинамике [11]. Характерно, что скорости фаз – множители при первых пространственных производных давления – заменяются при вторых производных на дисперсии σ_i^2. Аналогично, скольжение $\langle\upsilon_2\rangle$–$\langle\upsilon_1\rangle$ заменяется на "скольжение" соответствующих дисперсий σ_2^2–σ_1^2.

Исследование условий корректности и свойств решений краевых задач для нелинейных параболических систем типа (1.6)–(1.9) связано со значительными трудностями, в настоящее время недостаточно изучены более простые системы двух уравнений с "вязкостью" типа Бюргерса–Хопфа [11].

2. С целью выяснения возможностей предлагаемой модели используем сравнение результатов ее численного интегрирования с экспериментом и с результатами по апробированным моделям. При этом систему (1.6)–(1.9) следует дополнить начальными, граничными условиями и замыкающими соотношениями, определяемыми постановкой конкретной задачи.

Сформулируем для системы (1.6)–(1.9) задачу [12, 13] об истечении вскипающей жидкости. Труба длиной L с постоянной площадью поперечного сечения, закрытая с обоих торцов мембранами, заполнена однородной недогретой до температуры насыщения T_s водой с давлением p_0 и температурой $T_{10} \leqslant T_s(p_0)$. В момент времени $t = 0$ мембрана на одном из торцов разрушается, и при $t > 0$ происходит истечение вскипающей воды в окружающую среду с давлением p_∞ причем $p_\infty \ll p_0$. Течение считаем адиабатическим, силами трения о стенки канала пренебрегаем.

Начальные условия для однородной жидкости имеют вид

$$t = 0:\ p(x,0) = p_0,\quad T_1(x,0) = T_{10} \tag{2.1}$$

$$\varphi_1(x,0) = 1,\quad \varphi_2(x,0) = 0$$

Граничное условие на закрытом торце трубы – условие непротекания, на открытом торце трубы – равенство давлений на срезе трубы и в окружающей среде:

$$x = 0:\ \upsilon = 0;\quad x = L:\ p = p_\infty \tag{2.2}$$

Систему (1.6)–(1.9) с краевыми условиями (2.1), (2.2) следует замкнуть уравнениями состояния фаз и соотношениями для межфазного теплообмена и интенсивности фазового перехода.

Интенсивность межфазного теплообмена в пузырьковом режиме определяется по формуле [14], учитывающей скольжение и эффекты, связанные с тепловым ростом пузырьков и конвективным переносом теплоты

$$\mathrm{Nu}_{1j} = \mathrm{Nu}_0 + 1{,}13\,\mathrm{Pe}^2\left(\frac{1}{13\,\mathrm{Ja}^{3,3}+\mathrm{Pe}^{1,5}} - \frac{6\,\mathrm{Ja}^{0,63}}{31\,\mathrm{Ja}^{4,3}+\mathrm{Pe}^2}\right)$$

$$\mathrm{Nu}_0 = 3{,}9\,\mathrm{Ja}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6\,\mathrm{Ja}}\right)^{2/3}+\frac{\pi}{6\,\mathrm{Ja}}\right]$$

Ja, Pe – соответственно числа Якоба и Пекле, $\mathrm{Pe} = d|\upsilon_1 - \upsilon_2|a_1^{-1}$, где a_1 – температуропроводность воды, индекс j относит величину к межфазной границе. Для диаметра пузырька d использована известная аппроксимация [12].

Тепловые потоки в единице объема при межфазном теплообмене таковы:

$$\bar{q}_{ji} = q_{ji}A_j = \alpha_{ji}(T_j - T_i)A_j$$

где A – площадь межфазной поверхности, отнесенная к единице объема, α – коэффициент теплоотдачи. В пузырьковом режиме паровая фаза близка к состоянию насыщения ($T_2 \approx T_s$), поэтому тепловой поток от межфазной поверхности к пару мал, и можно допустить, что межфазный теплообмен определяется тепловым потоком

$$q_{j1} = \alpha_{j1}(T_s - T_1)A_j$$

Для пузырькового режима площадь межфазной поверхности можно представить зависимостью [15]

$$A_j = 6\varphi d^{-1}$$

Тогда получим

$$\bar{q}_{j1} = 6\varphi\lambda_1 d^{-2}\,\mathrm{Nu}_1(T_s - T_1) \tag{2.3}$$

где λ_1 – теплопроводность воды.

