

УДК 532.5

© 1994 г. Н.Б. Ильинский, Д.А. Фокин

ПРОЕКТИРОВАНИЕ БЕСКАВИТАЦИОННЫХ ГИДРОПРОФИЛЕЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Суть предлагаемого метода заключается в целенаправленной модификации засасывающей поверхности профиля крыла для снижения величины максимальной скорости и недопущения кавитации. Математически задача сведена к смешанной обратной краевой задаче аэрогидродинамики, когда часть контура профиля задана, а часть отыскивается по заданному на ней распределению величины скорости. Предложен численно-аналитический метод решения, разработан и реализован на ЭВМ алгоритм построения и оптимизации бескавитационных профилей, приведены примеры рассчитанных профилей.

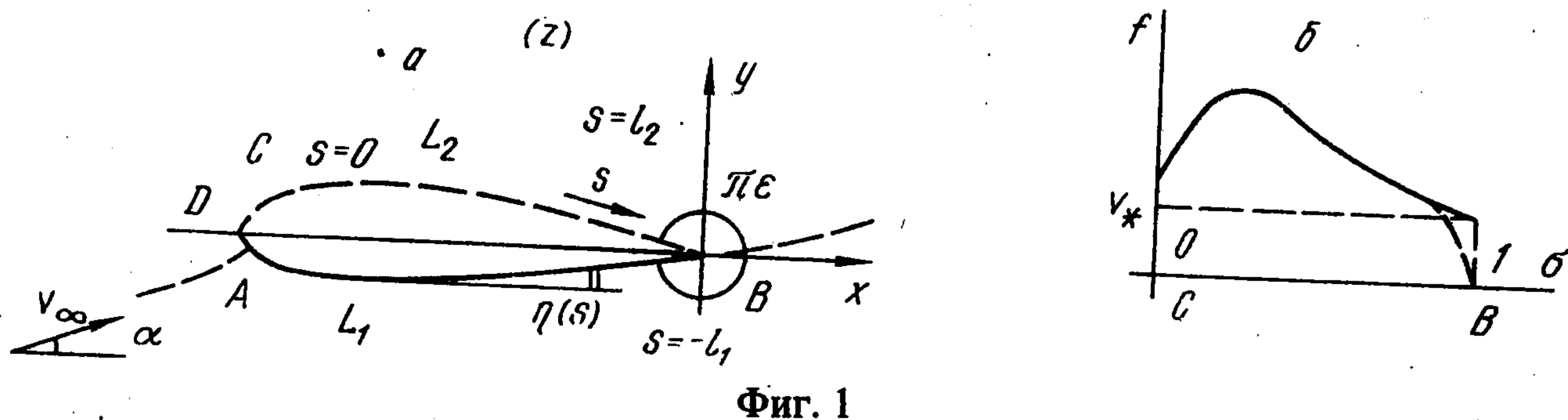
Известно, что при положительных углах атаки кавитация возникает на верхней засасывающей поверхности гидропрофиля (подводного крыла или лопасти гребного винта), что обусловлено пониженным давлением, то есть большими скоростями на этой поверхности. При определенных условиях избежать этого можно путем соответствующего выбора формы засасывающей поверхности профиля, требуя на ней ограничения величины скорости. Тогда в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости мы приходим к смешанной обратной краевой задаче для аналитических функций [1]. В предположении непроницаемости всего контура на его искомой части обычно задается распределение скорости v как функция одного из параметров: s – дуговой координаты, x – абсциссы, y – параметра в канонической области. Решение заключается в достраивании известной части контура гидропрофиля и определении его гидродинамических характеристик. Первыми работами в этом направлении, связанными с проектированием аэродинамических профилей, по-видимому, были [2–4] (см. также [5], с. 448–456). Обзор последующих работ по исследованию смешанных обратных краевых задач содержится, например, в [6].

Ниже рассматривается задача, когда искомый участок контура гидропрофиля отыскивается по распределению скорости v как функции дуговой координаты s , причем $v(s)$ задается из условия недопущения кавитации.

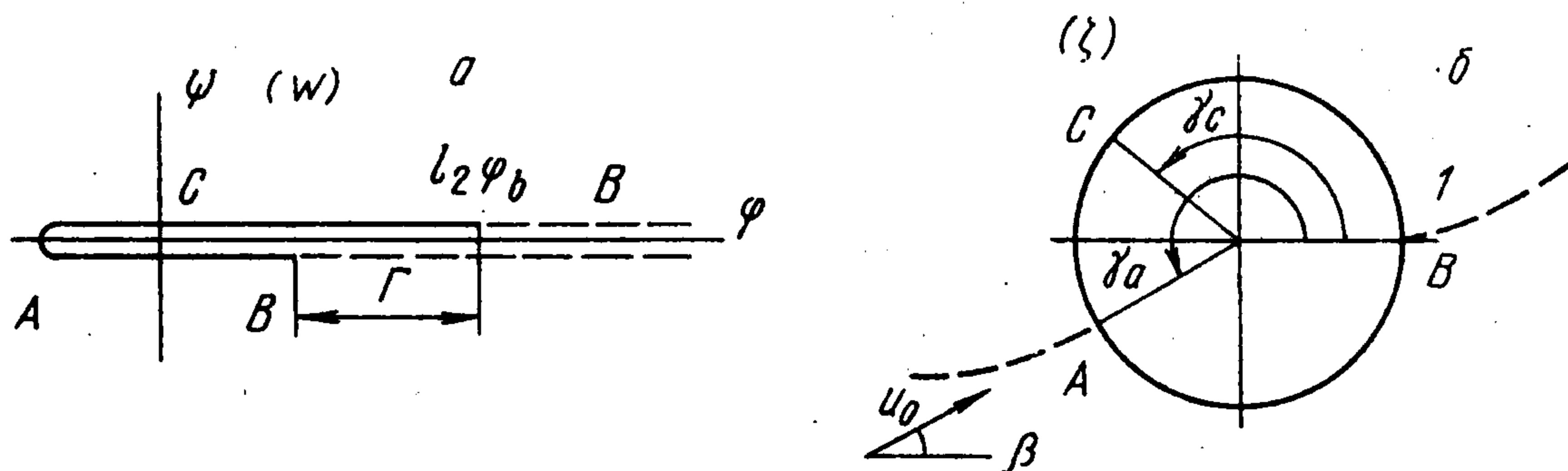
I. Постановка задачи. Непроницаемый крыловой профиль с гладким контуром L и заостренной задней кромкой B обтекается плавно в плоскости $z = x + iy$ установившимся потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью $v_{\infty} e^{i\alpha}$ на бесконечности (фиг. 1, а). На контуре L задана точка C , разделяющая его на две части – известную (L_1) и искомую (L_2). Вдоль L в направлении положительного обхода области течения отсчитывается дуговая координата s ($-l_1 \leq s \leq l_2$), причем в точке C выбрано $s = 0$. Форма известной части L_1 контура L задается уравнением

