ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 58, Вып. 1 1994

УДК 531.38

© 1994 г. В.В. Лунев

МЕРОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

При помощи метода многогранников Ньютона указываются все решения задачи о показателях первых членов рядов Лорана, удовлетворяющих уравнениям движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой. Из двадцати шести полученных решений семнадцать новы. Исследуются условия появления в рядах Лорана произвольных постоянных интегрирования.

Вопрос о мероморфных решениях уравнений движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой впервые был поставлен [1] и изучен [2, 3] Ковалевской. В известных ранее случаях Эйлера и Лагранжа решения уравнений движения выражались эллиптическими функциями времени, т.е. функциями, разлагающимися в ряды Лорана и не имеющими других особенностей кроме полюсов. Ковалевская поставила задачу выяснить, в каких еще случаях, кроме известных, решения уравнений движения в этой задаче обладают такими же свойствами. В первую очередь интересны решения, которые содержали бы полный набор постоянных интегрирования, в данном случае пять постоянных. Она берет ряды (суммирование по n от нуля до бесконечности)

$$p=\tau^{n_1}\Sigma p_n\tau^n,\quad q=\tau^{n_2}\Sigma q_n\tau^n,\quad r=\tau^{n_3}\Sigma r_n\tau^n$$
$$\gamma_1=\tau^{m_1}\Sigma f_n\tau^n,\quad \gamma_2=\tau^{m_2}\Sigma g_n\tau^n,\quad \gamma_3=\tau^{m_3}\Sigma h_n\tau^n \tag{0.1}$$

где n_i, m_i (i = 1, 2, 3) – целые отрицательные числа, и утверждает [1], что из сравнения показателей степеней первых членов этих рядов имеем

$$n_i=-1,\ m_i=-2\quad (i=1,2,3) \tag{0.2}$$

не рассматривая, однако, вопроса о том, единственная эта система значений показателей или нет.

На незавершенность решения задачи Ковалевской первым обратил внимание Марков [4] (см. также [5, 6]).

Первое возражение Маркова. Из сравнения показателей степеней первых членов рядов Лорана (0.1) нельзя заключить, что значения (0.2) единственно возможные. Если рассмотреть системы показателей первых членов рядов Лорана, то будем иметь

$$n_1-1,\ n_2+n_3,\ m_3,\ m_2\quad (1,2,3) \tag{0.3}$$
$$m_1-1,\ n_3+m_2,\ n_2+m_3\quad (1,2,3)$$

Ковалевская уравнивает между собой в каждой из указанных шести систем не два, а все четыре или три числа и, таким образом, отбрасывает без достаточных оснований бесчисленное множество случаев, как например

$$n_i=-2,\ m_i=-4\quad (i=1,2,3)$$

Второе возражение Маркова. Ковалевская не рассматривает случаи кратных корней своего основного определителя, между тем как не исключена возможность существования однозначного общего интеграла и при наличии кратных корней [4].

На замечания А.А. Маркова обратили внимание Аппельрот [7] и Некрасов [8]. Аппельрот обобщил систему показателей, указанную Марковым взяв ее в виде

$$n_i = -n, \ m_i = -2n \quad (i = 1, 2, 3) \tag{0.4}$$

и доказал теорему о том, что решения уравнений движения тяжелого твердого тела допускают полюса третьего порядка. Рассматривая случай кратных корней Аппельрот и Некрасов нашли пропущенный Ковалевской частный случай, который ранее был обнаружен Гессом [9].

Ляпунов [10] снял второе возражение Маркова и доказал единственность общих случаев интегрируемости Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, в которых решения уравнений движения выражаются однозначными функциями времени. Ляпунов заключает [10]: "Если поэтому может быть речь о каких-либо новых случаях однозначности функций $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ при вещественных A, B, C, x_0, y_0, z_0 и при отличных от нуля A, B, C, то только в предположении, что начальные значения этих функций подчиняются известным условиям".

После указанных выше работ долгое время считалось, что вопрос об однозначных решениях задачи о движении твердого тела выяснен окончательно [11]. В то же время появился ряд работ по этой задаче, где указывались частные случаи интегрируемости уравнений движения, в которых решения были однозначными функциями времени. Однако методом Ковалевской, помимо случая Гесса–Аппельрота, не было найдено других частных случаев движения твердого тела, а в известной книге [12] он лишь упоминается.

