ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 58, Вып. 1 1994

УДК 531.36

© 1994 г. В.Н. Тхай

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАТИМОЙ СИСТЕМЫ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Для обратимых систем в рамках единого подхода дается решение задачи об устойчивости периодических и условно-периодических систем, близких к автономным, проводится качественное исследование систем, близких к резонансным. Кроме того, рассматривается задача о качении шара Чаплыгина, близкого к динамически симметричному. Показано, что при всех значениях параметров качение вдоль прямой формально устойчиво; для шара, близкого к однородному, возможен главный резонанс, который приводит к неустойчивости.

1. Квазиавтономная обратимая система. Рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения обратимой относительно отображения $\mathbf{M}$ фазового пространства системы

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon\mathbf{X}_1(\varepsilon, \mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^p \tag{1.1}$$

$$\mathbf{X}_0(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}_1(\varepsilon, \mathbf{0}, t) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}_1(\varepsilon, \mathbf{x}, t + 2\pi) = \mathbf{X}_1(\varepsilon, \mathbf{x}, t)$$

$$\mathbf{M}[\mathbf{X}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon\mathbf{X}_1(\varepsilon, \mathbf{x}, t)] + \mathbf{X}_0(\mathbf{Mx}) + \varepsilon\mathbf{X}_1(\varepsilon, \mathbf{Mx}, -t) \equiv \mathbf{0}$$

где ε – малый параметр, $\mathbf{M}$ – некоторая постоянная невырожденная матрица. Правые части предположим аналитическими по переменной $\mathbf{x}$ и малому параметру ε и представимыми рядами Тейлора – Фурье.

Исследуем для простоты случай инволюции, когда $\mathbf{M}^2 = \mathbf{E}$, а канонический вид матрицы M таков:

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E}_n \end{Vmatrix} \quad (l + n = p)$$

($\mathbf{E}_j$ – единичная матрица порядка j). Такая ситуация имеет место в механических системах, причем, как правило, $l \geqslant n$. Тогда характеристическое уравнение автономной системы, полученной из (1.1) при $\varepsilon = 0$, имеет не менее $m = l - n$ простых нулевых корней [1]. Остальные корни разбиваются на пары $\pm\lambda_s$ ($s = 1,\ldots, n$), и устойчивость возможна только в случае всех $\lambda_s^2 \leqslant 0$. Ниже положим, что $\lambda_s^2 < 0$ ($s = 1,\ldots, n$), а кратным λ_s отвечают простые элементарные делители.

При указанных предположениях система (1.1) посредством линейного, не зависящего от ε преобразования приводится к виду

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{\cdot} &= \boldsymbol{\Xi}_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \overline{\boldsymbol{\eta}}) + \varepsilon\boldsymbol{\Xi}_1(\varepsilon, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \overline{\boldsymbol{\eta}}, t) \\ \boldsymbol{\eta}^{\cdot} &= \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \overline{\boldsymbol{\eta}}) + \varepsilon\mathbf{H}_1(\varepsilon, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \overline{\boldsymbol{\eta}}, t) \\ \overline{\boldsymbol{\eta}}^{\cdot} &= -\boldsymbol{\Lambda}\overline{\boldsymbol{\eta}} + \overline{\mathbf{H}}_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \overline{\boldsymbol{\eta}}) + \varepsilon\overline{\mathbf{H}}_1(\varepsilon, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \overline{\boldsymbol{\eta}}, t) \\ \boldsymbol{\Lambda} &= \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \end{aligned} \tag{1.2}$$

где ξ – действительный m-вектор, $\eta, \overline{\eta}$ – комплексно-сопряженные n-векторы, линейная часть автономной системы выписана явно, а черта наверху означает комплексно-сопряженную величину. При этом в силу обратимости правые части (1.2) содержат [1–3] только чисто мнимые коэффициенты.

