

УДК 532.5

© 1994 г. А.В. Марченко

## МОДЕЛЬ ДРЕЙФУЮЩЕГО ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Развиваются теоретические представления о динамике дрейфующего ледяного покрова (ЛП), моделирующегося четырехфазной двумерной сплошной средой с упругопластической реологией при объемных и сдвиговых деформациях, включающих процессы торошения и образования разводий [1]. Условия фазовых переходов формулируются в замкнутой форме и зависят в общем случае от восьми функций, характеризующих микроскопическую структуру ЛП. Получены новые точные решения уравнений модели, описывающие дрейф дисперсного ЛП в поле океанского вихря, взаимодействие дисперсного ЛП с поверхностными волнами, пластическое течение сплоченного ЛП под влиянием локализованного морского течения, столкновение массива сплоченного ЛП с твердой стенкой, имеющей форму клина.

Выбор модели для ЛП зависит от характерных пространственно-временных масштабов изучаемых явлений и от физико-механических свойств ЛП. Если льдины расположены равномерно на поверхности жидкости и относительные скорости близкорасположенных льдин малы, то возможно описание движения и деформаций ЛП как сплошной среды со сложной реологией [1–7]. Ранее использовались упругопластическая модель ЛП [2, 3], вязкопластическая модель ЛП [4], модель кавитирующей жидкости [5], модели с вязкой реологией (см., например, [6, 7]).

Основная цель большинства работ по динамике ЛП в рамках различных моделей состояла в численном моделировании дрейфа льда в некоторой фиксированной области. Теоретическое изучение точных решений модельных уравнений при этом не проводилось. Поэтому вопросы выяснения физического смысла получаемых решений оставались за рамками исследований. Как исключение, показывающее важность теоретических исследований, можно привести работы [3, 6].

При помощи теоретического анализа уравнений динамики ЛП были сделаны заключения [3] о связи структур в дрейфующих льдах с характеристическими кривыми (полосами скольжения) модельных уравнений. Исследованы [6] характерные закономерности зависимости ледового сопротивления от фрактальных характеристик ЛП при движении судна в битых льдах.

Главная цель данной работы – построение замкнутой модели ЛП, описывающей дрейф льдов с учетом процессов торошения и образования разводий, и теоретическое исследование простейших задач динамики ЛП, постановка которых может соответствовать реальной ситуации.

1. Основные уравнения модели ЛП имеют вид [1]

$$d(\rho Ah)/dt + \rho Ah \nabla u = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho Ah (du/dt + f \times u) = AF + \nabla \sigma \quad (1.2)$$

$$\frac{ds}{dt} - \tau \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \lambda s = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{d\tau}{dt} + s\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \lambda\tau = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$p = p(\rho, A, h) \tag{1.4}$$

$$\mathbf{u} = (u, v, 0), \quad \mathbf{f} = (0, 0, f), \quad s = 1/2(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}), \quad \tau = \sigma_{xy}$$

$$p = -1/2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}\nabla, \quad \nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0)$$

Здесь  $x, y, t$  – горизонтальные координаты и время;  $\rho, h$  – осредненные по элементарной площадке плотность и толщина ЛП;  $A, \mathbf{u}$  – сплоченность и скорость дрейфа;  $\sigma$  – тензор внутренних напряжений в ЛП;  $\mathbf{F}$  – внешние силы;  $f$  – параметр Кориолиса;  $\mu = \mu(A, h)$  – модуль сдвига.

Уравнения (1.1), (1.2) являются законами сохранения массы и импульса. Уравнения Прандтля – Рейсса (1.3) определяют реологию ЛП при сдвиговых деформациях [8]. Уравнение состояния (1.4) описывает поведение ЛП при нагрузках сжатия–растяжения.

Система шести уравнений (1.1)–(1.4) содержит восемь неизвестных функций  $\rho, A, h, u, v, s, \tau, p$ , описывающих макроскопическое состояние элемента ЛП, и параметр  $\lambda$ , который при деформациях пластического сдвига исключается из (1.3) при помощи условия пластичности, а в остальных случаях полагается равным нулю. Замыкание уравнений (1.1)–(1.4) осуществляется различным образом для четырех фазовых состояний ЛП: дисперсного (распльвшегося) сплоченного, всторошенного и невсторошенного [1].

Всторошенный или невсторошенный ЛП может находиться как в сплоченном, так и в дисперсном состоянии. Всторошенный ЛП состоит из кусков льдин, нагроможденных друг на друга. Поэтому важным параметром является средняя толщина кусков льдин в торосе  $h_f \leq h$ . Параметр  $h - h_f$  может являться мерой шероховатости всторошенного ЛП. Предельный случай  $h = h_f$  соответствует ЛП, в котором льдины имеют контакты, позволяющие им наползать друг на друга без существенного разрушения. Примеры всторошенного льда при  $h = h_f$  приведены на фиг. 1, 2. Края льдин на фиг. 1 при сжатии разрушились таким образом, что позволяют им легко наползать друг на друга без дальнейшего разрушения. В зазорах между льдинами имеется ледяной порошок, играющий роль смазки. На фиг. 2 льдины имеют тарелкообразную форму, соответствующую молодым формам морского ЛП.

Для дисперсного ЛП уравнения (1.1)–(1.4) замыкаются соотношениями

$$s = \tau = p = \mu = 0, \quad dh/dt = 0, \quad 0 < A < A_*$$

Условие перехода дисперсного ЛП в сплоченное состояние имеет вид

$$A = A_* \leq 1$$

Сплоченный ЛП может испытывать упругие и пластические деформации. Пластические деформации подразделяются на сдвиг, уплотнение и торошение. Свойства сдвига и уплотнения описаны в [1]. Здесь отметим, что при уплотнении происходит увеличение сплоченности ЛП без изменения его толщины. Деформации уплотнения возможны при  $0 < A < A_{**}$ , для всторошенного ЛП полагается  $A_{**} = 1$ .

При разрушении изменяется микроструктура ЛП, нарушаются связи между льдинами. При сжатии сплоченного невсторошенного ЛП с  $A = A_{**}$  края льдин разрушаются таким образом, что происходит переход во всторошенное состояние, для которого выполняется равенство  $h = h_f$ . При растяжении разрушение приводит к переходу в дисперсное состояние.

Увеличение толщины ЛП может происходить только во всторошенном ЛП при  $A = A_{**} = 1$  при его торошении.

Условие уплотнения для невсторошенного ЛП и условия уплотнения и торошения

для всторошенного ЛП имеют сходный вид

$$p = \pi_p(A, h) > 0, dA/dt > 0, dh/dt = 0 \quad (1.5)$$

$$p = p_{cr}(A, h), A_* \leq A < A_{**}$$

$$p = \pi_p(A, h, h_f) > 0, dA/dt > 0, dh/dt = 0 \quad (1.6)$$

$$p = p_{cr}(A, h, h_f), A_* \leq A < 1;$$

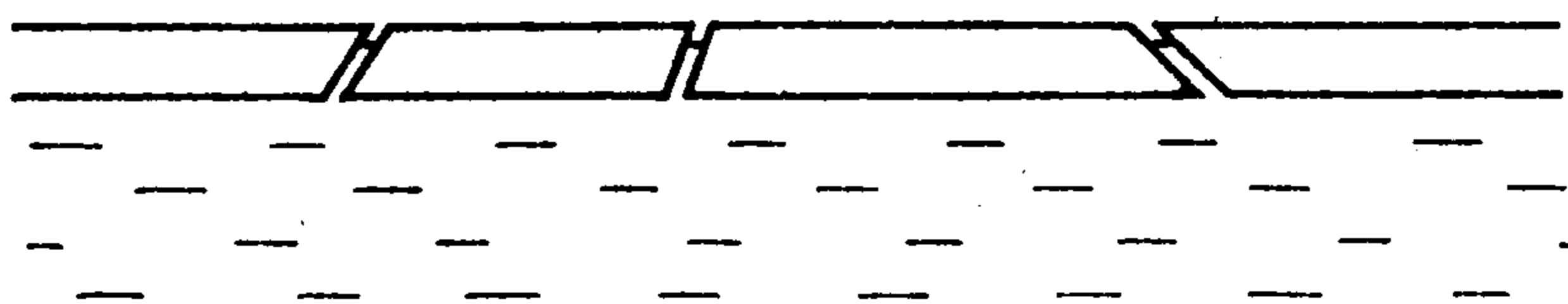
$$p = \pi_p(h, h_f) > 0, dh/dt > 0, p = p_{cr}(h, h_f), A = 1$$

Далее для сокращения записи сплоченный невсторошенный ЛП с  $A \in [A_*, A_{**})$  и всторошенный ЛП будем называть ЛП типа 1, а невсторошенный ЛП при  $A = A_{**}$  — ЛП типа 2.

Условия пластического сдвига и разрушения представляются в виде связи [9]

$$|\tau_n| = F(\sigma_n, A, h) \quad (1.7)$$

Здесь  $\tau_n, \sigma_n$  — касательное и нормальное напряжения на площадке с нормалью  $n$ . Для всторошенного ЛП функция  $F$  зависит также от  $h_f$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Примерные графики зависимости  $\tau_n$  от  $\sigma_n$ , соответствующие (1.7), при фиксированных  $A$  и  $h$  приведены на фиг. 3, 4. Кривая  $ABCDE$  на фиг. 3 соответствует условиям пластичности для ЛП типа 1. Замкнутая кривая  $ABCDEF$  на фиг. 4 соответствует условиям пластичности для ЛП типа 2.