$$\eta = \eta(s), \quad -l_1 \leq s \leq 0$$

где η – угол между касательной к контуру профиля и положительным направлением



Фиг. 1



Фиг. 2

оси x . На искомой части L_2 контура L задано распределение модуля скорости потока

$$v = f(\sigma), \quad \sigma = s/l_2, \quad 0 \leq \sigma \leq 1 \quad (1.1)$$

где $f(\sigma)$ – положительная гладкая функция в интервале $[0, 1)$ (фиг. 1, б). Поведение $f(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow 1$ определяется величиной $\pi\epsilon$ ($1 < \epsilon \leq 2$) – внешнего к профилю угла в задней кромке: $f(1) = v_*$ при $\epsilon = 2$ и $f(1) = 0$ при $\epsilon \neq 2$ (штриховая линия в окрестности $\sigma = 1$ на фиг. 1, б).

Отметим, что в принятой постановке задачи точка разветвления потока A находится на известной части L_1 контура L и ее положение отыскивается в ходе решения. Задней критической точкой потока, согласно постулату Жуковского–Чаплыгина, является заостренная кромка B . Передняя кромка D профиля располагается на L_1 , что позволяет направить ось x вдоль хорды профиля BD . В этом случае α будет углом атаки.

Величины ϵ , v_∞ , l_1 , а также безразмерная циркуляция скорости потока $\Gamma^* = \Gamma/l_2$ по профилю задаются заранее (Γ – размерная циркуляция).

Требуется достроить контур профиля и определить его гидродинамические характеристики, при этом величины: l_2 – длина достраиваемой части, α – угол атаки находятся в процессе решения.

При сделанных предположениях существует комплексный потенциал течения $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где φ – потенциал скорости, ψ – функция тока. Так как на непроницаемом контуре функция $\psi = \text{const}$ (примем $\psi = 0$), то на L имеем $v = d\varphi/ds$, т.е. учитывая (1.1), на искомой части L_2 контура профиля с точностью до постоянной l_2 известно распределение потенциала скорости потока

$$\varphi(\sigma) = l_2 \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq 1 \quad (1.2)$$

Обозначим $\varphi_b = \varphi(1)/l_2$. Область изменения w , после проведения разреза по линии тока, сходящей с задней кромки, изображена на фиг. 2, а. Соответствующие точки в разных плоскостях обозначены одними и теми же буквами.

2. Решение. Введем в рассмотрение каноническую область – внешность единичного круга $|\zeta| \geq 1$ с указанным на фиг. 2, б соответствием точек. Решение задачи будет

заключаться в отыскании функции $z = z(\zeta)$, реализующей конформное отображение $|\zeta| \geq 1$ на внешность искомого профиля с нормировкой $z(1) = 0, z(\infty) = \infty$.

Обозначим $\zeta_c = e^{i\gamma_c}, \zeta_a = e^{i\gamma_a}$, — прообразы точек C и A в плоскости ζ . Как известно (см. например [7], с. 175) функция

$$w(\zeta) = u_0 \left[\frac{\zeta}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{\zeta} \right] - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta \ln \zeta + K \quad (2.1)$$

является комплексным потенциалом обтекания круга $|\zeta| \leq 1$ со скоростью $u_0 e^{i\beta}$ на бесконечности. Учитывая, что на границе круга, т.е. при $\zeta = e^{i\gamma}$, функция тока $\psi = 0$ и $\varphi \neq 0$ при ζ_a , а $w'(\zeta_a) = w'(1) = 0$, получим

$$K = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\gamma_c - \frac{\cos(\gamma_c - \beta)}{\sin \beta} \right], \quad u_0 = \frac{\Gamma}{4\pi \sin \beta}, \quad \gamma_a = \pi + 2\beta \quad (2.2)$$

Тогда, положив в (2.1) $\zeta = e^{i\gamma}$ и выделив действительную и мнимую части, найдем

$$\varphi^*(\gamma) = \operatorname{Re} w(e^{i\gamma}) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{\cos(\gamma - \beta) - \cos(\gamma_c - \beta)}{\sin \beta} - (\gamma - \gamma_c) \right] \quad (2.3)$$

$$\psi^*(\gamma) = \operatorname{Im} w(e^{i\gamma}) = 0$$

Предположим, что известны величины β, γ_c и монотонно убывающая функция $\sigma(\gamma)$, $0 \leq \gamma \leq \gamma_c$, устанавливающая соответствие точек дуги окружности $\zeta = e^{i\gamma}$ и контура L_2 при конформном отображении $z = z(\zeta)$. Рассмотрим аналитическую в области $|\zeta| > 1$ функцию $\chi(\zeta) = \ln(dw/dz) = \ln v - i\theta$, где θ — аргумент вектора скорости. Эта функция имеет логарифмические особенности в критических точках $\zeta = \zeta_a$ и $\zeta = 1$. Можно убедиться, что вспомогательная функция

$$F(\zeta) = (2 - \varepsilon) \ln(1 - 1/\zeta) + \ln(1 - e^{i\gamma_a}/\zeta).$$

имеет те же особенности, что и $\chi(\zeta)$. Тогда граничные значения действительной части функции $\Phi(\zeta) = \chi(\zeta) - F(\zeta)$ на дуге $0 < \gamma < \gamma_c$ будут

$$\operatorname{Re} \Phi(e^{i\gamma}) = S(\gamma) = \ln \left\{ f[\sigma(\gamma)] \left[2 \cos\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right) \left(2 \sin \frac{\gamma}{2} \right)^{2-\varepsilon} \right]^{-1} \right\}$$