Только в двух работах А.А. Богоявленского [13, 14] было убедительно показано, что метод Ковалевской применим и для получения частных решений, содержащих менее пяти произвольных постоянных интегрирования, причем удалось получить новые условия существования таких решений и найти условия, связывающие постоянные интегрирования. Совершенно справедливо было отмечено, что условия существования частных случаев, когда решения мероморфны, а также характер ограничений на начальные условия, никем не изучены.

Отметим, что метод Ковалевской с успехом применяется во многих других задачах с физическим содержанием, таких как система Хенона–Хейлеса, цепочки Тоды и др., [6] (см. также [15–17]).

Цель данной работы – дать исчерпывающий ответ на первое возражение А.А. Маркова.

1. Рассмотрим вопрос о возможных системах показателей первых членов рядов Лорана для решений задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. С этой целью используем метод наибольших и наименьших показателей, или, как он теперь называется, метод многогранников Ньютона [18] (об этом методе упоминает Марков в своем возражении). Согласно известной методике [19], нужно взять выражения первых членов рядов Лорана (0.1) и подставить в систему уравнений движения тяжелого твердого тела

$$A\dot{p} + (C - B)qr = Mg(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2), \quad \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad (A,B,C) \ (1,2,3) \ (x_0,y_0,z_0) \tag{1.1}$$

Система уравнений (1.1), как известно, имеет три первых алгебраических интеграла (энергии, момента и геометрический)

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2Mg(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) + h$$

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = l, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{1.2}$$

Система показателей степеней имеет вид (0.3). Сравнивая четыре показателя в первых трех уравнениях и три показателя в последних трех уравнениях, имеем

$$n_1 - 1 = n_2 + n_3 = m_3 = m_2 \quad (1,2,3)$$

$$m_1 - 1 = n_3 + m_2 = n_2 + m_3 \quad (1,2,3)$$

Можно убедиться, что единственным решением для этих уравнений служит система показателей (0.2), указанная Ковалевской. Но для получения рядов Лорана с ненулевыми постоянными коэффициентами $p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$ достаточно сравнивать не четыре и три показателя, как у Ковалевской, а два. Сравнивая в (0.3) показатели степеней попарно, получим следующие уравнения:

$$n_1-1=n_2+n_3,\quad n_1-1=m_3,\quad n_1-1=m_2,\quad n_2+n_3=m_3,$$

$$n_2+n_3=m_2,\quad m_3=m_2\quad (1,2,3)$$

$$m_1-1=n_3+n_2,\quad m_1-1=n_2+m_3,\quad n_3+m_2=n_2+m_3\quad (1,2,3) \tag{1.3}$$

Чтобы получить какое-либо решение для чисел n_i, m_i, необходимо взять из каждой строки (всего их шесть) по одному уравнению и объединить их в систему. Решения каждой такой системы дает необходимый набор чисел n_i, m_i. Поскольку число различных троек уравнений, полученных из первых трех строк (1.3), равно 216, а из вторых трех строк – 27, то число всевозможных шестерок уравнений, которые исчерпывают возможные наборы чисел n_i, m_i равно $216 \cdot 27 = 5832$. Очевидно, это то самое "бесчисленное множество других случаев", которое имел в виду Марков.

Анализируя уравнения (1.3), заметим, что в четвертой, пятой и шестой строке последние уравнения зависимые, поэтому возможно много решений, у которых одна из величин n_i, m_i неопределенна.

Все полученные таким образом системы были решены с использованием пакета программ "REDUCE". Было найдено много решений, у которых одна или несколько величин n_i, m_i произвольны. Большое количество решений являются решениями Ковалевской (0.3) и Аппельрота (0.4).

Из полученного числа решений нужно выбрать те, которые удовлетворяют принципу наибольших и наименьших показателей.