Напряжения на площадке с нормалью  $n$  могут быть представлены в виде [10]

$$\sigma_n + p = R \cos(2\varphi), \tau_n = R \sin(2\varphi), R = 1/2(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \quad (1.8)$$

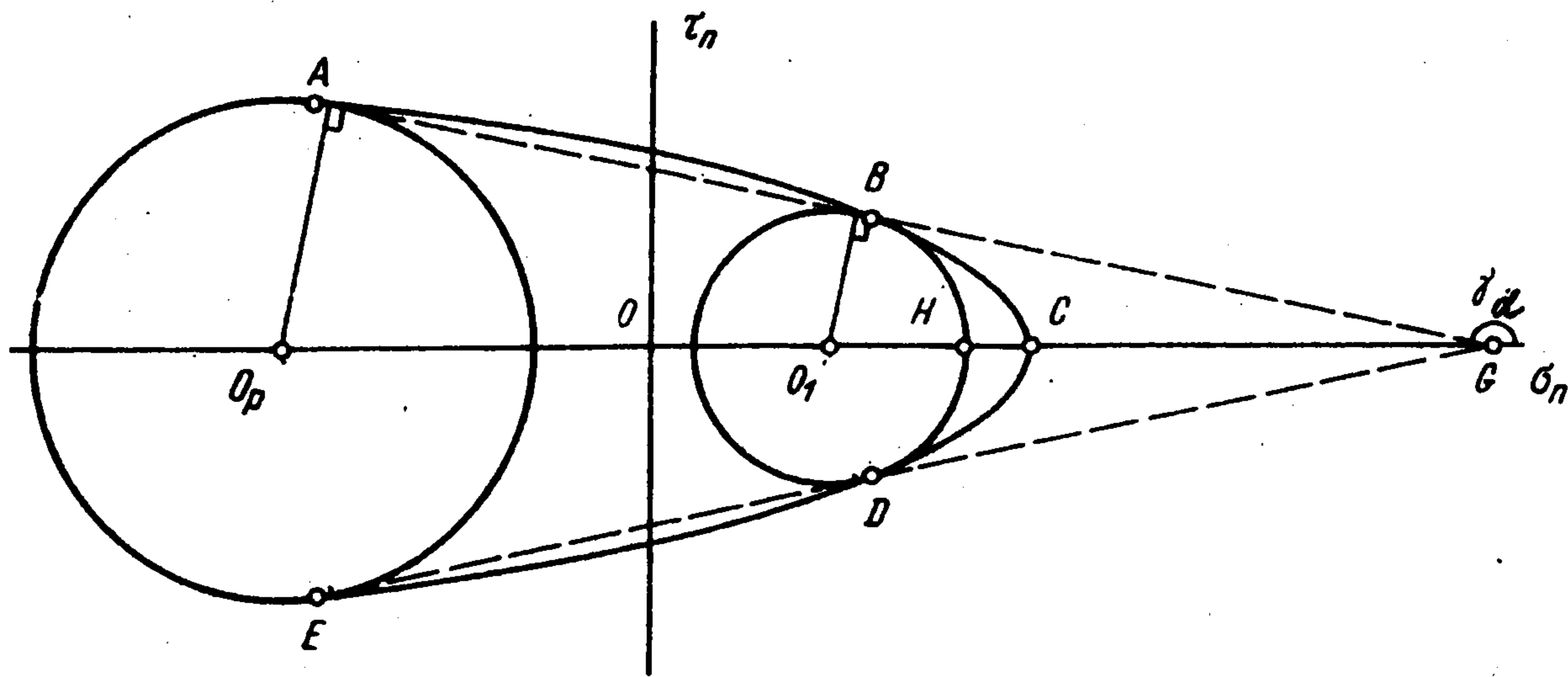
Здесь  $\varphi$  угол между нормалью  $n$  и направлением главного напряжения  $\sigma_{\max}$ . Главные значения тензора напряжений  $\sigma$  определяются формулами

$$\sigma_{\max} = -p + (\tau^2 + s^2)^{1/2}, \sigma_{\min} = -p - (\tau^2 + s^2)^{1/2} \quad (1.9)$$

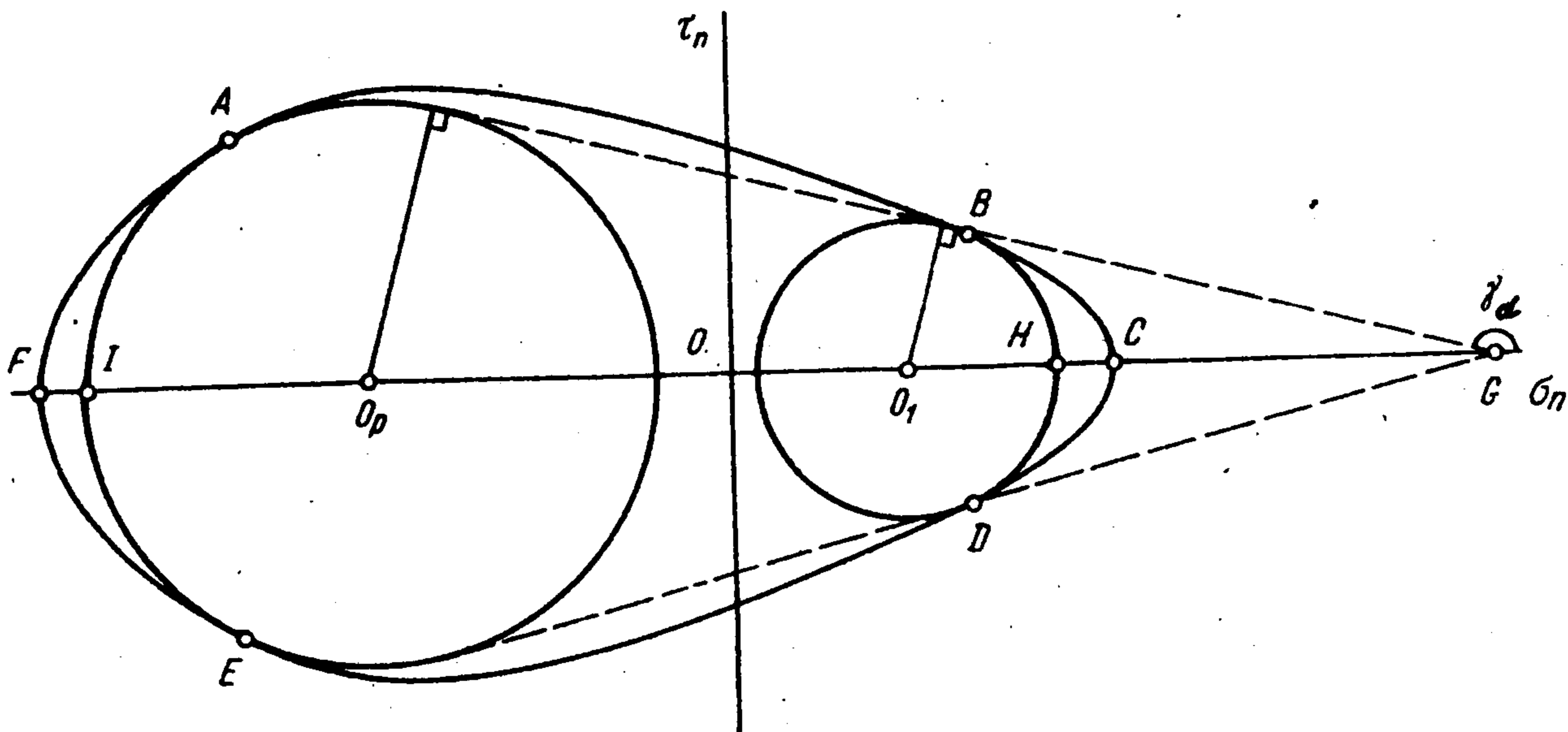
Из (1.8) следует, что напряженное состояние в точке характеризуется кругом Мора на плоскости  $(\tau_n, \sigma_n)$ , и условие (1.7) является условием касания круга Мора и кривой  $ABCDE$  на фиг. 3 и кривой  $ABCDEF$  на фиг. 4.

Предполагается, что при касании круга Мора дуг  $AB, CD$  может происходить пластический сдвиг. При касании круга Мора дуги  $B, CD$  происходит разрушение связей между льдинами (если они имеются) и переход при растяжении в дисперсное состояние. При касании круга Мора дуги  $A, FE$  ЛП переходит во всторошенное состояние. Круги Мора  $O_1$  на фиг. 3, 4 соответствуют предельным состояниям пластического сдвига перед разрушением. Точка  $O_1$  имеет координаты  $(-\pi_1(A, h), 0)$ ,  $\pi_1 < 0$ . Для всторошенного ЛП функция  $\pi_1$  зависит также от  $h_f$ . Круги Мора  $O_p$  соответствуют предельным состояниям пластического сдвига перед уплотнением или торошением (фиг. 3) и перед переходом во всторошенное состояние (фиг. 4). Точка  $O_p$  имеет координаты  $(-\pi_p, 0)$ .

Использование условия пластичности в виде (1.7) при произвольной функции  $F$  для решения (1.1)–(1.4) не удобно в связи с тем, что выражение условия касания круга Мора и кривой (1.7) через переменные  $p, s, \tau$ , входящие в (1.1)–(1.4), связано с громоздкими алгебраическими выкладками. Вместе с тем условие (1.7) имеет



Фиг. 3



Фиг. 4

наглядный физический смысл. Предлагаемая ниже простая аппроксимация кривой (1.7), согласующаяся с естественными предположениями о свойствах ЛП, приводит к несложной формулировке условия (1.7) в функциях  $p, s, \tau$ .

Для дуг  $AB, ED$  на фиг. 3, 4 используется линейная аппроксимация функции  $F$ , соответствующая условию пластического сдвига в мелкозернистой сыпучей среде [10]

$$|\tau_n| = (\sigma_n + \pi_d) \operatorname{tg} \gamma_d, \pi_p > p > \pi_1 \quad (1.10)$$

$$\pi_d = \pi_d(A, h) < 0, \gamma_d = \gamma_d(A)$$

На фиг. 3, 4 точка  $G$  имеет координаты  $(-\pi_d, 0)$ . Используя (1.8) и (1.9), условие (1.10) можно представить в виде

$$s^2 + \tau^2 = \sin^2 \gamma_d (p - \pi_d)^2, \pi_p > p > \pi_1 \quad (1.11)$$

Дуги  $B, C, D$  на фиг. 3, 4 и  $A, F, E$  на фиг. 4 аппроксимируются дугами  $B, H, D$  и  $A, I, E$  кругов Мора  $O_1$  и  $O_p$  соответственно. Условия касания круга Мора кругов  $O_1$  и  $O_p$  записываются соответственно в виде

$$\sigma_{\max} = \pi_{cr} > 0, \pi_1 \geq p \geq -\pi_{cr} \quad (1.12)$$

$$\sigma_{\min} = \pi_r < 0, -\pi_r \geq p \geq \pi_p \quad (1.13)$$

$$\pi_{cr} = -\pi_1 + (\pi_1 - \pi_d) \sin \gamma_d, \pi_r = -\pi_p - (\pi_p - \pi_d) \sin \gamma_d$$