Введем далее регулярную в области $|\zeta| \geq 1$ функцию $\tilde{\Phi}(\zeta)$ такую, что

$$\tilde{S}(\gamma) = \operatorname{Re} \tilde{\Phi}(e^{i\gamma}) = \begin{cases} S(\gamma), & 0 \leq \gamma \leq \gamma_c \\ S_*(\gamma), & \gamma_c \leq \gamma \leq 2\pi \end{cases}$$

Здесь $S_*(\gamma)$ — пока неизвестная гельдеровская функция, доопределяющая граничные значения реальной части аналитической вне круга $|\zeta| < 1$ функции $\tilde{\Phi}(\zeta)$ так, что $\tilde{S}(\gamma)$ является 2π -периодической гельдеровской функцией на всем интервале $0 \leq \gamma \leq 2\pi$. Тогда интегральное представление $\tilde{\Phi}(\zeta) = \tilde{S} - i\tilde{\theta}$ определится по формуле

$$\tilde{\Phi}(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\tau) \frac{\zeta + e^{i\tau}}{\zeta - e^{i\tau}} d\tau + ib_0$$

причем

$$\tilde{\theta}(\gamma) = -\operatorname{Im} \tilde{\Phi}(e^{i\gamma}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \tau}{2} d\tau - b_0$$

Постоянная b_0 выбирается так, чтобы $\tilde{\theta}(\gamma_c) = \eta(0)$.

Введем регулярную в полуплоскости $\operatorname{Im} t \geq 0$ комплексного переменного $t = \xi + i\eta$ функцию $G(t) = i(\tilde{\Phi} - \Phi)$. Переход в эту область от $|\zeta| \geq 1$ задается формулой

$$t = i \frac{\zeta + e^{i\gamma_c/2}}{\zeta - e^{i\gamma_c/2}} \operatorname{tg} \frac{\gamma_c}{4} \quad (2.4)$$

Для определения $G(t)$ имеем следующую краевую задачу:

$$\operatorname{Im} G = 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \geq 1, \quad \operatorname{Re} G = g(\xi) = \tilde{\theta}[\gamma(\xi)] - \eta[s(\xi)] \quad \text{при} \quad |\xi| \leq 1$$

где $\gamma(\xi)$ – функция, обратная к $\xi(\gamma) = \operatorname{Re} t(e^{i\gamma})$, $s(\xi)$ – искомая функция, устанавливающая соответствие между точками контура L_1 и точками отрезка $|\xi| \leq 1$. Интегральное представление $G(t)$ получим по формуле Келдыша–Седова

$$G(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g(\tau) d\tau}{(\tau-t)\sqrt{1-\tau^2}}$$

Тогда

$$\chi(\zeta) = \frac{\sqrt{1-t(\zeta)^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(\tau) d\tau}{[\tau-t(\zeta)]\sqrt{1-\tau^2}} + \tilde{\Phi}(\zeta) + F(\zeta) \quad (2.5)$$

а искомая отображающая функция будет

$$z(\zeta) = \int_1^{\zeta} \frac{dw}{d\zeta} e^{-\chi(\zeta)} d\zeta \quad (2.6)$$

Отсюда интегральное уравнение для введенной выше функции $s(\xi)$, $|\xi| \leq 1$ будет таким:

$$s(\xi) = \int_0^{\gamma(\xi)} \exp \left\{ -\tilde{S}(\gamma) - \frac{\sqrt{1-\xi(\gamma)^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(\tau) d\tau}{[\tau-\xi(\gamma)]\sqrt{1-\tau^2}} \right\} \left(2 \sin \frac{\gamma}{2} \right)^{2-\varepsilon} d\gamma \quad (2.7)$$

Это функциональное уравнение, имеющее вид $s(\xi) = \mathbb{P}(s, \xi)$, решается численно методом итераций по схеме $s^{(n+1)}(\xi) = \mathbb{P}(s^{(n)}, \xi)$, $n = 1, 2, \dots$. В качестве начального приближения может быть взята функция, полученная из (2.7) для $g(\xi) = \tilde{\theta}(\xi)$, $|\xi| \leq 1$. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто удовлетворительное совпадение функций $s^n(\xi)$ на двух последовательных итерациях. После этого координаты контура профиля рассчитываются из (2.6) при $\zeta = e^{i\gamma}$, а следовательно, находится и длина l_2 достраиваемого участка. Угол атаки α согласно (2.5) будет $\alpha = -\operatorname{Im} \chi(\infty)$.

Таким образом, решение задачи свелось к отысканию параметров β , γ_c и функции $\sigma = \sigma(\gamma)$, $0 \leq \gamma \leq \gamma_c$ на контуре L_2 . Для этого воспользуемся сопоставлением приращений потенциалов (1.2) и (2.3) на L_2 :

$$\Phi[\sigma(\gamma)] = \Phi^*(\gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_c, \quad 1 \geq \sigma \geq 0 \quad (2.8)$$

Поскольку точка A лежит на известном участке L_1 , то функции $\varphi(s)$, $\varphi^*(\gamma)$ монотонны. Следовательно, условием разрешимости уравнения (2.8) будет равенство $\varphi(\sigma)$ и $\varphi^*(\gamma)$ на концах участка определения, т.е. $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi^*(0) - \varphi^*(\gamma_c)$. Отсюда принимая во внимание, что $\gamma_a = \pi + 2\beta$ (2.2), после преобразований получим

$$f(\gamma_c, \beta) = \varphi_b \quad (2.9)$$

$$\left(f(\gamma_c, \beta) = \frac{\Gamma^*}{2\pi} \left[\frac{\cos\beta - \cos(\gamma_c - \beta)}{\sin\beta} + \gamma_c \right] \right)$$

Функция $f(\gamma_c, \beta)$ при фиксированном β монотонно возрастает от 0 при $\gamma_c = 0$ до Γ^* при $\gamma_c = \pi + 2\beta$. Следовательно, при выполнении условия $\varphi_b > \Gamma^*$ соотношение (2.9) устанавливает однозначную зависимость $\beta = \beta(\gamma_c)$.