Ниже при исследовании задач с малыми параметрами используем подход [2], рассматривая ε как локальную переменную, удовлетворяющую уравнению $\varepsilon^{\cdot} = 0$, с последующим применением процедуры нормализации к полученной системе уравнений.

Линейная система. Рассмотрим сначала задачу о вычислении характеристических показателей линеаризованной по перменным $\xi, \eta, \overline{\eta}$ системы. Эта задача подробно исследована [4]. Ниже получено очень простое и исчерпывающее для обратимой системы решение, которое справедливо и для условно-периодической правой части в (1.1).

Проведем нормализацию линейной по $\xi, \eta, \overline{\eta}$, но нелинейной по всем переменным $\varepsilon, \xi, \eta, \overline{\eta}$ системы. Тогда в полученной нормальной форме

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{\cdot} = 0\\
&\xi_j^{\cdot} = \xi_j \Sigma g_{j\mu\nu q r} \varepsilon^{\mu} \xi^{\nu} \eta^{q} \overline{\eta}^{r} e^{ipt} \qquad (j = 1, \ldots, m)\\
&\eta_s^{\cdot} = \lambda_s \eta_s + \eta_s \Sigma h_{s\mu\nu q r} \varepsilon^{\mu} \xi^{\nu} \eta^{q} \overline{\eta}^{r} e^{ipt}\\
&\overline{\eta}_s^{\cdot} = -\lambda_s \overline{\eta}_s + \overline{\eta}_s \Sigma \overline{h}_{s\mu\nu q r} \varepsilon^{\mu} \xi^{\nu} \overline{\eta}^{q} \eta^{r} e^{-ipt} \qquad (s = 1, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

отличны от нуля только резонансные члены, для которых [2]

$$\begin{aligned}
&(q_1 - r_1)\lambda_1 + \ldots + (q_n - r_n)\lambda_n + ip = 0\\
&\nu_1 + \ldots + \nu_m + q_1 + \ldots + q_n + r_1 + \ldots + r_n = 0
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Показатели степеней ν_j, q_s, r_k – целые неотрицательные числа (p – целое), исключая ν_j для j-го уравнения по ξ и q_s для s-го уравнения по η. Здесь ν_j и q_s могут принимать также значение, равное –1.

Выясним структуру нормальной формы (1.3). Если в уравнении для ξ_j имеем $\nu_j = 0$, то и все остальные показатели ν_k $(k \neq j)$, q_s, r_α, как это следует из (1.4), равны нулю. Соответствующий постоянный коэффициент при ξ_j при этом равен нулю в силу инвариантности системы (1.3) относительно замены $(t, \xi, \eta, \overline{\eta})$ на $(-t, \xi, \overline{\eta}, \eta)$. При $\nu_j = -1$ второе из соотношений (1.4) выполняется при одном из ν_k $(k \neq j)$, q_s, r_α, равном 1. Если $\nu_k = 1$, то вследствие обратимости коэффициент при ξ_k равен нулю. При $q_s = 1$ из первого соотношения (1.4) следует $\lambda_s + ip = 0$, поэтому одновременно есть член с $r_s = 1$ $(-\lambda_s - ip = 0)$.

Рассмотрим теперь уравнения для η_s. Анализ условий (1.4) показывает, что здесь отличны от нуля только те содержащие явно время коэффициенты, для которых $q_s = 1$. При этом или $r_s = 1$ и есть резонанс $2\lambda_s = ip$, или $r_j = 1$ $(j \neq s)$ – резонанс $\lambda_s + \lambda_j = ip$, или $q_j = 1$ – резонанс $\lambda_s - \lambda_j = ip$.