Условия (1.12), (1.13) с использованием (1.9) записываются в виде

$$s^2 + \tau^2 = (p + \pi_{cr})^2, \pi_1 \geq p \geq -\pi_{cr} \quad (1.14)$$

$$s^2 + \tau^2 = (p + \pi_r)^2, -\pi_r \geq p \geq \pi_1 \quad (1.15)$$

Таким образом, условия пластического сдвига, разрушения и перехода во всторошенное состояние имеют соответственно форму (1.11), (1.14), (1.15). При выполнении условий (1.14), (1.15) в элементе ЛП надо соответственно положить

$$p = s = \tau = \pi_1 = \pi_d = 0 \quad (1.16)$$

$$p = \pi_p(A, h, h_f), h_f = h, s = \tau = \pi_1 = \pi_d = 0 \quad (1.17)$$

Упругие деформации сжатия-растяжения имеют место при

$$s^2 + \tau^2 < (p - \pi_{cr})^2, \pi_p \geq p > -\pi_{cr} \quad (1.18)$$

для ЛП типа 1 и при

$$s^2 + \tau^2 < \min[(p + \pi_{cr})^2, (p + \pi_r)^2], -\pi_r > p > -\pi_{cr} \quad (1.19)$$

для ЛП типа 2. Равенство в (1.18) может иметь место только при

$$dp/dt \leq 0 \quad (1.20)$$

При выполнении (1.18) или (1.19) надо положить

$$p = \pi_e(\rho, A, h), dA/dt = 0, dh/dt = 0 \quad (1.21)$$

Для всторошенного ЛП функция  $\pi_e$  зависит также от  $h_f$ . Функции  $\rho_{cr}(A, h)$  в (1.5), (1.6) находятся из условия  $\pi_e(\rho, A, h) = \pi_p(A, h)$ .

Деформации упругого сдвига происходят при

$$s^2 + \tau^2 \leq \sin^2(\gamma_d)(p - \pi_d)^2 \quad (1.22)$$

Равенство в первом соотношении (1.22) может иметь место только если после исключения  $\lambda$  из (1.3) при помощи (1.11) окажется, что

$$\lambda \leq 0 \quad (1.23)$$

При выполнении условий (1.22), (1.23) в (1.3) надо положить

$$\lambda = 0 \quad (1.24)$$

Предлагаемая модель ЛП содержит восемь неизвестных функций  $\rho, A, h, s, \tau, p, u, v$ , описывающих макроскопическое состояние ледяного покрова и зависящих от  $x, y, t$ . Эти функции задаются в начальный момент времени  $t = 0$  на плоскости  $(x, y)$  и определяются из (1.1) – (1.4) в последующие моменты времени.

2. Типичные задачи динамики ЛП состоят в определении эволюции макроскопических параметров  $\rho, A, h, u, v, s, \tau, p$  в некоторой области  $\Omega$  на плоскости  $(x, y)$  при  $t > 0$  при заданных напряжениях или смещениях на границе  $\Omega$  и начальных условиях при  $t = 0$ . Изменение макроскопических параметров может быть найдено из (1.1)–(1.4), если в каждой точке  $\Omega$  известны функции

$$A^*, A^{**}, h_f, \pi_1, \pi_d, \pi_e, \pi_p, \gamma_d \quad (2.1)$$

характеризующие реологические свойства ЛП.

Функции (2.1) зависят от параметров, определяющих микроструктуру ЛП (геометрических размеров, формы и физико-механических свойств льдин, их взаимного расположения), которые в свою очередь связаны с температурой атмосферы и океана, потоками тепла, солнечной радиацией и т.п. Поэтому точное теоретическое определение

функций (2.1) практически невозможно. Тем не менее, представляя их в простейшей форме, соответствующей естественным предположениям о свойствах ЛП, можно качественно описывать некоторые эффекты динамики морских льдов.

Ниже рассмотрим некоторые простейшие приближения для функций (2.1).

Предполагается, что выполняются неравенства  $1/2 < A_* \leq A_{**} \leq 1$ .

При

$$A_* = A_{**} = 1 \quad (2.2)$$

напряжения возникают только в сплошном ЛП, при  $A < 1$  ЛП находится в дисперсном состоянии с тензором напряжений тождественно-равным нулю. Приближение (2.2) можно использовать, если функции  $\pi_p, \gamma_d$  имеют резкие экстремумы при  $A = 1$ ;  $\gamma_d \cong \pi, \pi_p \cong 0$  при  $A < 1$ ;  $\pi_1 = \pi_d = 0$ . Эти допущения применимы, например, к сильно раздробленному ЛП, состоящему из мелких льдин.

Для функций  $\pi_e$  принимаем

$$\pi_e = k_e(A)h(\rho - \rho_c)/\rho_0 \quad (2.3)$$

для невсторошенного ЛП и

$$\pi_e = k_e(A)\theta(\alpha)h(\rho - \rho_0)/\rho_0 \quad (2.4)$$

$$\alpha = 1 - h_f/h, 0 \leq \theta(\alpha) \leq 1$$

для всторошенного ЛП. Здесь  $\rho_0$  – плотность льда в недеформированном состоянии. Функция  $\theta(\alpha)$  характеризует плотность упаковки льдин в торосе и степень их сцепления при смерзании. При  $\theta(\alpha) = 1$  выражения (2.3) и (2.4) совпадают. Это соответствует случаю, когда торос в результате смерзания превращается в сплошной ЛП. Параметр  $\alpha$  может служить мерой шероховатости ЛП.

Для пластических деформаций уплотнения и торошения положим

$$\pi_p = k_p(A)h$$

для невсторошенного ЛП и

$$\pi_p = k'_p(A)\theta(\alpha)h$$

для всторошенного ЛП. Приближенно можно положить  $k_e(A) = E/(1 - \nu^2)$ , где  $E, \nu$  модуль Юнга и коэффициент Пуассона льда. Иными словами, в этом случае полагаем, что сплоченный ЛП при небольших деформациях сжатия–растяжения ведет себя как линейно-упругое тело Гука с параметрами сплошного ЛП.

Функции  $k_p(A), k'_p(A), \gamma_d(A), \theta(\alpha)$  определены на интервале  $(0, 1)$ , поэтому их удобно аппроксимировать простыми функциями, подбирающимися из сопоставления численных расчетов с натурными наблюдениями. Например, было принято выражение [5]

$$k'_p(A) = k_p(A) = P_* \exp[20(A - 1)], P_* \cong 5 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$$

Функции  $\pi_1, \pi_d$  могут принимать любые неположительные значения,  $\pi_{cr}$  не должно превышать предел прочности льда на растяжение [11]. При  $\pi_1 = \pi_d = 0$  ЛП не сопротивляется деформациям растяжения, переходя при них в дисперсное состояние.

Для всторошенного ЛП при  $h \cong h_f$ , изображенного на фиг. 2, можно положить

$$\gamma_d = \pi \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что  $s = \tau = 0$ . В этом случае ЛП моделируется сплошной средой типа сжимаемой жидкости с возможной необратимостью деформаций сжатия–растяжения. Этот случай полностью совпадает с моделью, рассмотренной в [5].

Полагается, что для сплоченного ЛП справедливы оценки

$$(\mu, k_e) \gg (s, \tau, p) \quad (2.6)$$

вытекающие из предположения о том, что реальные внутренние напряжения в ЛП много меньше его упругих модулей [12].

3. Известно, что в достаточно разреженном ЛП под влиянием ветра, морских течений и волн образуются различные структуры типа ячеек, вихрей, полос и т.п. из более сплоченного льда [6, 13, 14]. Для описания возможных механизмов формирования таких структур рассмотрим задачу о дрейфе дисперсного ЛП в поле океанского вихря.

Для силы  $\mathbf{F}$  в (1.2) принимаем

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ai} + \mathbf{F}_{wi} - \rho g h \nabla \eta \quad (3.1)$$

Здесь  $\mathbf{F}_{ai}$  и  $\mathbf{F}_{wi}$  силы трения ветра и течения о лед [6]

$$\mathbf{F}_{ai} = C_a \rho_a |\mathbf{V}_a| \mathbf{V}_a, \mathbf{F}_{wi} = C_w \rho_w (\mathbf{u}_w - \mathbf{u}) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{V}_a = (V_{a,x}, V_{a,y}), \mathbf{u}_w = (u_{w,x}, u_{w,y})$$

$C_{a,w}$  – коэффициенты трения;  $\rho_a, \rho_w$  – плотности воздуха и воды;  $\mathbf{V}_w, \mathbf{u}_w$  – скорости ветра и течения. Уравнение  $z = \eta(x, y, t)$  описывает отклонение поверхности океана от горизонтального положения равновесия.

Квазистационарные движения больших временных масштабов дисперсного ЛП описываются системой уравнений

$$dh/dt = 0, dA/dt + A \nabla \mathbf{u} = 0, \rho h \mathbf{f} \times \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.3)$$

Стационарные движения океана соответствующих временных масштабов в приближении  $f$ -плоскости описываются уравнениями мелкой воды [15]

$$\mathbf{f} \times \mathbf{u}_w = -g \nabla \eta, \nabla \mathbf{u}_w = 0$$

Здесь пренебрегается влиянием ветра и ЛП на поле скоростей в жидкости по сравнению с течениями, имеющимися в жидкости в отсутствии ветра и дрейфующего льда. Таким образом, полагается, что дисперсный ЛП является пассивным трассером гидротермодинамических процессов в океане и атмосфере [16].

Вводя функцию тока  $\Psi_w$  для поля скоростей в жидкости, находим

$$u_w = -\partial \Psi_w / \partial y, v_w = \partial \Psi_w / \partial x, \eta = f \Psi_w / g$$

Вихревому движению жидкости соответствует функция тока  $\Psi_w = \Psi_w(r)$ ,  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ , представленная на фиг. 5. Из (3.2), (3.3) следует, что поле скоростей дрейфа ЛП имеет функцию тока

$$\Psi = \Psi_w + \alpha x - \beta y$$

$$\alpha = \Delta(V_{a,x} \rho h f - V_{a,y} C_w \rho_w), \beta = \Delta(V_{a,x} C_w \rho_w + V_{a,y} \rho h f)$$

$$\Delta = C_a \rho_a |\mathbf{V}_a| [(C_w \rho_w)^2 + (\rho h f)^2]^{-1}$$

Особые точки  $\Psi$  на плоскости  $(x, y)$  определяются соотношениями

$$y = \beta x / \alpha, |d\Psi_w / dr| = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$$

Если  $\Psi_w$  имеет вид, представленный на фиг. 5, то при

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} < \max_r |d\Psi_w / dr| \quad (3.4)$$

на плоскости  $(x, y)$  имеются две особые точки. При выполнении равенства в (3.4) особые точки сливаются, при перемене знака неравенства в (3.4) – отсутствуют.