Таким образом, в задаче имеется свободный параметр γ_c . Для его нахождения вспомним, что величина v_∞ задана. В то же время в процессе решения эта величина определяется: из (2.5) при $\zeta \rightarrow \infty$ имеем

$$v_\infty = \exp \left\{ \operatorname{Re} \frac{\sqrt{1-t_\infty^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(\tau) d\tau}{(\tau - t_\infty)\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\tau) d\tau \right\} \quad (2.10)$$

где по (2.4)

$$t_\infty = t(\infty) = i \operatorname{tg}(\gamma_c / 4)$$

Уравнение (2.10) может служить для нахождения параметра γ_c .

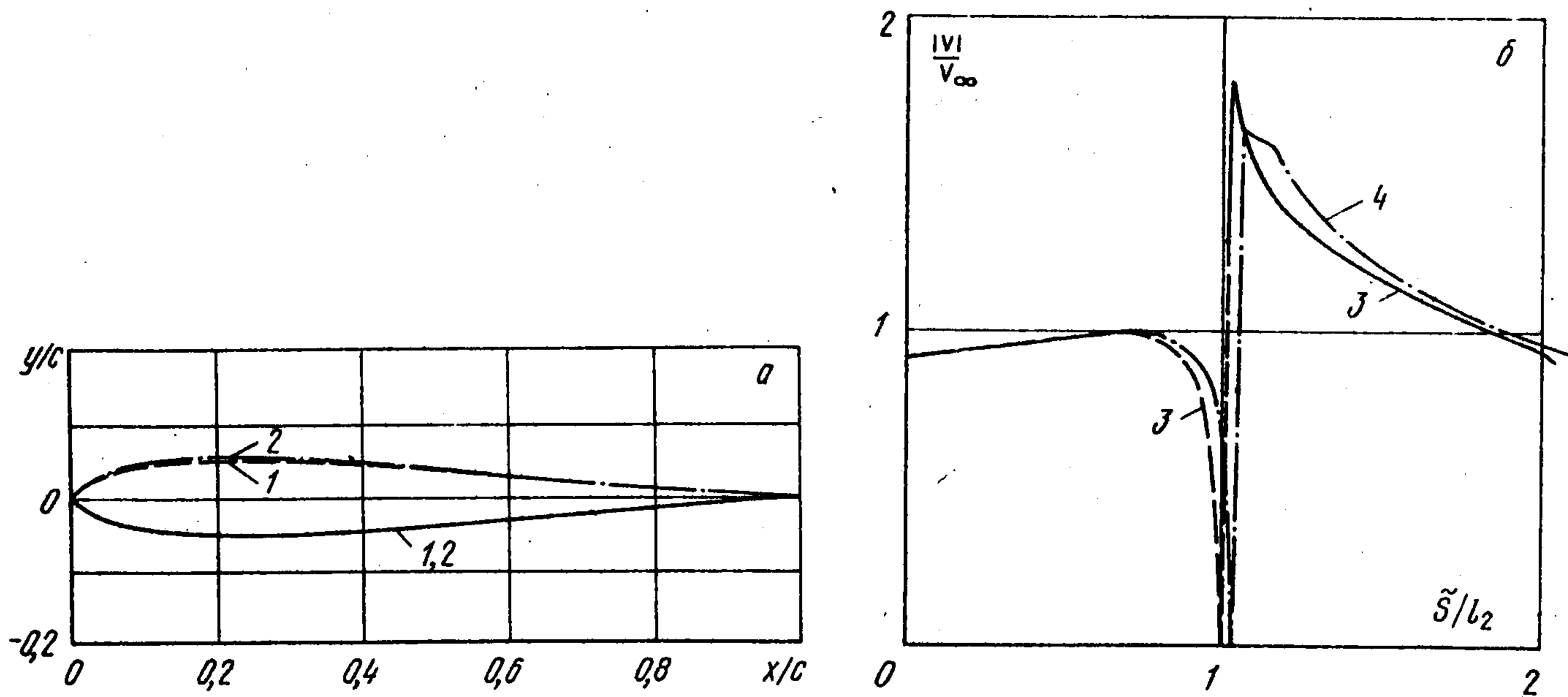
Свободный параметр γ_c может быть также использован для достижения возможно большего значения величины v_∞ . Этот способ выбора γ_c подробнее будет рассмотрен ниже при описании числовых расчетов.

3. Условия разрешимости и построение квазирешения. Под условиями разрешимости обратной краевой задачи аэрогидродинамики обычно понимают условия замкнутости искомого контура крылового профиля и условие совпадения задаваемой величины v_∞ с определяемой в ходе решения. В рассматриваемой задаче последнему условию можно удовлетворить за счет выбора параметра γ_c . Условия замкнутости контура имеют вид