Решения полученных систем проверялись на соответствие этому принципу и выбирались таким образом, чтобы в каждой строке в (0.3) были два равных числа и, кроме того, эти два равных числа должны быть наименьшими. В этом случае получаются ряды Лорана, расположенные по возрастающим степеням времени τ. Анализ всевозможных систем решений позволил выделить следующие независимые системы решений, удовлетворяющих принципу наименьших показателей и исчерпывающих первое возражение Маркова:

1) $n_1=-3-m_3,\quad n_2=-3-m_3,\quad n_3=-1,\quad m_1=m_2=-2,\quad m_3>-2,\quad A=B$

2) $n_1=m_3+1,\quad n_2=m_3+1,\quad n_3=-1,\quad m_1=m_2=-2,\quad m_3>-2,\quad z_0=0$

3) $n_1=n_2=n,\quad n_3=-1,\quad m_1=m_2=-2,\quad n<-1,\quad A=B,\quad m_3>-2$

4) $n_1=n_2=n_3=-1,\quad m_2=m_3=-2,\quad m_1>-2$

5) $n_1=n_2=m_2/2,\quad n_3=-1,\quad m_1=m_2,\quad m_3=m_2/2-1,\quad m_2<-2,\quad z_0=0$

6) $n_1=n_2=m_2/2,\quad n_3=-1,\quad m_1=m_2,\quad z_0=0,\quad m_2<-2,\quad m_3>-2$

7) $n_1=n_2=n_3=-1,\quad m_1=-2,\quad m_2=m_3=m,\quad m<-2,\quad x_0=0$

8) $n_1=n_2=n_3=-1,\quad m_2=m_3=m,\quad m>-2,\quad m_1>-2,\quad m_1>m$

9) $n_1=m_1+1,\quad n_2=m_1+1,\quad n_3=-1,\quad m_1=m_2,\quad A=B,\quad m_1<-2,\quad m_3>-2$

10) $n_1=m_1+1,\quad n_2=m_1+1,\quad n_3=-1,\quad m_1=m_2,\quad m_3=-2,\quad m_1<-2,\quad A=B$

11) $n_1=(2m_1+1)/3,\quad n_2=n_3=(m_1-1)/3,\quad m_2=m_3,\quad m_3=(2m_1-2)/3,\quad m_1<-2$

12) $n_1=-1,\quad n_2=m_1+1,\quad m_2=m_3=-2,\quad m_1+n_3>-3,\quad m_1<n_3-1,\quad x_0=0,\quad m_1>-2$

13) $n_1=n_2=-1,\quad m_1=m_2=m_3=-2,\quad n_3>1$

14) $n_1=n_2=n_3=-1,\quad m_1=m_2=m_3=\pm 1$

15) $n_1=n_2=m_2-m_3-1,\quad n_3=-1,\quad m_1=m_2,\quad A=B,\quad m_3>-2,\quad m_3>m_2,\quad m_2<-2$

16) $n_1=n_2=m_1/2,\quad n_3=m_3-m_1/2,\quad m_1=m_2,\quad m_3>(3/2)m_1+1,\quad m_3<m_1/2-1$

17) $n_1=n_2=n,\quad n_3=-1,\quad m_1=m_2=2n,\quad n<-1,\quad m_3>-2,\quad z_0=0$

18) $n_1 = n_3 = -1,\ \ n_2 = n,\ \ m_1 = m_2 = m_3 = m,\ \ n > -1,\ \ m < -2$

19) $n_1 = n_3 = n,\ n_2 = m,\ m_1 = m_3 = 2n,\ m_2 = m + n,\ y_0 = 0,\ n_2 < -1,\ n_3 < -1,\ n_2 < n_3$

20) $n_1 = n_2 = n_3 = n,\ \ m_1 = m_2 = m_3 = 2n$

21) $n_1 = n_2 = m_1 + 1,\ \ n_3 = -1,\ \ m_1 = 2m + 2,\ \ m_2 = 2m + 2,\ \ m_3 = m,\ \ z_0 = 0,\ \ m < -2$

22) $n_1 = n_2 = m_3 + 1;\ \ n_3 = -1,\ \ m_1 = m_2 = m,\ \ m < -2,\ \ m_3 < m,\ \ m < 2m_3 + 2$

23) $n_1 = m + 1,\ \ n_2 = n_3 = m/2,\ \ m_1 = (3/2)m + 1,\ \ m_2 = m_3 = m,\ \ m < -2$

24) $n_1 = n_2 = m/4 - 1/2,\ \ n_3 = m/2,\ \ m_1 = m_2 = 3m/4 - 1/2,\ \ m_3 = m,\ \ m < -2$

25) $n_1 = -1,\ n_2 = n_3 = m - n - 1,\ m_1 = n,\ m_2 = m_3 = m,\ m < -2,\ n > m,\ B = C,\ n > -2$

26) $n_1 = n_2 = n_3 = n,\ \ m_1 = m_2 = m_3 = m,\ \ n < -1,\ \ m < 2n$

Ранее [20] были найдены решения *2, 4, 8, 13* и *14*. Все остальные решения требуют проверки. Здесь не указываются решения Ковалевской. Решениям Аппельрота соответствует система решений *20*.