Уравнения линий тока, являющихся траекториями движения элементов ЛП, имеют вид

$$dx/dt = -\partial\Psi/\partial y, \quad dy/dt = \partial\Psi/\partial x \quad (3.5)$$

Для определения типа особой точки поместим начало координат в нее и представим  $\Psi$  в ее окрестности в виде

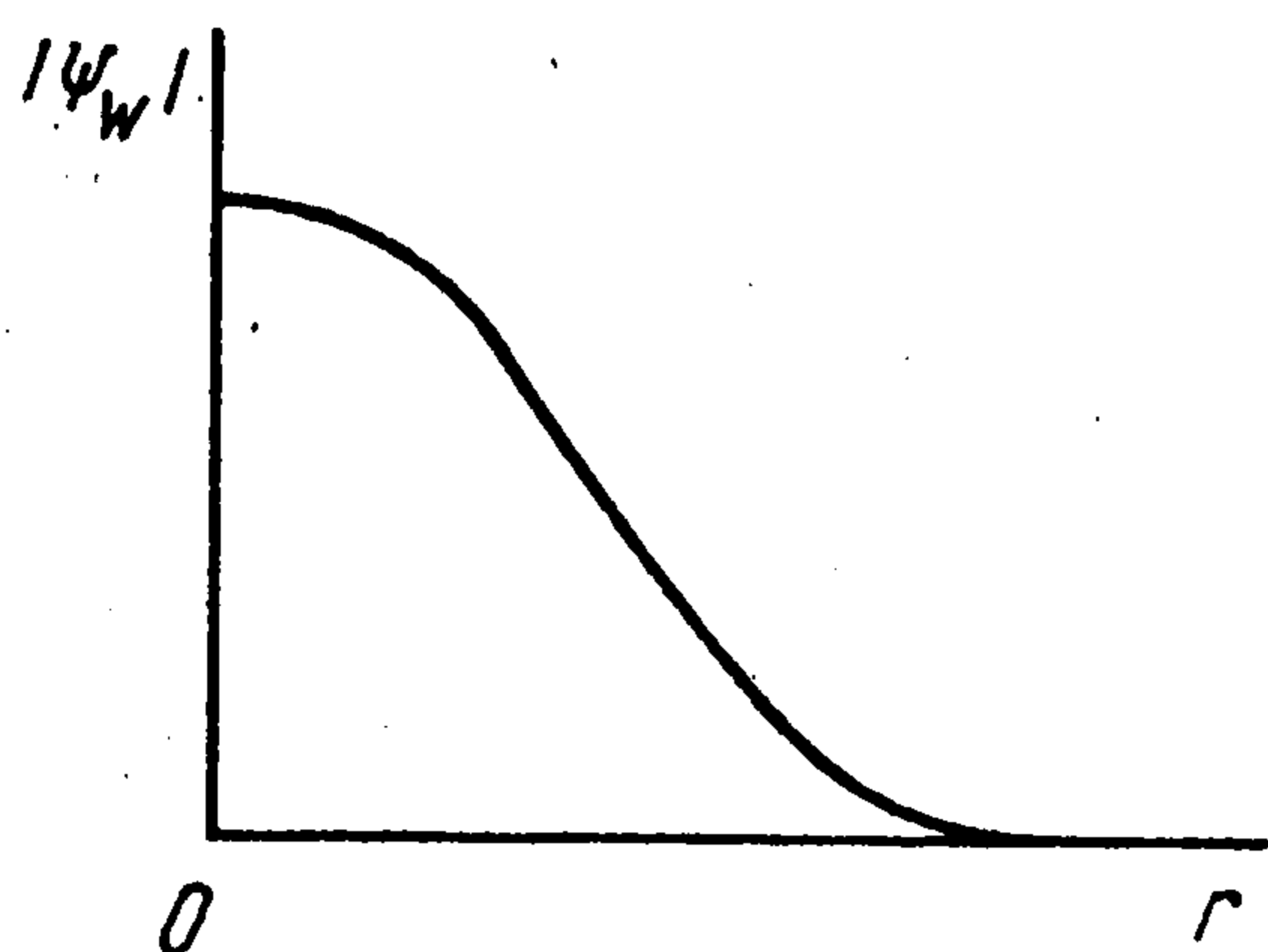
$$\Psi = \Psi_{xx}^i x^2 + \Psi_{xy}^i xy + \Psi_{yy}^i y^2, \quad i = 1, 2 \quad (3.6)$$

где  $\Psi_{xx}^i, \Psi_{xy}^i, \Psi_{yy}^i$  – значения соответствующих производных  $\Psi$  в  $i$ -й особой точке.

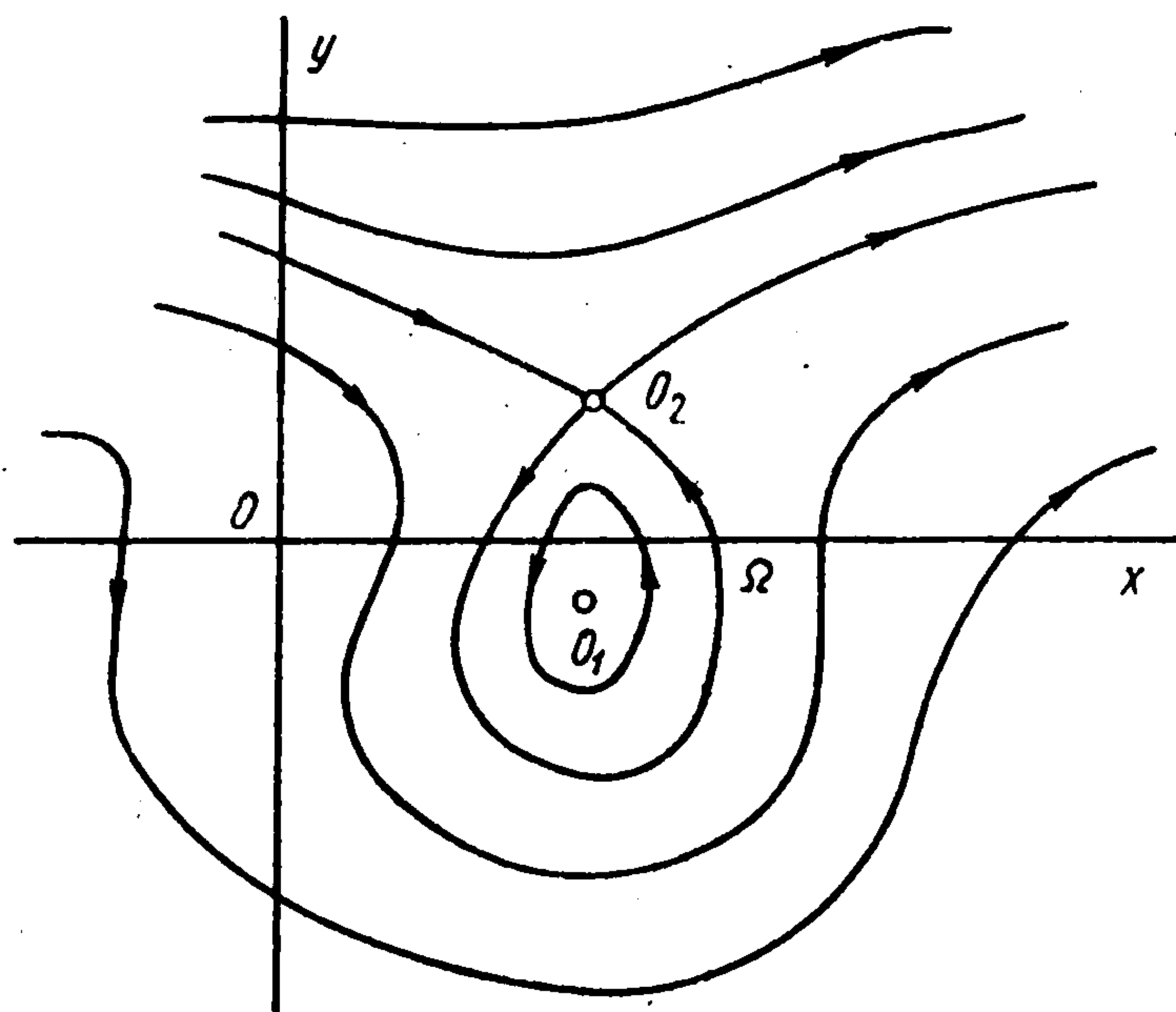
Подставляя (3.6) в (3.5) и используя (3.4), находим собственные числа системы (3.5)

$$\lambda_i^2 = (\Psi_{xy}^i)^2 + \Psi_{xx}^i \Psi_{yy}^i = - (d\Psi_w/dr)^i (d^2\Psi_w/dr^2)^i r^{-1}$$

Отсюда в соответствии с фиг. 5,6 следует, что особая точка  $O_1$  – центр, а особая точка  $O_2$  – седло. На фиг. 6 представлен фазовый портрет.



Фиг. 5



Фиг. 6

Распределение сплошности в рассматриваемом случае описывается уравнением переноса  $dA/dt = 0$ . Если в начальный момент времени ЛП отсутствовал внутри области  $\Omega$ , ограниченной на плоскости  $(x, y)$  сепаратрисой, проходящей через  $O_2$ , то и с течением времени он там не появится. Наоборот, ЛП, находящийся внутри  $\Omega$  не может выйти наружу. Движение ЛП внутри  $\Omega$  имеет вихревой характер. ЛП, находящийся ниже фазовой кривой, проходящей через точку  $O_2$ , имеет сильно искривленные траектории движения в окрестности петли сепаратрисы.