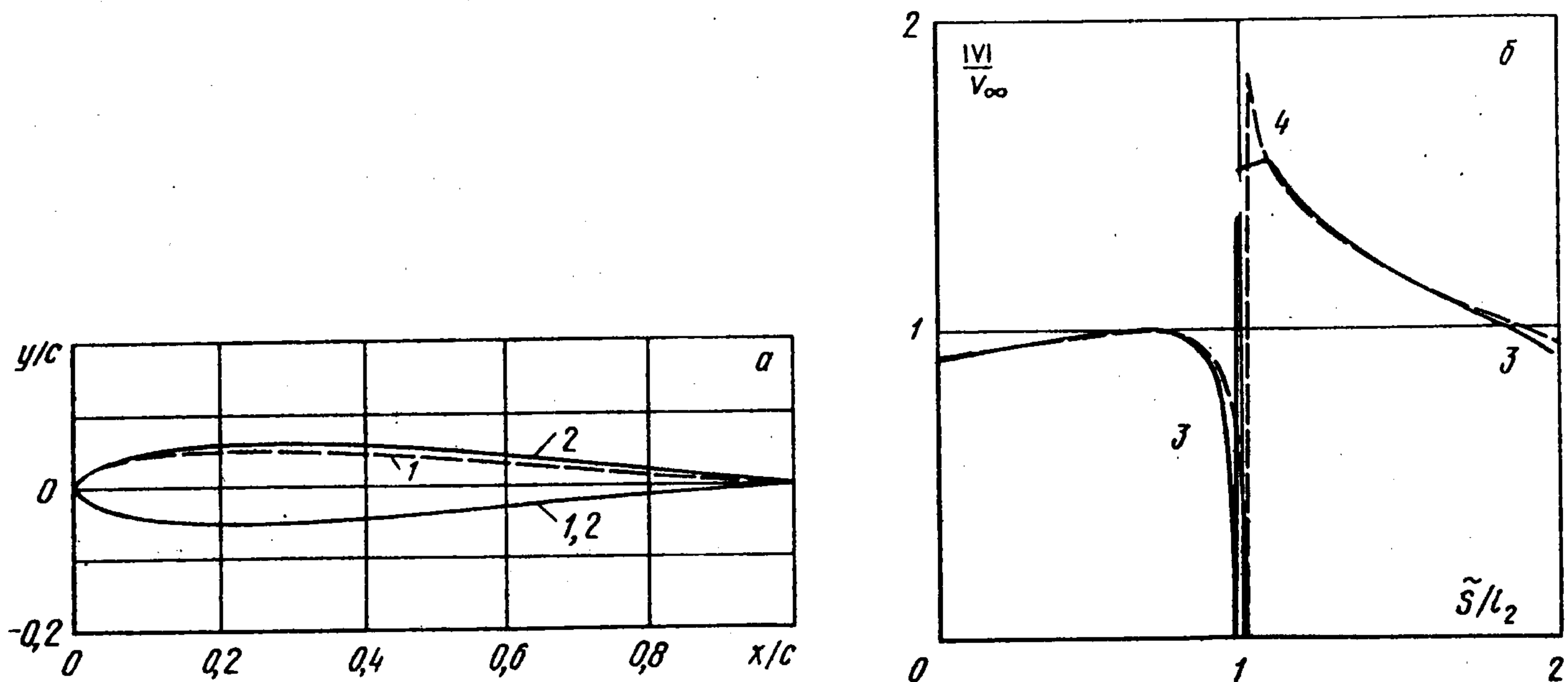
$$\int_0^{2\pi} S(\tau) e^{i\tau} d\tau = \pi(\varepsilon - 1) \quad (3.1)$$

Для построения квазирешения применим методику [8], состоящую в минимальной коррекции функции $S(\gamma)$, например на контуре L_2 , т.е. $0 \leq \gamma \leq \gamma_c$. В результате получим новую функцию $S^*(\gamma)$, удовлетворяющую (3.1). Однако при этом контур L_1 , соответствующий $S^*(\gamma)$, вообще говоря, не будет иметь заданную форму. Для достижения наряду с замкнутостью контура и заданной формы L_1 поступим следующим образом. Выберем $S^*(\gamma)$ в качестве следующего приближения для $\tilde{S}(\gamma)$ и, повторив описанные выше процедуры отыскания функции $s(\xi)$ и построения квазирешения, найдем очередное приближение $S^*(\gamma)$. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не будет получен профиль с замкнутым контуром. По построению этот профиль будет иметь неизменной заданную часть L_1 контура и распределение скорости, минимально отличающееся от заданного на части L_2 .

4. Числовые расчеты. На фиг. 3 изображены результаты тестового расчета и расчета по модификации верхней части контура профиля с целью ликвидации пика скоростей в окрестности передней кромки.