Таким образом, если $i(\lambda_s \pm \lambda_j)$ не есть целое число, то нормальная форма (1.3) имеет вид

$$\xi^{\cdot} = 0, \quad \eta_s^{\cdot} = \lambda_s^*(\varepsilon)\eta_s, \quad \overline{\eta}_s^{\cdot} = -\lambda_s^*(\varepsilon)\overline{\eta}_s \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где

$$\lambda_s^* = \lambda_s + \varepsilon\lambda_s^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_s^{(2)} + \ldots \qquad (\lambda_s^{(j)} = \text{const})$$

– ряды относительно ε с чисто мнимыми коэффициентами. Из сходимости нормализующего преобразования в данном случае [2] заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если $\lambda_s \pm \lambda_j$ не есть целое i, то все характеристические показатели чисто мнимые и вычисляются как корни характеристического уравнения нормализованной системы (1.3).

Следствия. 1°. В условиях теоремы 1 в первом по ε приближении характеристические показатели можно получить, заменяя в линейной системе периодические линейные по ε члены их средними за период значениями.

2°. Если в условиях теоремы 1 средние значения периодических членов равны нулю, то характеристические показатели не содержат первой степени ε.

Этот результат был получен в частном случае [5].

Замечания. 1°. Теорема 1 остается справедливой для задачи с векторным малым параметром ε.

2°. Основное достоинство формулировки теоремы 1 заключается в том, что числа λ_s не зависят от ε.

Возможен и другой подход к исследованию системы (1.1), основанный на предположении равенства нулю среднего за период значения $\mathbf{X}_{10}(\varepsilon, \mathbf{x})$ функции $\mathbf{X}_1(\varepsilon, \mathbf{x}, t)$. В этом случае λ_s находятся как корни характеристического уравнения системы

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{X}_{10}(\varepsilon, \mathbf{x}) \quad ,$$

и, вообще говоря, зависят от ε. Теорема 1 справедлива, конечно, и в этом случае. При данном подходе удобно ввести еще один малый параметр μ и исследовать систему

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}_0(x) + \mu \mathbf{X}_{10}(\mu, \mathbf{x}) + \varepsilon[\mathbf{X}_1(\varepsilon, \mathbf{x}, t) - \mathbf{X}_{10}(\varepsilon, \mathbf{x})]$$

при $\mu = \varepsilon$. Имея в виду сказанное, ниже для простоты формулировок положим $\mathbf{X}_{10}(\varepsilon, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$.

Резонанс $2\lambda_1 = pi$. В этом случае нормальная форма линейной системы имеет вид

$$\xi_j^{\cdot} = i\varepsilon a_j(\varepsilon)(\eta_1 e^{-\lambda_1 t} - \overline{\eta}_1 e^{\lambda_1 t}) + \ldots \quad (j = 1, \ldots, m)$$

$$\eta_1^{\cdot} = \lambda_1 \eta_1 + i\varepsilon b(\varepsilon) e^{2\lambda_1 t} \overline{\eta}_1 + \ldots$$

$$\overline{\eta}_1^{\cdot} = -\lambda_1 \overline{\eta}_1 - i\varepsilon b(\varepsilon) e^{2\lambda_1 t} \eta_1 + \ldots$$

где все a_j равны нулю, когда $\lambda_1 i$ не есть целое число.

После замены

$$\eta_1 = w_1 \exp(\lambda_1 t), \quad \overline{\eta}_1 = \overline{w}_1 \exp(-\lambda_1 t)$$

получим

$$\xi_j^{\cdot} = i\varepsilon a_j(\varepsilon)(w_1 - \overline{w}_1) + \ldots \quad (j = 1, \ldots, m)$$

$$w_j^{\cdot} = i\varepsilon b(\varepsilon) \overline{w}_1 + \ldots, \quad \overline{w}_1^{\cdot} = -i\varepsilon b(\varepsilon) w_1 + \ldots$$

и характеристические показатели имеют ненулевые действительные части $\kappa_{1,2} = \pm\varepsilon b(\varepsilon)$.

Теорема 2. Параметрический резонанс $2\lambda_1 = pi$, $p \in \mathbf{Z}$, почти всегда $(b \neq 0)$ приводит к неустойчивости по первому приближению.