4. Рассмотрим задачу о дрейфе однородного ЛП на поверхности вязкой жидкости под воздействием постоянного ветра. Предполагается, что поверхность жидкости горизонтальна. Далее удобно ввести обозначения

$$u_w = u_{w,x} + i u_{w,y}, \quad V_a = V_{a,x} + i V_{a,y}, \quad V = u + i v$$

$$F_{ai} = F_{ai,x} + i F_{ai,y}, \quad F_{wi} = F_{wi,x} + i F_{wi,y}, \quad i^2 = -1$$

Уравнения стационарных движений жидкости и ледяного покрова записываются в комплексной форме ( $\mu$  – вязкость жидкости)

$$\mu \partial^2 u_w / \partial z^2 = i \rho_w f u_w, \quad i \rho h f V = F_{ai} + F_{wi} \quad (4.1)$$

Граничные условия на поверхности жидкости при  $z = 0$  и на дне при  $z = -H$  при-

нимаются в виде

$$\mu(Au_w/h_E + (1-A)\partial u_w/\partial z) = \mu AV/h_E + (1-A)F_{aw}, z=0 \quad (4.2)$$

$$u_w = 0, z = -H; h_E = (f\rho_w/\mu)^{-1/2}$$

При  $A = 1$  (сплошной ЛП) условие (4.2) сводится к условию прилипания частиц жидкости к ЛП. В отсутствие ЛП при  $A = 0$  (4.2) сводится к заданию ветровых касательных напряжений на поверхности жидкости

$$F_{aw} = C_{aw}\rho_a |V_a| V_a$$

Если глубина жидкости  $H$  много больше глубины Экмана  $h_E$ , характерная величина которой несколько десятков метров [15], то решение (4.1) вблизи поверхности жидкости имеет вид [17]

$$u_w = k \exp(\lambda z)/\lambda, \lambda = \exp(i\pi/4)/h_E$$

Комплексные величины  $V$  и  $k$  находятся из второго уравнения (4.1) и (4.2)

$$V = \Delta [C_a h_E (A \exp(-i\pi/4) + 1 - A) + C_{aw} (1 - A) h_E C_w \rho_w / (\mu \lambda)] \quad (4.3)$$

$$k = \Delta [C_a A + (1 - A) C_{aw} h_E (i\rho h f + C_w \rho_w) / \mu]$$

$$\Delta = \rho_a |V_a| V_a [A C_w \rho_w / \lambda + (A \lambda + h_E (1 - A)) (i\rho h f + C_w \rho_w)]$$

В частных случаях из (4.4) находим

$$\nabla \lambda = k = C_a \rho_a |V_a| V_a (2C_w \rho_w + i\rho h f), A = 1 \quad (4.4)$$

$$V = \rho_a |V_a| V_a [C_a + C_{aw} C_w \rho_w / (\mu \lambda)] [C_w \rho_w + i\rho h f]^{-1}$$

$$k = C_{aw} \rho_a |V_a| V_a / \lambda, A = 0$$

В предельном случае  $A \rightarrow 0$  скорость жидкости на поверхности  $z = 0$  составляет с направлением ветра угол  $\pi/4$  [15]. Скорость ЛП определяется балансом сил трения со стороны ветра и жидкости и силы Кориолиса. При дрейфе сплошного ЛП ( $A = 1$ ) угол между направлениями скоростей ветра и ЛП равен  $\pi/4 + \arctg[\rho h f / (2C_w \rho_w)]$ .

Из (4.3), (4.4) следует, что скорости стационарного дрейфа участков ЛП различной толщины и различной сплоченности не равны. Поэтому при одинаковом ветре они могут сталкиваться, догоняя друг друга и образуя в местах столкновения области сплоченного ЛП, или удаляться друг от друга, освобождая пространства чистой воды. Если границы участков прямолинейны, то при их столкновении образуются полосы сплоченного ЛП. Формирование и эволюция полос может быть описана разрывными решениями типа шнура уравнений динамики дисперсного ЛП [18].

5. Исследуем влияние плоских поверхностных волн на распределение дисперсного ЛП на поверхности океана. Рассматриваются движения с характерными временными масштабами, много меньшими суток. Поэтому в уравнениях импульса сила Кориолиса не учитывается. Законы сохранения массы и импульса записываются в характеристической форме

$$dA/dt + A du/dx = 0, dx/dt = u \quad (5.1)$$

$$\rho h du/dt = C_w \rho_w (u_w - u) - \rho g h \partial \eta / \partial x + C_a \rho_a |V_a| V_a$$

Из (5.1) видно, что элементы ЛП движутся по характеристикам. Области пересечения характеристик соответствуют местам скопления льда.

Предположим, что движение жидкости имеет потенциал скоростей  $\phi$ . Тогда для линейных волн имеем

$$u = \partial \phi / \partial x, \partial \eta / \partial t = \partial \phi / \partial z, z = 0 \quad (5.2)$$

Рассмотрим для примера потенциал периодических плоских волн в жидкости бесконечной глубины

$$\varphi = u_0 \sin \theta e^{kz}, \quad \omega^2 = gk, \quad \theta = kx + \omega t, \quad k > 0 \quad (5.3)$$

где  $u_0$  — амплитуда горизонтальной скорости частиц жидкости в волне. Амплитуда волны равна  $a = u_0 \omega / g$ .

Подставляя (5.2), (5.3) в (5.1), получаем

$$\rho h du/dt = \alpha \sin(\theta_0 - \theta) - C_w \rho_w u + C_a \rho_a |V_a| V_a \quad (5.4)$$

$$d\theta/dt = \omega(\omega u/g + 1)$$

$$\alpha = u_0 [(C_w \rho_w)^2 + (\rho \omega h)^2]^{1/2}, \quad \sin \theta_0 = C_w \rho_w u_0 / \alpha$$

Система (5.4) может иметь особые точки  $(-g/\omega, \theta_{1,2}^n)$  на плоскости  $(u, \theta)$ . Здесь

$$\theta_1^n = \theta_0 + \arcsin(\beta/\alpha) + 2n\pi, \quad n \in Z \quad (5.5)$$

$$\theta_2^n = \theta_0 - \arcsin(\beta/\alpha) + (2n + 1)\pi$$

$$\beta = C_w \rho_w g/\omega + C_a \rho_a |V_a| V_a$$

Условие существования особых точек  $\beta/\alpha \leq 1$  записывается в виде неравенства для амплитуды волн

$$a \geq (C_w \rho_w g + C_a \rho_a \omega |V_a| V_a) [g^2 ((C_w \rho_w)^2 + (\rho \omega h)^2)]^{-1/2} \quad (5.6)$$

Линеаризуя уравнения (5.4) в окрестности особых точек (5.5) и вычисляя собственные числа, соответствующие  $\theta_1^n, \theta_2^n$ , находим

$$2\lambda_{1,2} = -C_w \rho_w \pm D_{1,2}^{1/2} \quad (5.7)$$

$$D_{1,2} = (C_w \rho_w)^2 + (-1)^{1,2} \omega^2 (\alpha^2 - \beta^2)/g$$

Особые точки  $\theta_2^n$  — седла, а точки  $\theta_1^n$  — устойчивые фокусы при  $D_1 < 0$  и узлы при  $D_1 \geq 0$ . Наличие фокусов или узлов на фазовой плоскости  $(u, \theta)$  приводит к существованию областей пересечения характеристик на плоскости  $(\theta, t)$ . В этом случае ЛП под влиянием волн сбивается в полосы.

Если скорости ветра и волн имеют одинаковое направление и амплитуда волн  $a$  достаточно мала, то  $\omega V_a < 0$ , и условие (5.6) может выполняться только при достаточно сильном ветре. В этом случае усиление ветра приводит к более интенсивному формированию полос льда.

6. Рассмотрим влияние локализованного в направлении  $y$  течения в жидкости на сплошной ЛП. Скорость течения направлена вдоль оси  $x$ . Профиль скоростей течения  $V(y)$  представлен на фиг. 7. Сила трения, действующая со стороны жидкости на элемент ЛП в направлении  $x$  определяется формулой

$$F = C_w (V(y) - u) \quad (6.1)$$

Предположим, что ЛП неподвижен и в нем возникают под влиянием течения упругие напряжения. В этом случае (1.1), (1.2) сводятся к уравнениям статики

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = -F, \quad -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad A = \text{const}, \quad h = \text{const} \quad (6.2)$$

которые необходимо дополнить условиями совместности деформаций. Принимая для деформаций сжатия закон Гука (2.5), (2.9), находим

$$p = -k(\partial w_x/\partial x + \partial w_y/\partial y), \quad k = k_e h$$

где  $w_{x,y}$  — компоненты смещения в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно. Условие совместности деформаций записывается в виде [19]

$$2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\mu + k}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) s = 0 \quad (6.3)$$

$$\left( \tau = \mu \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right), \quad s = \mu \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) \right)$$

Уравнения (6.2), (6.3) имеют простое решение

$$p = \sigma_y + \sigma_p, \quad s = -\sigma_y + \sigma_s, \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = -F, \quad \tau = \mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \quad (6.4)$$

$$\sigma = \text{const}, \quad \sigma_p = \text{const}, \quad \sigma_s = \text{const}$$

Рассмотрим задачу о воздействии подледного течения на кромку ЛП, которая совпадает с прямой  $y = y_1$ . Поверхность жидкости при  $y < y_1$  свободна от льда. Граничное условие для напряжений имеет вид  $\tau = 0$  при  $y = y_1$ . Отсюда и из (6.4) находим

$$\tau = - \int_{y_1}^y F dy \quad (6.5)$$

Если  $y_1 < H$  (см. фиг. 7), то  $\tau = \tau(y)$  монотонная функция (см. фиг. 8) и  $\tau = \text{const}$  при  $y > H$ .

Рассмотрим задачу о воздействии симметричного подледного течения ( $u_{\text{max}} = 0$  на фиг. 7) на ЛП в предположении, что  $w_x = 0$ ,  $y = \pm H$ .

Решение дается формулами

$$\tau = - \int_0^y F dy, \quad w_x = w_0 + \int_0^y \tau dy \mu^{-1} \quad (6.6)$$

Постоянная  $w_0$  находится из граничных условий. Примерные графики зависимостей  $\tau(y)$  и  $w_x(y)$  представлены на фиг. 9.

Из (6.5), (6.6) следует, что в рассматриваемых задачах максимальные напряжения достигаются в точках  $y = \pm H$ . Поэтому при достаточно интенсивных течениях в ЛП может возникнуть пластическое течение.