Фиг. 3

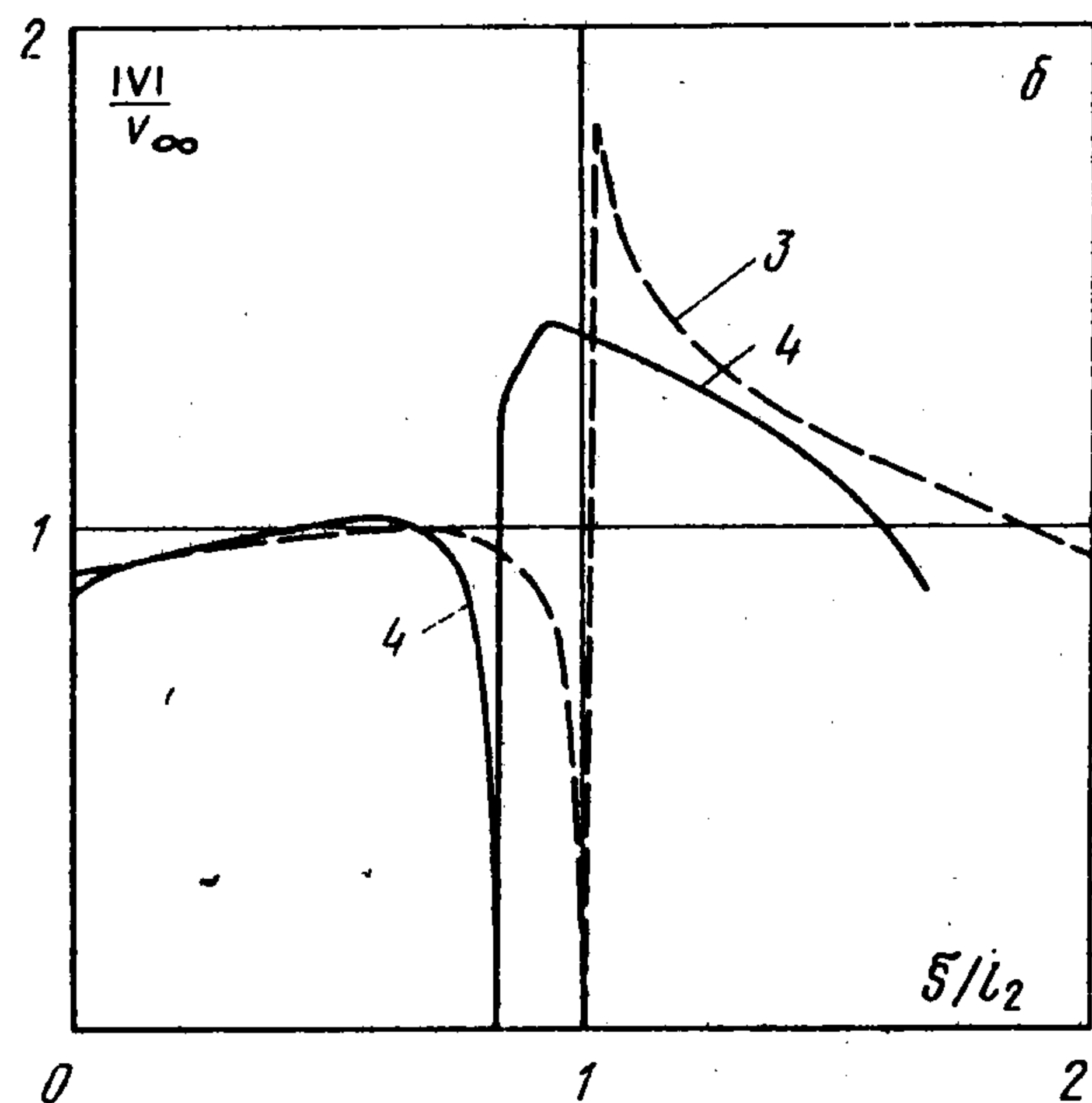
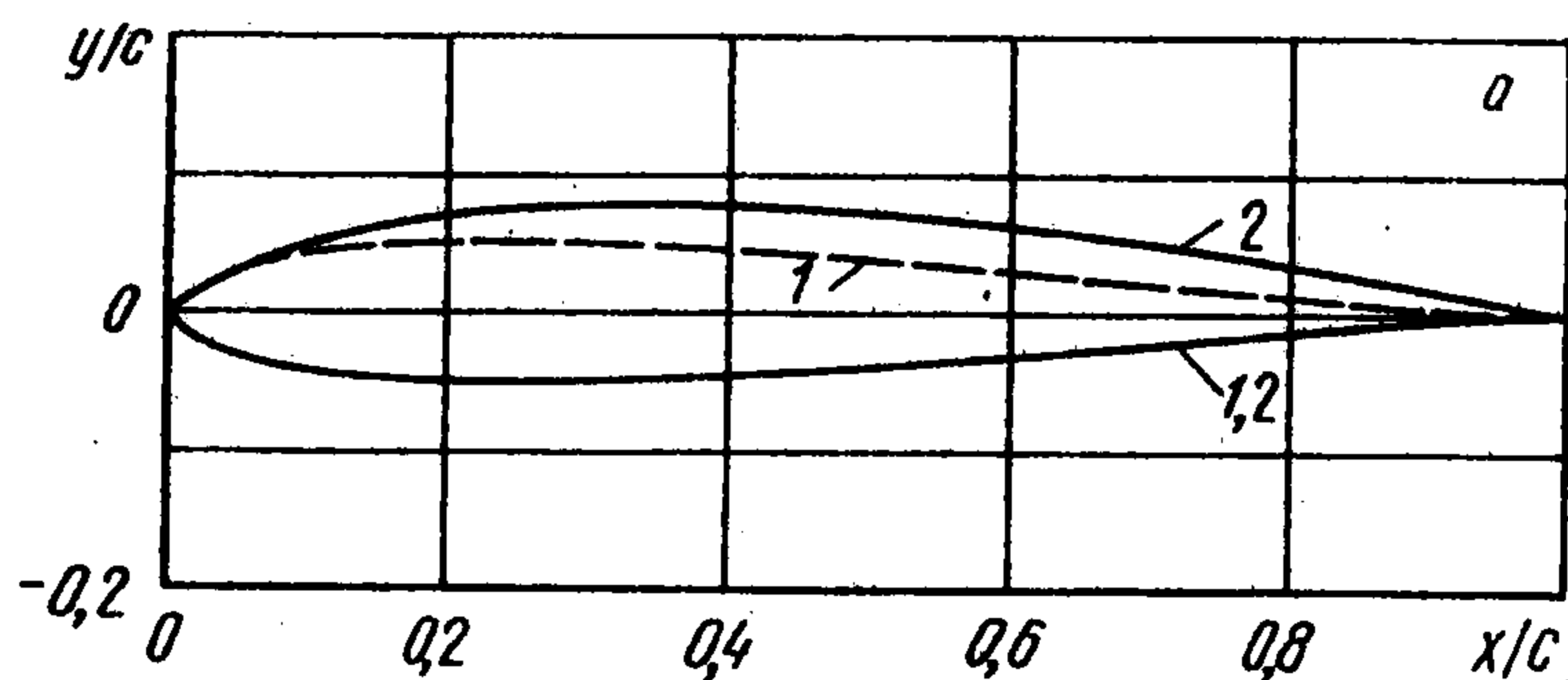