Резонанс $\lambda_1 + \lambda_2 = pi$. В переменных w_1 и w_2 имеем

$$w_1^{\cdot} = i\varepsilon b_1 \overline{w}_2 + \ldots, \quad w_2^{\cdot} = i\varepsilon b_2 \overline{w}_1 + \ldots \tag{1.5}$$

и характеристические показатели этой системы таковы: $\kappa_{1,2} = \kappa_{3,4} = \pm\varepsilon\sqrt{b_1 b_2}$. Поэтому при $b_1 b_2 > 0$ система неустойчива по первому приближению.

Пусть $b_1b_2 < 0$. Тогда все κ – чисто мнимые и характеристические показатели исходной системы таковы:

$$\lambda_1^* = \lambda_1 + \varepsilon\sqrt{b_1b_2}, \quad -\lambda_1^*, \quad \lambda_2^* = \lambda_2 - \varepsilon\sqrt{b_1b_2}, \quad -\lambda_2^*$$

В самом деле, если исходная система (1.3) имеет решение $w_1 = c_1\exp(\kappa t)$ $(c_1 = \mathrm{const})$, то

$$w_1^{\cdot} = \kappa c_1 \exp(\kappa t) = i\varepsilon b_1 \overline{w}_2, \quad w_2 = c_2 \exp(-\kappa t) \quad (c_2 = \mathrm{const})$$

Вычисленные значения λ_1^* и λ_2^* показывают, что в нелинейной системе имеет место резонанс $\lambda_1^* + \lambda_2^* = pi$.

Теорема 3. Если $b_1b_2 > 0$, то параметрический резонанс $\lambda_1 + \lambda_2 = pi$, $p \in \mathbf{Z}$, $p \neq 0$ приводит к неустойчивости по первому приближению. При $b_1b_2 < 0$ характеристические показатели $\pm\lambda_1^*, \pm\lambda_2^*$ чисто мнимы и в нелинейной системе имеет место резонанс $\lambda_1^* + \lambda_2^* = pi$

Нелинейная система. При отсутствии резонансов

$$p_1\lambda_1 + \ldots + p_n\lambda_n + ip = 0; \quad p_1, \ldots, p_n, p \in \mathbf{Z} \tag{1.6}$$

система (1.2) формально устойчива. В этом можно убедиться, добавляя к (1.2) уравнение $\varepsilon^{\cdot} = 0$ и нормализуя полученную обратимую систему с $m + 1$ нулевыми и n парами чисто мнимых корней. В результате получим частный случай из [3]. Отсюда следует справедливость и других свойств, установленных [3] для нерезонансного случая.

Пусть теперь в системе имеет место резонанс (1.6) с $p = 0$. Резонансные члены в нормальной форме не зависят явно от времени, поэтому свойства [1], устанавливаемые для автономной системы (при $\varepsilon = 0$), сохраняются в квазилинейной системе.

В случае резонанса (1.6) с $p \neq 0$ резонансные коэффициенты в нормальной форме зависят от ε, обращаясь в нуль при $\varepsilon = 0$. Следовательно, [3] имеем: резонанс третьего порядка, как правило, приводит к неустойчивости, а в случае резонансов четвертого порядка имеет место устойчивость в любом конечном порядке. Для многочастотных резонансов эти выводы получены ранее [5].

Теорема 2 решает вопрос об устойчивости при одночастотном резонансе второго порядка. В вырожденном случае ($b = 0$), как это следует из [3] и сказанного выше, система устойчива в любом конечном порядке.