2. Следующий этап исследования состоит в том, чтобы для каждого варианта показателей Ковалевской из системы нелинейных алгебраических уравнений найти коэффициенты первых членов рядов Лорана. Затем из систем линейных уравнений последовательно определить все остальные коэффициенты этих рядов. Кроме того, необходимо найти ограничения на параметры задачи, при выполнении которых в коэффициентах рядов Лорана появляются произвольные постоянные.

Ввиду того, что подробное изложение этих исследований занимает слишком много места, ограничимся перечислением полученных результатов. Поскольку многие решения для показателей Ковалевской, полученные в разд. 1, содержат неопределенные величины, ограничимся одним примером построения рядов Лорана, задавая неопределенную величину. Возможно построение рядов и при других значениях неопределенных величин.

Далее не исследуются два известных решения задачи о показателях Ковалевской (0.2) и (0.4).

На примере решения 1 для показателей Ковалевской поясним, как получаются системы алгебраических уравнений для нахождения первых и последующих коэффициентов рядов Лорана. Имеем.

$$n_1 = n_2 = -3 - m_3,\ \ n_3 = -1,\ \ m_1 = m_2 = -2,\ \ m_3 > -2,\ \ A = B$$

Запишем систему показателей первых членов рядов Лорана для всей системы (0.1). В данном случае она такая:

$$\begin{array}{l} -4 - m_3,\ \ -4 - m_3,\ \ \{m_3, -2\} \\ -4 - m_3,\ \ -4 - m_3,\ \ \{-2, m_3\} \\ -2,\ \{0\},\ -2,\ -2 \\ -3,\ -3,\ -3 \\ -3,\ -3,\ -3 \\ \{m_3 - 1\},\ -5 - m_3,\ -5 - m_3 \end{array} \qquad (2.1)$$

Очевидно, что в каждой строке есть два равных показателя, и при $m_3 > -2$ указанная система удовлетворяет принципу наименьших показателей. Для составления системы нелинейных алгебраических уравнений, которая нужна для нахождения коэффициентов первых членов рядов Лорана, из системы (0.1) выбираются только те слагаемые, показатели которых в (2.1) наименьшие. В (2.1) это все показатели, не заключенные в фигурные скобки. Окончательно система нелинейных алгебраических уравнений, для нахождения коэффициентов первых членов рядов Лорана имеет вид

$$\begin{aligned} &An_1p_0+(C-A)q_0r_0=0, \quad m_1f_0=r_0g_0-q_0h_0 \\ &An_2q_0+(A-C)p_0r_0=0, \quad m_2g_0=p_0h_0-r_0f_0 \\ &Cn_3r_0=Mg(x_0g_0-y_0f_0), \quad 0=q_0h_0-p_0g_0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Она имеет два решения:

$$\begin{aligned} &1)\ p_0=0,\ \ q_0=0,\ \ r_0=\pm 2i,\ \ f_0=\pm 2C/[Mg(x_0\pm iy_0)],\ \ i=\sqrt{-1} \\ &g_0=\mp 2Ci/[Mg(x_0\pm iy_0)],\ \ h_0 \text{ – произвольное число,} \\ &2)\ p_0=\pm iq_0,\ \ r_0=\mu i,\ \ f_0=\mu,\ \ g_0=\mu_1 i,\ \ h_0=\mu_2 i/q_0,\ \text{ где} \\ &\mu=A(3+m_3)/(C-A),\ \ \mu_1=-CA(3+m_3)/[Mg(C-A)(ix_0-y_0)] \\ &\mu_2=-CA[2(C-A)-A(3+m_3)](3+m_3)/[Mg(ix_0-y_0)(C-A)^2] \end{aligned} \tag{2.3}$$

Укороченная система линейных алгебраических уравнений для нахождения дальнейших коэффициентов рядов Лорана имеет вид

$$\begin{aligned} &(n+n_1)Ap_n+(C-A)(q_0r_n+r_0q_n)=P_m \\ &(n+n_2)Aq_n+(A-C)(r_0p_n+p_0r_n)=Q_m \\ &(n+n_3)Cr_n-Mg(y_0f_n-x_0g_n)=R_m \\ &(n+m_1)f_n-r_0g_n+g_0h_n-g_0r_n+h_0g_n=F_m \\ &(n+m_2)g_n-p_0h_n+r_0f_n-h_0p_n+f_0r_n=G_m \\ &-q_0f_n+p_0g_n-f_0q_n+g_0p_n=H_m, \quad n>m \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $P_m, Q_m, \ldots, H_m$ – полиномы от коэффициентов рядов Лорана, найденных на предыдущих шагах.