Фиг. 4

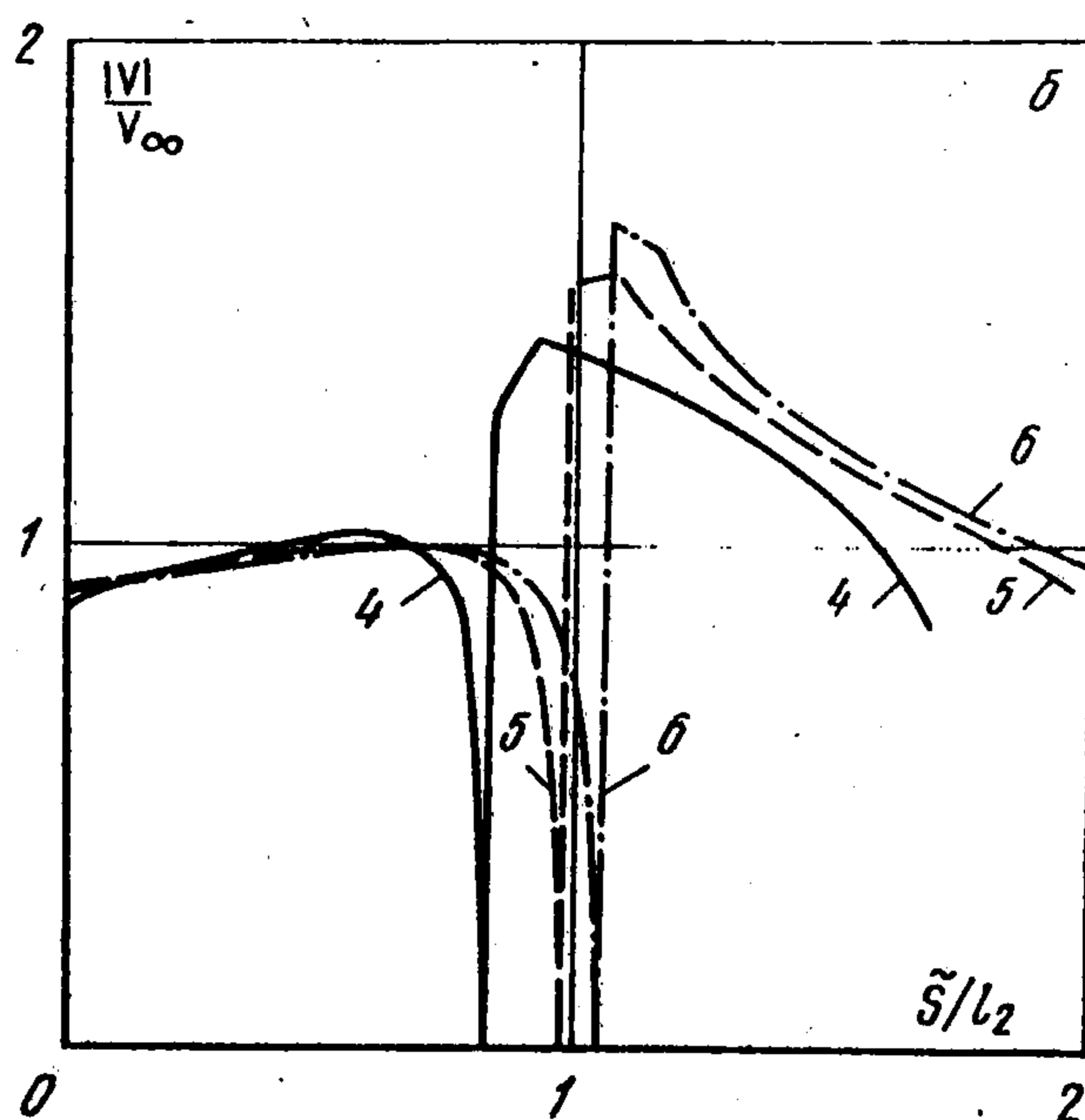
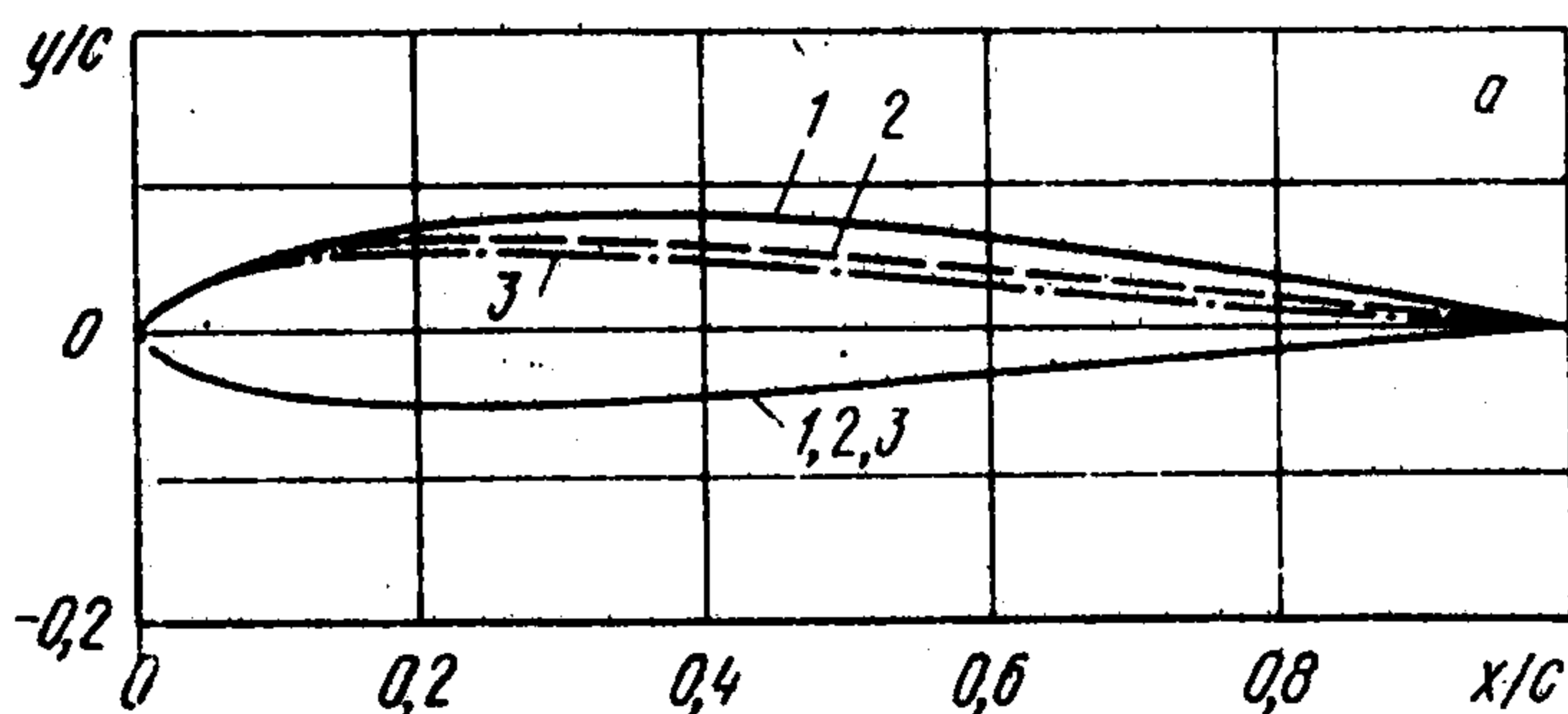
Суть тестового расчета заключалась в следующем. Был взят 10%-ный руль Жуковского (линия 1, сплошная снизу и штриховая сверху), обтекаемый с $v_\infty = 1$ под углом атаки $\alpha = 5^\circ$. По аналитическим формулам рассчитаны распределение $v(\tilde{s})$ (линия 3, штриховая по нижней поверхности и сплошная по верхней) и величины $\Gamma^* = 0,31$, $C_y = 0,60$. Величина \tilde{s} , используемая при описании расчетов, связана с s формулой $\tilde{s} = s + l_1$. При решении смешанной обратной задачи в качестве исходных были взяты нижняя поверхность профиля (сплошная часть линии 1) и распределение скорости $v(\tilde{s})$ по верхней поверхности (сплошная часть линии 3). Величина $\gamma_c = \pi$ в силу симметрии профиля. Для этих данных разработанным выше методом построен профиль, практически совпавший с исходным рулем Жуковского. Для оценки погрешности вычислений координат находилась величина

$T = \max_{\zeta} |z^*(\zeta) - z(\zeta)|$, где $z^*(\zeta)$ – аналитическое решение для руля Жуковского, $z(\zeta)$ – функция, полученная в ходе тестового расчета. В результате $T \leq 0,001$. Коэффициент $C_y = 0,60$ с точностью до второго знака совпал с исходным значением.