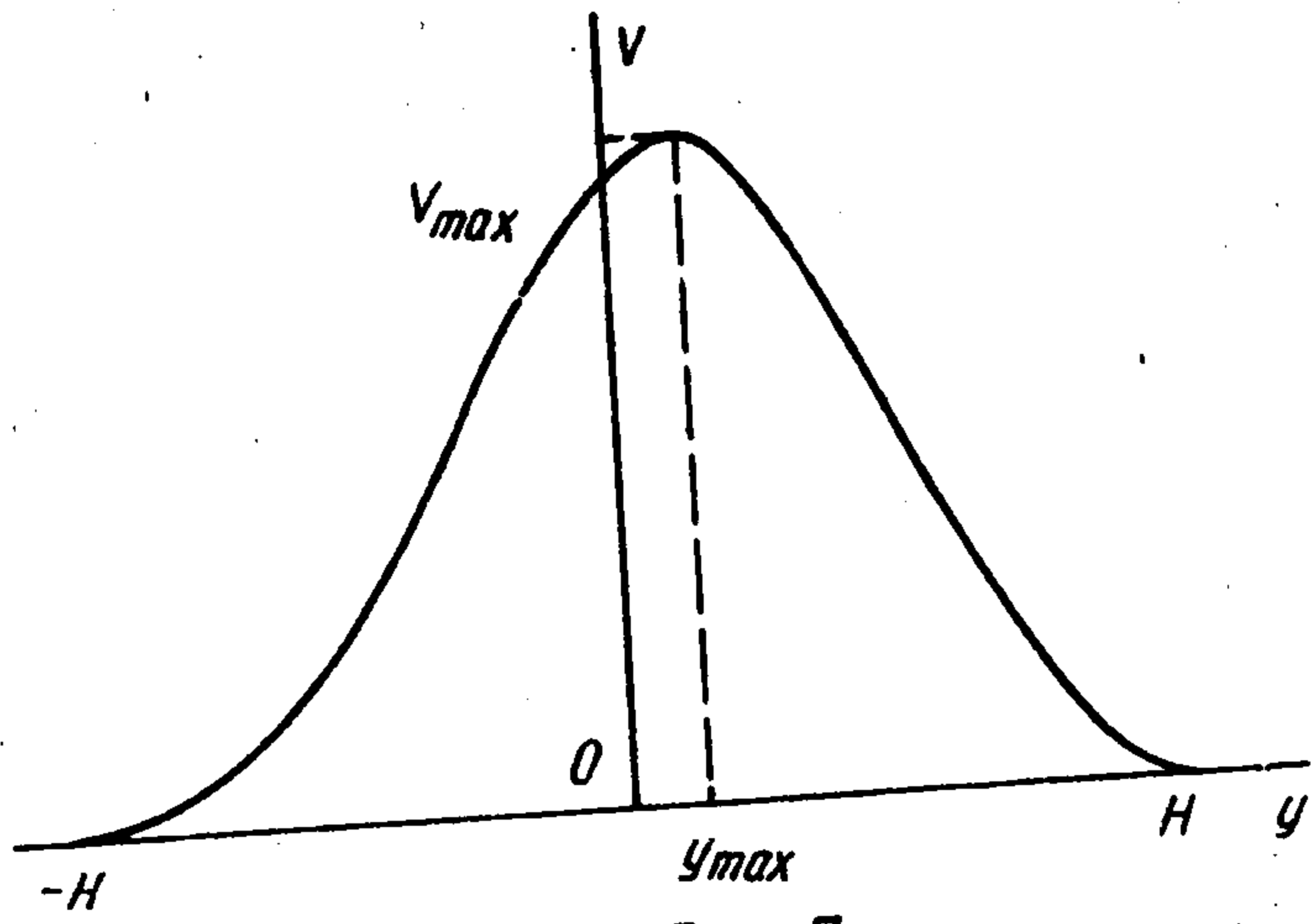
Рассмотрим стационарные пластические течения, в которых все параметры зависят только от  $y$  и  $v = 0$ . Из (1.1)–(1.3) имеем

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = -F, \quad \frac{\partial (p + s)}{\partial y} = 0 \quad (6.7)$$

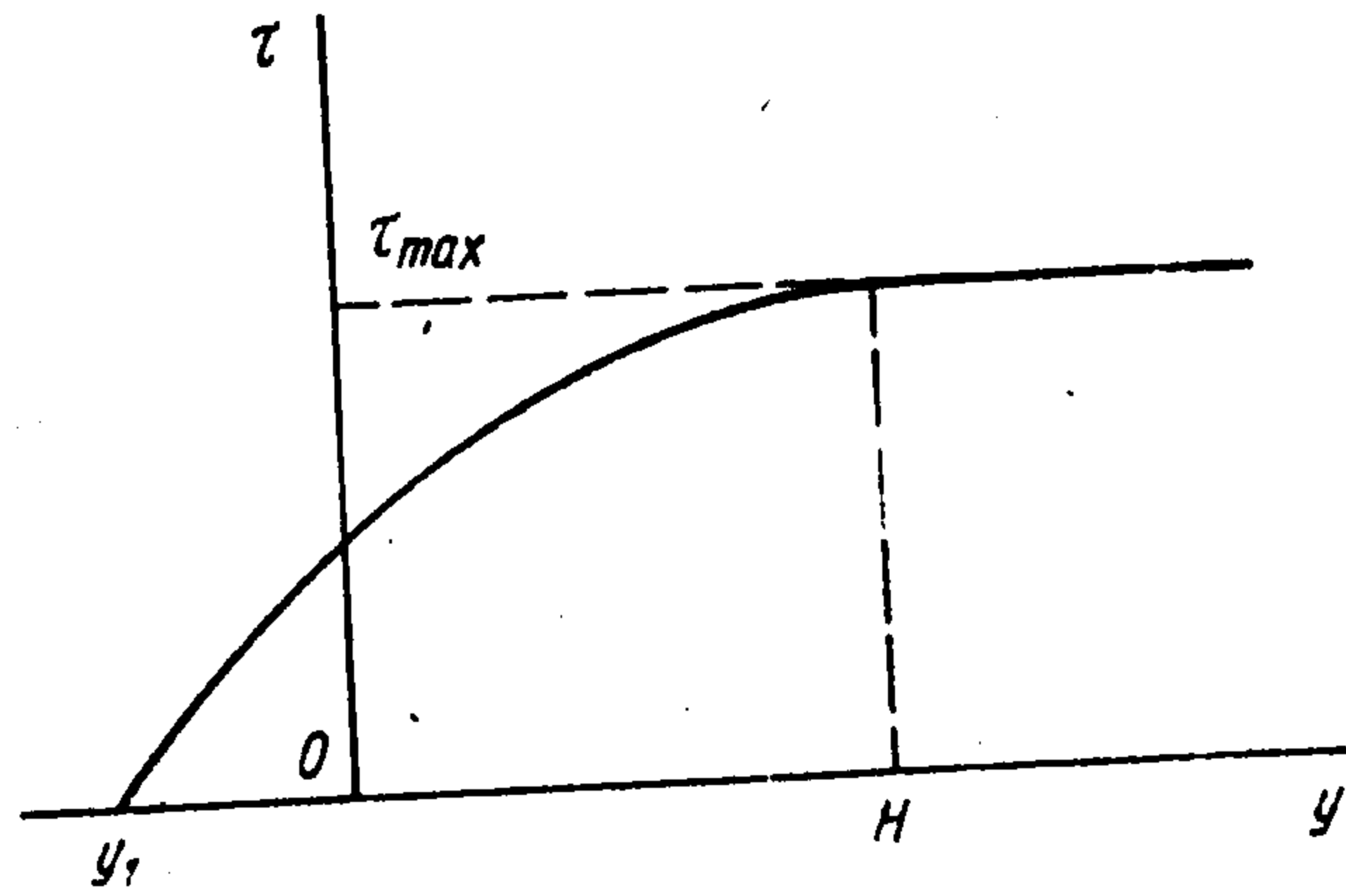
$$-\tau \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda s = 0, \quad s \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.8)$$