Интенсивность фазового перехода Q в отсутствие межфазного трения, теплового и механического влияния стенок трубы имеет вид

$$Q = \bar{q}_{j1}r^{-1} \tag{2.4}$$

где r – теплота фазового перехода. Скорость движения межфазной поверхности, входящая в правые части уравнений системы (1.6)–(1.9), определяется по формуле [16]

$$\upsilon_j = 0{,}5(\upsilon_1 + \upsilon_2) \tag{2.5}$$

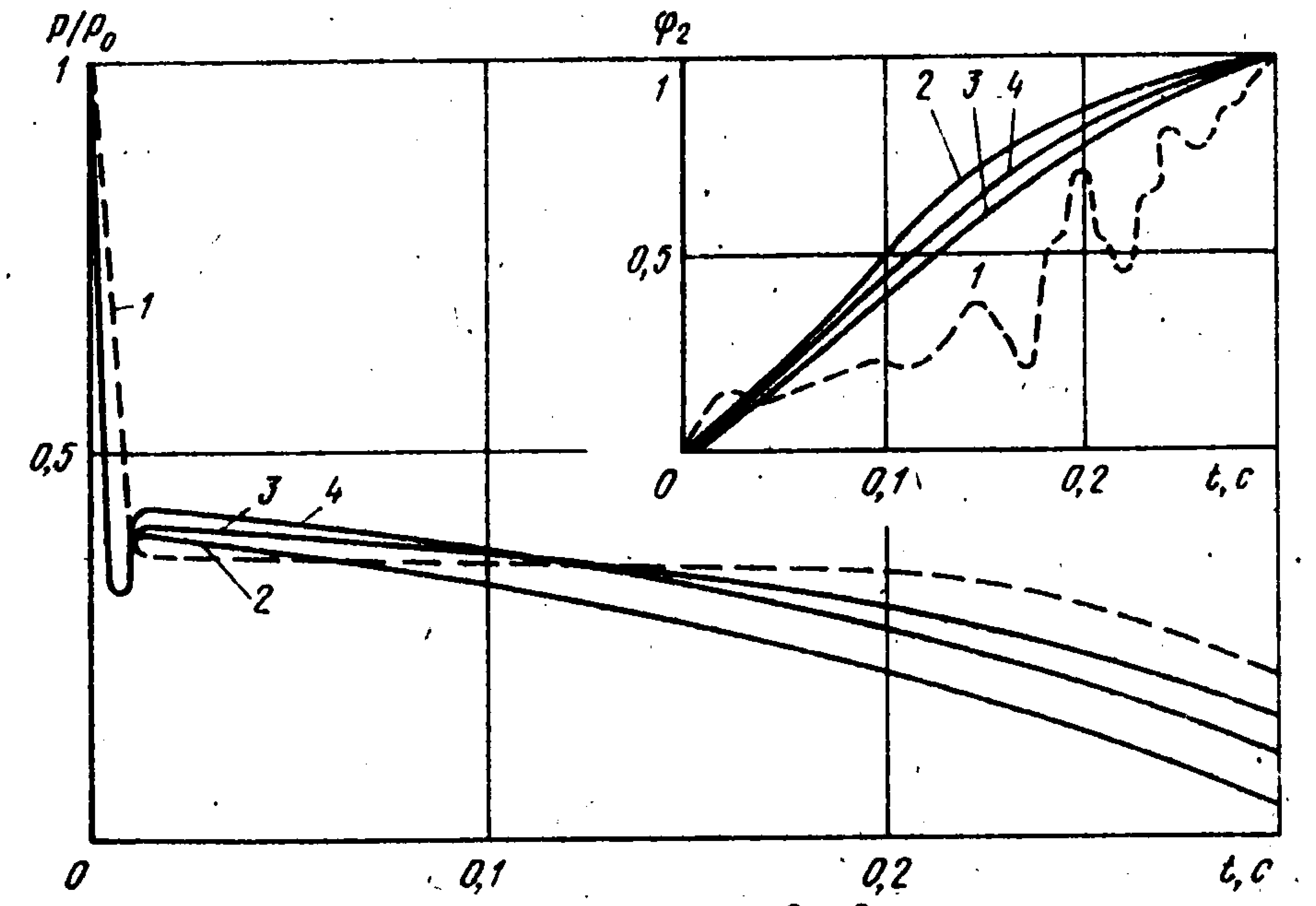
Численное интегрирование системы уравнений (1.6)–(1.9) с краевыми условиями (2.1), (2.2) и замыкающими соотношениями (2.3)–(2.5) выполнено по разностной схеме Лакса–Вендроффа с искусственной вязкостью, учитывающей эффекты нелинейностей [17]. Условие устойчивости этой схемы

$$(|\upsilon| + \bar{a})\Delta t/\Delta x < (1 + b^2/4)^{1/2} - b/2 \tag{2.6}$$

более ограничительно, чем условие Куранта, $\bar{a}$ – "замороженная" скорость звука, b – безразмерная постоянная порядка единицы, Δx, Δt – соответственно пространственный и временной шаги. Поскольку численные решения зависят от параметров σ_i^2, естественно связать их с условием устойчивости (2.6) и необходимым условием аппроксимации параболической системы [11]

$$(\Delta x)^2 / (2\Delta t) = \sigma_i^2 \tag{2.7}$$

Неопределенность в выражении (2.7) устранима, если учесть неравенство $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$. Тогда при фиксированных Δx значение σ_2^2 в правой части (2.7) соответствует меньшему временному шагу, что существенно на начальных стадиях вскипания при