Система уравнений (2.4) отличается от системы, рассмотренной Ковалевской. В эту систему входят лишь коэффициенты тех членов рядов Лорана, сумма показателей которых для данного шага наименьшая. Далее показывается, что на решении 1 и 2 определитель системы (2.4) равен нулю тождественно на любом шаге. Для того чтобы построить ряды Лорана в этом случае, необходимо потребовать выполнения условия совместности системы уравнений (2.4). Установлено, что для решения 1 в (2.3) это условие совместности не выполняется для любого шага. Для решения 2 из условия совместности системы (2.4) сводится к уравнению для нахождения одного коэффициента h_i. Здесь получаем ряд Лорана, содержащий две постоянные. Для появления других постоянных в коэффициентах рядов, необходимо чтобы обращались в нуль какие-либо миноры пятого порядка. Эти миноры получаются вычеркиванием какого-либо столбца и строки из определителя системы (2.4). Всего можно образовать тридцать шесть различных миноров. Рассмотрим миноры пятого порядка не равные нулю тождественно.

Вычеркивание первого столбца и первой строки дает определитель, равный

$$D_1=(n-4)(y_0g_0+f_0x_0)f_0(A-C) \tag{2.5}$$

Он обращается в нуль в случаях: 1) $A=C$ (кинетическая симметрия), 2) $x_0=y_0=0$ (случай Лагранжа), 3) $n=4$.

В случае *3* на четвертом шаге появляется постоянная интегрирования в коэффициентах рядов. Условие совместности системы пяти линейных уравнений приводит к фиксированию постоянной q_0, но появляется новая постоянная.

Вычеркивание первого столбца и четвертой строки дает определитель

$$D_2=\{(A-C)^2p_0r_0+(A-C)(n+n_{\iota})Aq_0\}\{p_0y_0-q_0x_0\} \tag{2.6}$$

Уравнение $D_2 = 0$ имеет один корень

$$n = 6 + 2m_3 \tag{2.7}$$

Определитель, получающийся вычеркиванием первого столбца и последней строки, равен

$$D_3 = \{n-(6+2m_3)\}\{y_0(ir_0+2-n)-x_0[(n-2)i-r_0]\} \tag{2.8}$$

Если в (2.8) $x_0 = 0$, то уравнение $D_3 = 0$ имеет два корня

$$n=6+2m_3, \quad n=2+A(3+m_3)/(A-C)$$

Второй корень должен быть целым, что накладывает ограничения на параметры задачи. Неравенства треугольника будут удовлетворены, если выполнены неравенства $0 < C/A < 2$. Если $C/A = 1/3$, то $n = 5$, $m_3 = -1$; $n = 8$, $m_3 = 1$; $n = 11$, $m_3 = 3$; и т.д. Если $A/C = 2/3$, то $n = 8$, $m_3 = -1$; $n = 14$, $m_3 = 1$; $n = 20$, $m_3 = 3$ и т.д.

Вычеркивание второго столбца и четвертой строки дает определитель

$$D_4 = [n-(6+2m_3)][p_0y_0+q_0x_0]$$

Уравнение $D_4 = 0$ имеет корень (2.7).

Вычеркивание четвертого столбца и первой строки дает определитель

$$D_5 = C(n-4)(n+n_3)\{(n+n_2)Ag_0+f_0r_0(A-C)\}$$

Уравнение $D_5 = 0$ имеет корни

$$n = 1, \quad n = 0, \quad n = 6 + 2m_3$$

Вычеркивание последнего столбца и строки дает определитель с одним действительным корнем (2.7).

Окончательно на базе решения 2 можно построить ряды Лорана, содержащие две постоянные интегрирования.