$$s^2 + \tau^2 = \sin^2 \gamma_d (p - \pi_d)^2 \quad (6.9)$$

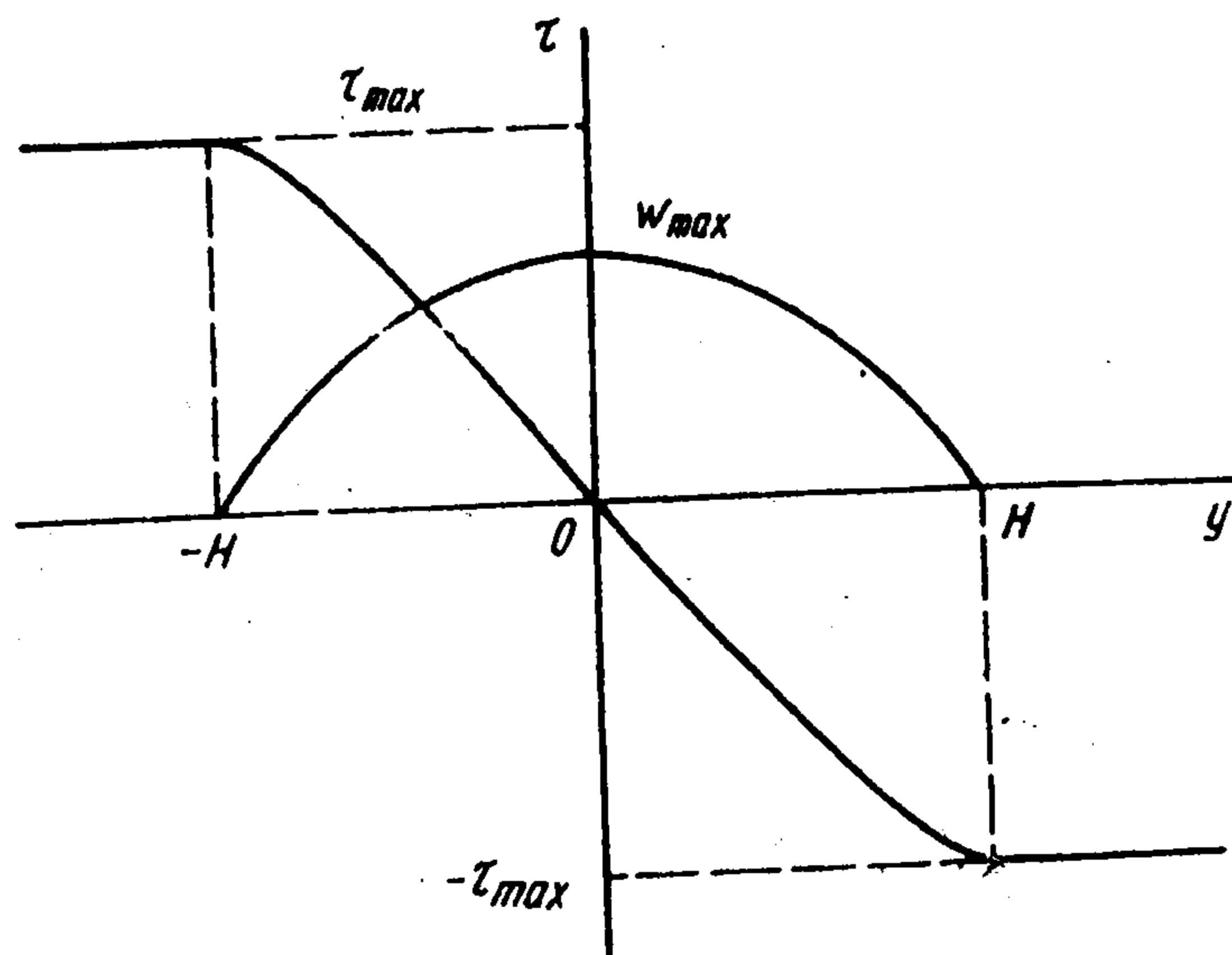
$$\lambda \geq 0 \quad (6.10)$$



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Из (6.8) при  $du/du \neq 0$  находим

$$s^2 + \tau^2 = \mu s, \quad p = -s - s_0 \quad (6.11)$$

Из первого уравнения (6.8), (6.9), (6.11) следует, что

$$p = \text{const}, \quad s = \text{const}, \quad \tau = \text{const}, \quad u = V(y) \quad (6.12)$$

Условие пластичности (6.9) сводится к уравнению

$$\sin^2 \gamma_d (s + s_0 + \pi_d)^2 - \mu (s + s_0 + \pi_d) + \mu (s_0 + \pi_d) = 0 \quad (6.13)$$

Решение уравнения (6.13), удовлетворяющее оценкам (2.6), записывается в приближенном виде

$$s + s_0 + \pi_d \cong s_0 + \pi_d + \sin \gamma_d \frac{(s_0 + \pi_d)^2}{4\mu} + O\left(\frac{(s_0 + \pi_d)^2}{\mu^2}\right) \quad (6.14)$$

Отсюда видно, что  $s \geq 0$  и условие (6.10) выполняется, если  $\tau du/du \geq 0$ . Постоянная  $s_0$  в решении определяет давление  $p$ . Напряжение  $\tau$  находится из (6.9).

Предположим, что поле скоростей  $V(y)$  и напряжения  $s, \tau$  таковы, что чисто упруго решение задач (6.5), (6.6) невозможно. Построим стационарные упругопластически решения, предполагая, что часть ЛП движется как целое с постоянной скоростью  $u_0 = \text{const}$ , а часть льда принимает участие в пластическом течении. Напряжения упругой области должны достигать предельного максимального значения  $\tau = \pm \tau$  удовлетворяющего условию пластичности (6.9) на границах с пластической областью. В задаче о воздействии течения на кромку льда упругая область имеет леву

границу, совпадающую с кромкой. Ее ширина  $L$  и  $u_0$  определяются из уравнений

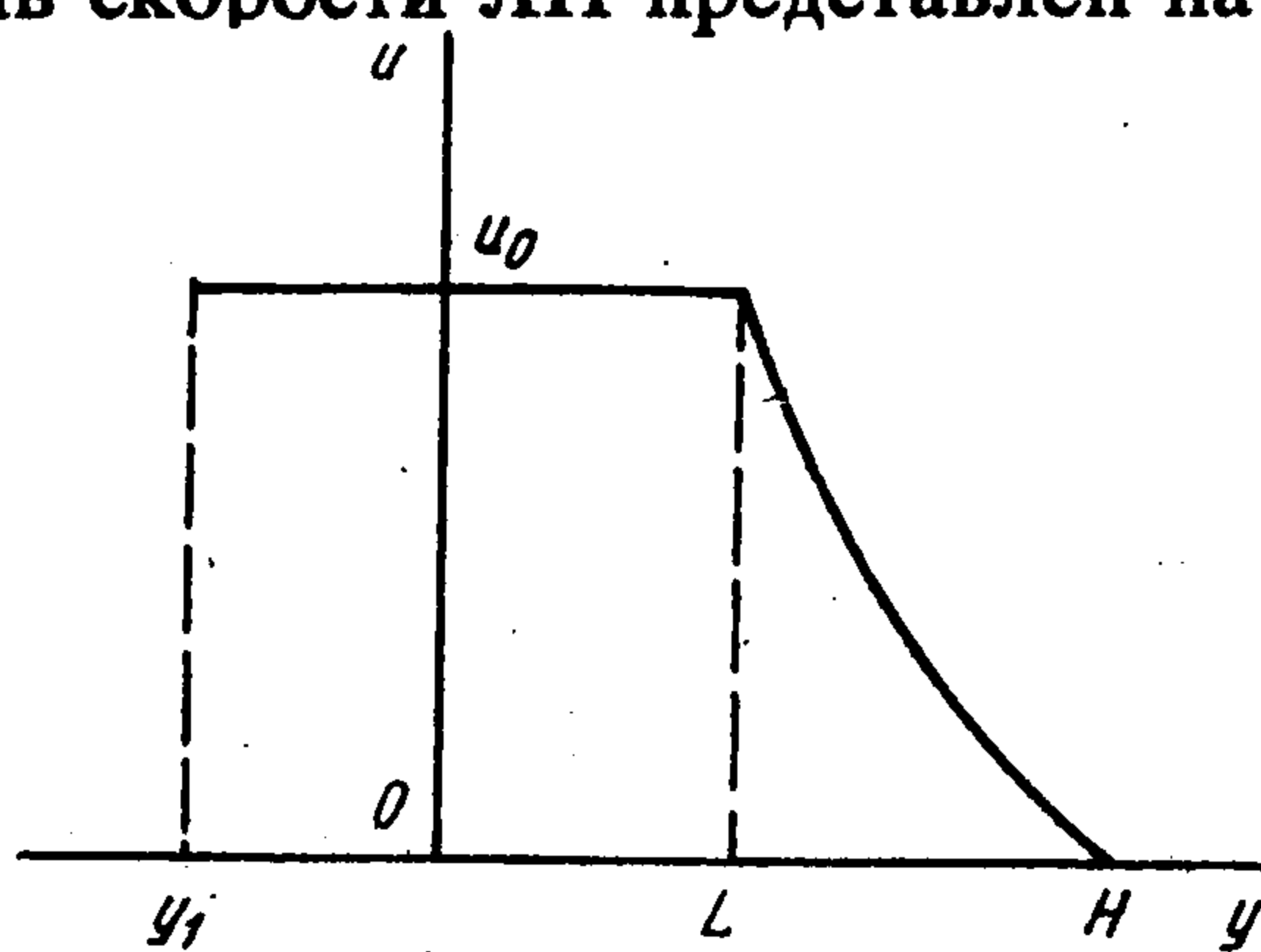
$$\tau_p = C_w \int_{y_1}^L (V(y) - u_0) dy, \quad V(L) = u_0$$

К упругой области справа примыкает пластическое течение (6.12), (6.13). Напряжения в упругой области определяются из (6.6), где надо положить  $u = u_0$ . Профиль скорости ЛП представлен на фиг. 10.

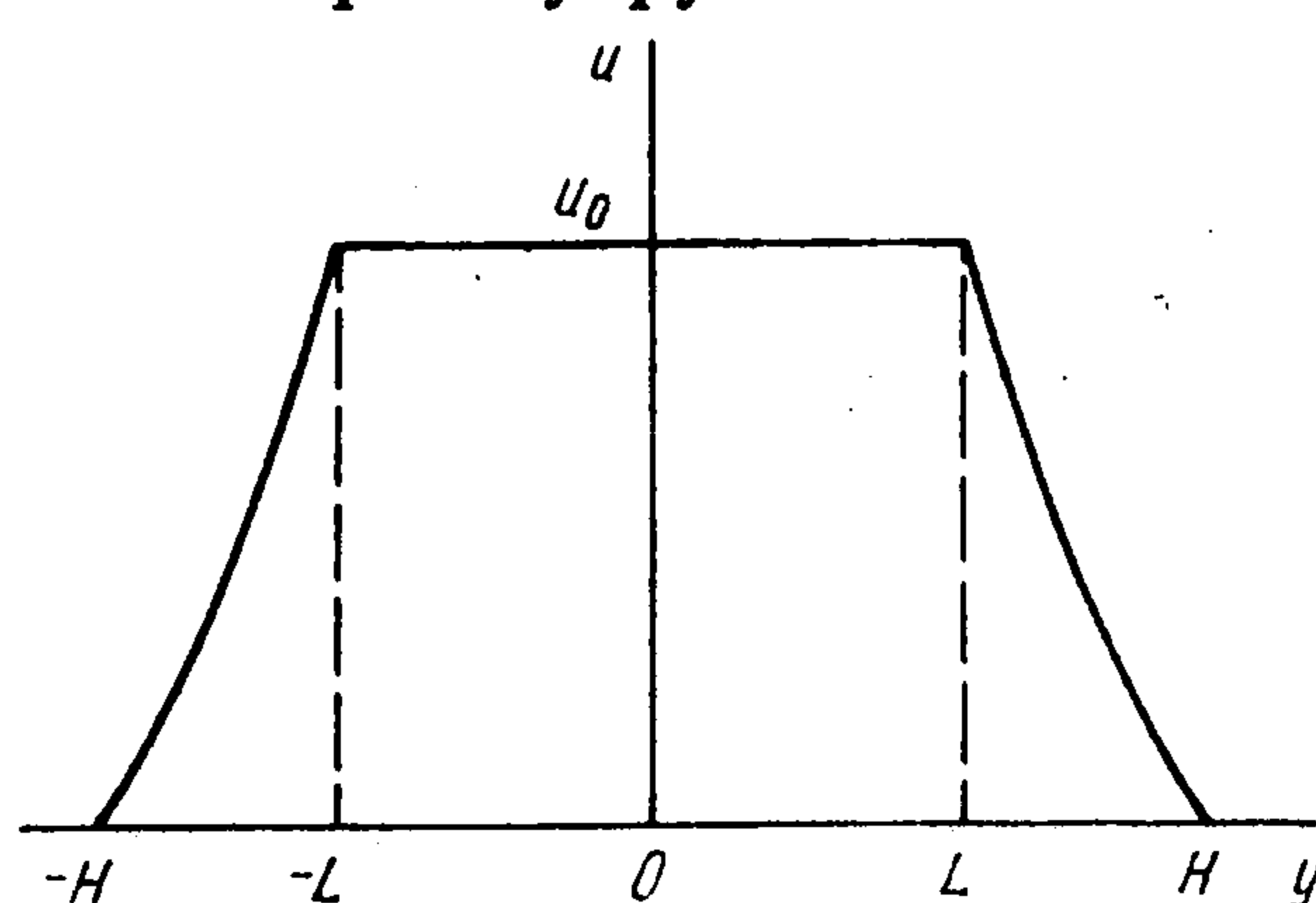
В задаче о воздействии симметричного течения на сплошной ЛП упругая область является полосой с границами  $y = \pm L$ . Величины  $u_0$  и  $L$  находятся из уравнений