высокой неравновесности потока. Полагая $b = \sigma_2^2/\sigma_1^2$ ($\sigma_1 \neq 0$), получаем необходимые условия для выбора величин Δx, Δt с учетом значений параметров σ_i^2. На начальных стадиях вскипания учитывались также ограничения на временной шаг интегрирования [12].

На фигуре представлены расчетные и экспериментальная кривые давления и объемного паросодержания в фиксированном сечении (x = 1,39 м от закрытого торца) при разгерметизации трубы длиной L = 4,1 м, заполненной водой при давлении p_0 = = 6,9 МПа. Принятые обозначения: 1 – эксперимент [18], 2 – результат [12] при T_0 = = 515 K, $n_0 = 0{,}5 \cdot 10^9$ м$^{-3}$ (n_0 – начальное число пузырьков), 3 – данная работа при x = 1,39 м, p_0 = 6,9 МПа, T_0 = 515 K, $\sigma_1^2 = 20$, $\sigma_2^2 = 25$, 4 – то же при $\sigma_1^2 = 60$, $\sigma_2^2 = 75$.

Видно, что в соответствии с прогнозом [13] о влиянии относительного движения фаз, учет этого фактора дает лучшее по сравнению с моделью [12] согласование расчетных 3, 4 и экспериментальных данных. Значения $\sigma_1^2 = 20$, $\sigma_2^2 = 25$ близки к оптимальным в смысле устойчивости схемы и объема вычислений: уменьшение значений σ_i^2 ведет к нарушению устойчивости схемы по временному шагу и вырождению параболической системы. Увеличение значений σ_i^2 связано с неоправданным уменьшением временного шага и ростом объема вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987, 464 с.
2. *Крайко А.Н., Стернин Л.Е.* К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 418–429.
3. *Овсянников Л.В.* Модели двухслойной "мелкой воды" // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
4. *Клебанов Л.А., Крошилин А.Е., Нигматулин Б.И., Нигматулин Р.И.* О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы уравнений двухскоростного движения двухфазных сред // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 83–95.
5. *Ransom V.H., Hicks D.L.* Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow // J. Comp. Phys. 1984. V. 53. № 1. P. 124–151.
6. *Иорданский С.В., Куликовский А.Г.* О движении жидкости, содержащей мелкие частицы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 4. С. 12–19.
7. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
8. *Крошилин А.Е., Кухаренко В.Н., Нигматулин Б.И.* Осаждение частиц на стенку канала в градиентном турбулентном дисперсном потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 57–63.
9. *Кузнецов В.Р., Сабельников В.А.* Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986. 287 с.
10. *Деревич И.В., Зайчик Л.И.* Уравнение для плотности вероятности скорости и температуры частиц в турбулентном потоке, моделируемом гауссовым случайным полем // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 767–774.
11. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
12. *Нигматулин Б.И., Сопленков К.И.* Исследование нестационарного истечения вскипающей жидкости из каналов в термодинамически неравновесном приближении // Теплофизика высоких температур. 1980. Т. 18. № 1. С. 118–131.
13. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 2. М.: Наука, 1987. 360 с.
14. *Крошилин А.Е., Крошилин В.Е., Нигматулин Б.И.* Влияние относительного движения и объемной концентрации пузырей на межфазный тепломассообмен в парожидкостных средах // Теплофизика высоких температур. 1984. Т. 22. № 2. С. 355–362.
15. *Кузнецов Ю.Н.* Теплообмен в проблеме безопасности ядерных реакторов. М.: Энергоатомиздат, 1989. 296 с.
16. *Banerjee S., Hancox W.T.* Transient thermohydraulics analysis for nuclear reactors // Heat Transf. 1978. Proc. 6 Jnt. Heat Transf. Conf. Toronto. Ottawa, 1978. V. 6. P. 311–337.
17. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
18. *Edwards A.R., O'Brien T.P.* Studies of phenomena connected with depressurization of water reactor // J. Brit. Nucl. Eng. Soc. 1970. V. 9. № 2. P. 125–135.

Киев

Поступила в редакцию
16.IX.1992