Связь между постоянными интегралов энергии и момента может быть найдена подстановкой, например, рядов Лорана (0.1) в интегралы (1.2). В результате подстановки имеем уравнения

$$A(p_2^2+q_2^2+2p_4p_0+2p_1p_3+2q_0q_4)+C(r_1^2+2r_0r_2)=2Mg(x_0f_2+y_0g_2+z_0h_1)+h$$

$$A(p_2f_2+p_0f_4+p_4f_0+p_1f_3+p_3f_1)+A(q_2g_2+q_0g_4+q_4g_0+q_1g_3+q_3g_1)+$$
$$+C(r_1h_1+r_0h_2+r_2h_0)=l$$

$$f_2^2+g_2^2+h_1^2+2h_0h_2+2g_0g_4+2g_1g_3+2f_1f_3+2f_0f_4=1$$

Поскольку все коэффициенты рядов выражаются через произвольные постоянные, то указанные три соотношения также содержат эти постоянные. Исключая их, например при помощи результата, получим уравнения, связывающие постоянные интегрирования h и l.

В решении 2

$$n_1=n_2=m_3+1, \quad n_3=-1, \quad m_1=m_2=-2, \quad z_0=0, \quad m_3>-2$$

Здесь возможно построение рядов Лорана при следующих условиях:

1) $m_3 = 0$, $A = B$, $C = A/2$, $x_0 = 0$, $z_0 = 0$, постоянная интегрирования появляется при $n = 1$;

2) $m_3 = 1$, $C=[21-\sqrt{133}]A/8$, $B=[\sqrt{133}-9]A/4$, $x_0=z_0=0$, постоянная интегрирования появляется при $n = 1$, неравенства треугольника для моментов инерции выполнены;

3) $m_3 = 0$, $A = 2(B - C)$, $B=24C/(5+\sqrt{288})$, $x_0=z_0=0$, постоянная интегрирования появляется при $n = 3$, неравенства треугольника выполнены.

Меняя величину m_3, можно получить другие условия существования рядов Лорана. Во всех случаях, перечисленных выше, имеем ряды, содержащие две произвольные постоянные.

В решении 3

$$n_1 = n_2 = n_0, \quad n_3 = -1, \quad m_1 = m_2 = -2, \quad m_3 > -2, \quad A = B$$

Если $n_0 = -2, -3, -4$, то $C = 2A$, $5A/2$, $3A$ и т.д.

Здесь возможно построение рядов Лорана, содержащих две произвольные постоянные при различных n_0 и m_3, например при $n_0 = -2$, $m_3 = 0$.

В решении 4

$$n_1 = n_2 = n_3 = -1, \quad m_2 = m_3 = -2, \quad m_1 > -2$$

Постоянные интегрирования появляются в рядах Лорана на втором шаге, если выполнены условия

$$BC = 4(A-B)(A-C) \text{ либо } C = 2(A-B), \; m_1 = 1$$

и на четвертом шаге, если выполнены условия

$$9BC = 4(A-B)(A-C) \text{ либо } 3C = 2(A-B), \; m_1 = 3$$

Коэффициенты рядов Лорана содержат три произвольные постоянные, если $z_0 = 0$, и две, если $f_0 = 0$.

В решении 5

$$n_1 = n_2 = m_2/2, \quad n_3 - 1, \quad z_0 = 0, \quad m_3 = m_2/2 - 1, \quad m_2 < -2, \quad m_1 = m_2$$

При выполнении условий

$$C = (B^2 + 2A^2 - 3AB)/(A-B), \quad 2(B-C)Ax_0^2 - (2B^2 - A^2 - 3BC + AB + AC)y_0^2 = 0$$

ряды Лорана содержат две произвольные постоянные.

В решении 6

$$n_1 = n_2 = m_2/2, \quad n_3 = -1, \quad z_0 = 0, \quad m_2 < -2, \quad m_3 > -2$$

Ряды Лорана содержат три произвольные постоянные при выполнении условий

$$m_3 = -1, \quad m_2 = -4$$

$$A = B = 3C/5 \;(n=4); \quad A = B = 4C/7 \;(n=6); \quad A = B = 5C/9 \;(n=8);$$

$$A = B = 6C/11 \;(n=10)$$

и т.д. Возможно построение рядов и при других сочетаниях m_2 и m_3.

В решении 7

$$n_1 = n_2 = n_3 = -1, \quad m_1 = -2, \quad m_2 = m_3 = m, \quad m < -2, \quad x_0 = 0$$

При условии, что

$$n = Cz_0^2/[(B-C)y_0^2] + B/(B-C) - m$$

– целое положительное число, возможно построение рядов Лорана с двумя произвольными постоянными. Показана возможность построения рядов при $m = -3$. При $n = 2$ появляется постоянная интегрирования.