Из фиг. 3, б видно, что руль Жуковского имеет на верхней поверхности пик скорости со значением $v_{\max}/v_\infty = 1,81$, что может привести к образованию кавитационной каверны в этой части профиля. Для улучшения гидродинамических свойств профиля указанный пик был срезан на уровне $v/v_\infty = 1,50$. Подправленное таким образом распределение скорости было использовано в качестве исходного при построении модифицированного профиля с



Фиг. 5



Фиг. 6

неизменной нижней поверхностью руля Жуковского. При этом, как и в тестовом расчете, полагалось $\gamma_c = \pi$. В результате получен профиль (штрихпунктирный контур 2) с $t = 10,5\%$, $C_y = 0,60$, обтекаемый при $v_\infty = 0,95$ под углом атаки $\alpha = 5,01^\circ$. Распределение скорости по его поверхности изображено на фиг. 3, б штрихпунктирной линией 4. Пик скоростей у этого профиля получился равным $v/v_\infty = 1,65$, т.е. значительно меньше исходного значения 1,81. Однако значение v_∞ уменьшилось, что привело к большему, чем 1,50, максимальному значению относительной скорости v/v_∞ .

Чтобы избежать этого, рассмотрен следующий пример. Была проведена вторая модификация верхней поверхности того же руля Жуковского (штриховая линия 1 на фиг. 4, а) по $v(\bar{s})$ со срезанным пиком скорости на уровне $v/v_\infty = 1,5$, но величина γ_c при этом не задавалась, а отыскивалась из условия $v_\infty = 1$. В результате получено $\gamma_c = 3,17$. Построенный профиль с $t = 11,5\%$ изображен сплошной линией 2 на той же фигуре. Он имеет $C_y = 0,60$, $\alpha = 4,52^\circ$. При этих параметрах набегающего потока $v(\bar{s})$ приведено сплошной линией 3 на фиг. 4, б. Для сравнения на этой же фигуре показано штриховой линией 4 исходное распределение $v(\bar{s})$ для руля Жуковского. Видно, что модификация верхней поверхности позволила не только "срезать" пик скорости до значения 1,54, но и лишь незначительно превысить заданное значение v_{\max}/v_∞ .

Практический интерес представляет модификация засасывающей стороны профиля для достижения максимального значения скорости набегающего потока. Для этого может быть

Задача	γ_c	v_∞	α°	v_{\max}/v_∞	C_y	$t\%$
Руль Жуковского	3,14	1,00	5,00	1,81	0,60	10,0
Первая модификация	3,14	0,95	5,01	1,65	0,60	10,5
Вторая модификация	3,17	1,00	4,52	1,54	0,60	11,5
Третья модификация	3,23	1,16	-1,97	1,41	0,61	12,4

использован свободный параметр γ_c . В ходе серии расчетов было выяснено, что зависимость $v_\infty(\gamma_c)$ монотонно возрастает с ростом γ_c . при этом, однако, одновременно ухудшается сходимость описанного выше метода построения замкнутых контуров профилей и при некотором достаточно большом значении γ_c процесс перестает сходиться. В случае, когда в качестве исходных данных, как и в предыдущих примерах, взяты нижняя поверхность руля Жуковского (штриховая линия 1 на фиг. 5, а) и распределение $v(\bar{s})$ (штриховая линия 3 на фиг. 5, б) со срезанным пиком скорости на уровне 1,5 предельное значение γ_c получилось близким к 3,23. Соответствующий профиль (третья модификация) с $t = 12,35\%$ изображен сплошной линией 2 на фиг. 5, а. Он имеет $C_y = 0,61$ при $\alpha = -1,97^\circ$ и $v_\infty = 1,16$. Распределение $v(\bar{s})$ приведено сплошной линией 4 на фиг. 5, б.

На фиг. 6 сравниваются результаты всех трех модификаций, когда величина γ_c : 1) задавалось, 2) отыскивалось из условия $v_\infty = 1$, 3) находилась из условия максимальности v_∞ . Сплошными линиями 1 и 4 изображены соответственно контур профиля и распределение скорости $v(\bar{s})$ в третьей модификации, штриховыми линиями 2 и 5 – во второй модификации, а штрихпунктирными 3 и 6 – в первой. В таблице приведены геометрические и гидродинамические характеристики всех рассмотренных выше профилей.

Как видим, применение описанного метода позволило на второй и третьей модификациях значительно снизить величину максимальной скорости на верхней поверхности профиля. При этом, по построению, форма нижней поверхности осталась неизменной и скорость набегающего потока либо равна заданной, либо максимизирована. Интересно заметить, что величина C_y в ходе всех модификаций изменилась незначительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.
2. Schmieden C. Die Berechnung kavitationssicherer Tragflügelprofile // ZAMM. 1932. Bd. 12. H. 5. S. 288–310.
3. Woods L. The design of two-dimensional aerofoils with mixed boundary conditions // Quart. Appl. Math. 1955. V. 13. N 2. P. 139–146.
4. Лебедев Л.Л. Одна обратная смешанная задача // Учен. зап. Казан. ун-та. 1957. Т. 117. N 9. С. 100–103.
5. Чжен П. Управление отрывом потока. М.: Мир, 1979. 552 с.
6. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.:ВИНИТИ, 1989. Т. 23. С. 3–115.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987, 840 с.
8. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Построение крыловых профилей методом квазирешений обратных краевых задач // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. N 3. С. 5–13.