$$\tau_p = C_w \int_0^L (V(y) - u_0) dy, \quad V(L) = u_0$$

К упругой области примыкает область пластического течения (6.12), (6.13). Напряжения в упругой области определяются из (6.6), где надо положить  $u = u_0$ . Профиль скорости ЛП представлен на фиг. 11. Ширина упругой области  $2L$  и ско-



Фиг. 10



Фиг. 11

рость  $u_0$  зависят от  $\tau_p$ , а следовательно от напряжений  $p$ ,  $s$ . Поэтому увеличение ледового сжатия приводит к росту  $\tau_p$  и может вызвать остановку пластического течения.

7. Рассмотрим восторженный ЛП при  $h \cong h_f$ . Полагаем, что выполнены приближения (2.2), (2.5), т.е. ЛП уплотняется до  $A = 1$  без возникновения внутренних напряжений, и при торошении напряжения сдвига много меньше сжатия. Система уравнений, описывающая движения такого ЛП, имеет вид

$$\partial(Ah)/\partial t + \nabla(Ahu) = 0 \quad (7.1)$$

$$\rho_0 Ah du/dt = -\nabla p + F \quad (7.2)$$

$$p = 0 \text{ при } A < 1; p = \pi_p(h, h_f) \text{ при } dh/dt > 0, A = 1 \quad (7.3)$$

$$\dot{p} = \pi_e, dh/dt = 0 \text{ при } \pi_1(h, h_f) < p < \pi_p(h, h_f), A = 1$$

$$\pi_p(h_f, h_f) = \pi_1(h_f, h_f) = 0, \pi_p(h, h_f) = k(h - h_f)$$

Рассмотрим задачу о столкновении массива льда с твердой стенкой, имеющей форму клина с углом раствора  $2\alpha$  при вершине. Стороны клина составляют с осью  $x$  угол  $\alpha$ .

При  $\alpha = \pi/2$  для аналогичной задачи было найдено [1] нестационарное разрывное решение, описывающее рассматриваемый процесс. Ниже исследуются стационарные разрывные решения (7.1)–(7.3) при  $F = 0$ , которые могут реализовываться при обтекании клина с углом раствора  $2\alpha < 2\alpha_* < \pi$  вблизи его вершины, где влияние силы  $F$ , определяемой (3.1), мало по сравнению с внутренними напряжениями во льду.

Предполагается, что при столкновении со стенкой ЛП уплотняется до  $A = 1$  и затем тороится. Соотношения на стационарном разрыве между дисперсным и сплоченным

всторошенным льдом записываются в виде

$$A_1 h_1 V_1 \sin \theta = h_2 V_2 \sin(\theta - \alpha), \quad V_1 \cos \theta = V_2 \cos(\theta - \alpha) \quad (7.4)$$

$$A_1 h_1 V_1^2 (1 - A_1 h_1 / h_2) \sin^2 \theta = \pi_p(h_2, h_1) / \rho_0$$

Индекс 1 присвоен параметрам расплывшегося ЛП, втекающего в разрыв, индекс 2 соответствует параметрам всторошенного ЛП,  $\theta$  – угол между направлением скачка и осью  $x$ .

Из (7.4) находим для определения угла  $\theta$  кубическое уравнение

$$(z - v)[z(A_1 \mu + 1) + 1] = A_1 z(1 + z)^2 \quad (7.5)$$

$$z = \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha, \quad v = \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad \mu = \rho_0 V_1^2 / k$$

Уравнение (7.5) всегда имеет один действительный корень  $z^- < 0$ , не имеющий физического смысла. Из (7.5) следует, что если существуют еще два действительных корня  $z_{1,2}^+$ , то они удовлетворяют условию  $z_{1,2}^+ > \operatorname{tg}^2 \alpha$ . Наличие положительных

корней  $z_{1,2}^+$  зависит от знака определителя уравнения (7.5), который имеет громоздкий вид и здесь не приводится. Равенство определителя нулю соответствует предельному углу раствора клина  $2\alpha_*$ , при котором имеется решение с присоединенным к носу клина стационарным скачком. При  $\alpha < \alpha_*$  имеются два решения, с присоединенным скачком, удовлетворяющие условию  $\theta > \alpha$ . Аналогичный эффект имеет место в газовой динамике при обтекании клина [20]. Единственное решение можно выбирать исходя из экспериментальных данных.

Рассмотрим два предельных случая, в которых решение уравнения (7.5) может быть построено приближенно. Положим  $\mu \ll 1$ , что соответствует малым скоростям движения ЛП. В этом случае имеем

$$z^- = -1 + O(\mu), \quad z_{1,2}^+ = (1 - A_1 \pm \sqrt{\Delta_1}) / (2A_1) + O(\mu) \quad (7.6)$$

$$\Delta_1 = 1 + A_1^2 - 2A_1(1 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha)$$

Условие  $\Delta_1 \geq 0$  приводит к неравенству

$$A_1 \leq N(\alpha), \quad N(\alpha) = 1 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha - 2\operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2}$$

Иными словами, для реализации решения с присоединенным скачком при медленных движениях льда его сплоченность должна быть меньше  $N(\alpha) \leq 1$ . Предельный угол раствора клина в этом случае определяется формулой

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_* = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + A_1^2}{2A_1} - 1 \right)$$

Положим  $v \ll 1$ , что соответствует малым углам раствора клина. В этом случае имеем

$$z_1^+ = v / (1 - A_1) + O(v^2), \quad z^- = (1 + \mu A_1 - 2A_1 - \sqrt{\Delta_2}) / (2A_1) + O(v) \quad (7.7)$$

$$z_2^+ = (1 + \mu A_1 - 2A_1 + \sqrt{\Delta_2}) / (2A_1) + O(v), \quad \Delta_2 = (1 + \mu A_1 - 2A_1)^2 + 4A_1(1 - A_1)$$

Очевидно, что при  $A_1$ , близких к единице, решение (7.7) теряет смысл. Положим  $A_1 = 1 - \sqrt{va}$ . При этом корень  $z_1^+$  может быть найден в виде ряда по степеням  $\sqrt{v}$

$$z_1^+ = \sqrt{v} y_1 + v y_2 + \dots, \quad y_1 > 0 \quad (7.8)$$

Подставляя (7.8) в (7.5), находим

$$(\mu - 1)y_1^2 + ay_1 - 1 = 0 \quad (7.9)$$

Это уравнение имеет действительные корни при  $a^2 > 4(1 - \mu)$ . При  $\mu \geq 1$  действительный и положительный корень  $y_1$  существует. При  $\mu < 1$  условие существования действительных корней (7.9) имеет вид

$$A_1 \leq N(\alpha, \mu), \quad N(\alpha, \mu) = 1 - 2\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1 - \mu}$$

Отсюда видно, что критическое значение сплоченности льда, при котором могут существовать решения с присоединенным скачком, увеличивается при увеличении скорости набегания льда на клин.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-03-16482).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко А.В. О распространении разрывов в дрейфующем ледяном покрове // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 419-433.
2. Pritchard R.S. An elastic-plastic constitutive law for sea ice // J. of Appl. Mech. 1975. V. 42. N 2. P. 379-384.
3. Pritchard R.S. Mathematical characteristics of sea ice dynamics models // J. of Geoph. Res. 1988. V. 93, №. C12. P. 15,609-15,618
4. Hibler W.D., III. A dynamic thermodynamic sea ice model // J. Phys. Oceanogr. 1979. V. 9. P. 815-845.
5. Flato G.M., Hibler W.D., III. Modeling pack ice as a cavitating fluid // J. of Phys. Oceanogr. 1992. V. 22. P. 626-651.
6. Гольдштейн Р.В., Мосолов А.Б. Течение фрактально-битого льда // Докл. РАН. 1992. Т. 324. № 4. С. 576-581.
7. Тимохов Л.А., Хейсин Д.Е. Динамика морских льдов. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 272 с.
8. Григорян С.С. О некоторых упрощениях в описании движения мягких грунтов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 2. С. 287-294.
9. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
10. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Наука, 1990. 272 с.
11. Богородский В.В., Гаврило В.П. Лед. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 384 с.
12. Доронин Ю.П., Хейсин Д.Е. Морской лед. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 305 с.
13. Smith D.C. IV, Bird A.A. The interaction of an ocean eddy with an ice edge ocean jet in a marginal ice zone // J. Geophys. Res. 1991. V. 96. N. C3. P. 4675-4689.
14. Iked M. Wind-induced mesoscale features in a coupled ice-ocean system // J. Geophys. Res. 1991. V. 96. N. C3. P. 4623-4629.
15. Каменкович В.М. Основы динамики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1973. 240 с.
16. Назиров М. Льды и взвеси как гидротермодинамические трассеры. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 165 с.
17. Марченко А.В. О расчете ветровых течений в прикромочной зоне морского ледяного покрова // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. № 6. С. 132-141.
18. Макштас А.П., Марченко А.В. К теории формирования полос в дрейфующем ледяном покрове // Закономерности крупномасштабных процессов в Норвежской энергоактивной зоне и прилегающих районах. С. Пб.: Гидрометеиздат, 1993.
19. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
20. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.XII.1992