В решении 8

$$n_1 = n_2 = n_3 = -1, \quad m_2 = m_3 = m, \quad m_1 > m > -2$$

При условиях

$$m = -1, \quad m_1 = 0 \quad x_0(B+C)\sqrt{(B+C)(B-C)} + 2z_0BC = 0, \quad y_0 = -z_0, \quad A = B + C$$

возможно построение рядов Лорана с двумя постоянными интегрирования.

В решении 9

$$n_1 = n_2 = m_1 + 1, \quad n_3 = -1, \quad m_1 = m_2, \quad m_1 < -2, \quad m_3 > -2, \quad A = B$$

Если $n = A(m_1 + 1)/(A - C - m_1)$ – целое положительное число, то имеем ряды Лорана с тремя постоянными интегрирования, если выполнены условия

$$m_1 = -3, \quad m_3 = -1, \quad n = 6, \quad 5A = 3C$$

причем неравенства треугольника выполнены.

В решении 10

$$n_1 = n_2 = m_1 + 1, \quad m_1 = m_2, \quad A = B, \quad m_3 = -2, \quad n_3 = -1, \quad m_1 < -2$$

При условии, что $m_1 = -3$, $m_2 = -2$ и $n = A(m_1 + 1)/(A - C - m_1)$ – целое положительное число, например при $n = 6$, $5A = 3C$ имеем ряды Лорана с двумя постоянными интегрирования.

В решении 11

$$n_1 = (2m_1 + 1)/3, \quad n_2 = n_3 = (m_1 - 1)/3, \quad m_2 = m_3 = 2(m_1 - 1)/3, \quad m_1 < -2.$$

При $m_1 = -5$ имеем ряды Лорана, содержащие три произвольных постоянных.

В решении 12

$$n_1 = -1, \quad n_2 = m_1 + 1, \quad m_2 = m_3 = -2, \quad m_1 > -2, \quad n_3 > -1, \quad m_1 < n_3 - 1, \quad x_0 = 0$$

При $n_3 = 1$, $m_1 = -1$, $n_2 = 0$, $A = 3B$, $C = 2(A - B)$, $y_0 = 0$ имеем ряды Лорана, содержащие две произвольные постоянные. Возможны ряды Лорана при других значениях m_1 и n_3.

В решении 13

$$n_1 = n_2 = -1, \quad m_2 = m_3 = m_1 = -2, \quad n_3 > -1$$

При $n_3 = 1$, $z_0 = 0$, $A = 2C$ имеем ряды Лорана с тремя постоянными интегрирования.

В решении 14

$$n_1 = n_2 = n_3 = -1, \quad m_1 = m_2 = m_3 = \pm 1$$

Определитель Ковалевской для $m_i = -1$ ($i = 1, 2, 3$) равен

$$D = n^3(n-3)(n-1)(n-2)$$

Для случая $m_i = +1$ ($i = 1, 2, 3$)

$$D = n^3(n-3)(n+1)(n+2)$$

В первом случае при выполнении условия

$$\begin{aligned}
&\{2C(A + B - C)(B - C)(A - B)F(A, B, C) + \\
&+ B(2B - A - C)(A + C - B)(A + B - C)F(A, B, C) + \\
&+ BC(A - C - B)^2(C - A)G(A, B, C)\}x_0 - \\
&- \{2B^2C(A - B)(A + B - C)W(A, B, C) + \\
&+ B(2B - A - C)(A + B - C)^2 AB^{1/2} W(A, B, C) + \\
&+ BC(A + C - B)(A + B - C)(C - A)(B - C)A^{1/2}\}y_0 + \\
&+ \{2B^2C(A - B)(A + C - B)G(A, B, C) - \\
&- 2CA(A + B - C)(A - B)(B - C)G(A, B, C)\}z_0 = 0
\end{aligned}$$

$$F(A, B, C) = \{ABC(A - B)(C - A)\}^{1/2}, \; G(A, B, C) = \{B(B - C)\,(C\text{-}A)\}^{1/2}$$

$$W(A, B, C) = \{C(A - B)(B - C)\}^{1/2}$$

имеем ряды Лорана с четырьмя постоянными интегрирования.