Резонанс $\lambda_1 + \lambda_2 = pi$ в нелинейной системе. Пусть в теореме 3 выполняется условие $b_1b_2 < 0$. Тогда характеристические показатели чисто мнимые и нормальная форма системы первого нелинейного приближения имеет вид

$$\eta_1^{\cdot} = \lambda_1^*\eta_1 + i(A_{11}|\eta_1|^2 + A_{12}|\eta_2|^2)\eta_1 + i\varepsilon(B_{11}|\eta_1|^2 + B_{12}|\eta_2|^2)\overline{\eta}_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} +$$
$$+ i\varepsilon(C_{11}\overline{\eta}_1\overline{\eta}_2^2 e^{2(\lambda_1+\lambda_2)t} + C_{12}\eta_1^2\eta_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}) + \ldots$$
$$\eta_2^{\cdot} = \lambda_2^*\eta_2 + i\varepsilon(A_{21}|\eta_1|^2 + A_{22}|\eta_2|^2)\overline{\eta}_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} + i(B_{21}|\eta_1|^2 + B_{22}|\eta_2|^2)\eta_2 +$$
$$+ i\varepsilon(C_{21}\eta_1\eta_2^2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + C_{22}\overline{\eta}_1^2\overline{\eta}_2 e^{2(\lambda_1+\lambda_2)t}) + \ldots$$

где A_{jk}, B_{jk}, C_{jk} – некоторые постоянные коэффициенты, а комплексно-сопряженная группа уравнений опущена.

После преобразования

$$\eta_1 = w_1 \exp(\lambda_1^* t), \quad \eta_2 = w_2 \exp(\lambda_2^* t)$$

и перехода к переменным

$$\rho_1 = w_1\overline{w}_1, \quad \rho_2 = w_2\overline{w}_2, \quad y = w_1w_2 + \overline{w}_1\overline{w}_2$$

получим модельную систему первого нелинейного приближения

$$z^{\cdot} = x\mathbf{A}\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} = (\rho_1, \rho_2, y)^T, \quad x = \pm\sqrt{4\rho_1\rho_2 - y^2} \tag{1.7}$$

$$\mathbf{A} = \| a_{jk} \|_1^3, \quad a_{11} = \varepsilon(B_{11} - C_{12}), \quad a_{12} = \varepsilon B_{12}, \quad a_{13} = \varepsilon C_{11}$$

$$a_{21} = \varepsilon A_{21}, \quad a_{22} = \varepsilon(A_{22} - C_{21}), \quad a_{23} = \varepsilon C_{22}$$

$$a_{31} = -B_{21} - A_{11} + \varepsilon C_{22}, \quad a_{32} = -B_{22} - A_{12} + \varepsilon C_{11}, \quad a_{33} = -\varepsilon(C_{11} + C_{22})$$

исследованную в [6]. Как было установлено [6], необходимым и достаточным условием устойчивости (1.7) в грубой ситуации является отсутствие у уравнения

$$G_3 k^3 + G_2 k^2 + G_1 k + G_0 = 0 \tag{1.8}$$

положительного решения k, удовлетворяющего условию

$$| B_{12} k^2 + (C_{21} - A_{22} + B_{11} - C_{12}) k - A_{21} | < 2\sqrt{k} | C_{22} - k C_{11} | \tag{1.9}$$

Коэффициенты уравнения (1.8) вычисляются по формулам

$$\varepsilon^{-2} G_3 = C_{11}^2(\varepsilon C_{11} - \alpha) + \varepsilon B_{12}(\mu - B_{12} C_{22})$$

$$\varepsilon^{-2} G_2 = C_{11}^2(\varepsilon C_{22} - \beta) + 2C_{11}C_{22}(\alpha - \varepsilon C_{11}) + \varepsilon B_{12}(C_{11}A_{21} - \delta) + \varepsilon\gamma(\mu - B_{12}C_{22})$$

$$\varepsilon^{-2} G_1 = 2C_{11}C_{22}\beta - C_{22}^2\alpha - \varepsilon C_{11}C_{22}^2 - \varepsilon A_{21}(\mu - B_{11}C_{22}) + \varepsilon\gamma(C_{11}A_{21} - \gamma)$$

$$\varepsilon^{-2} G_0 = C_{22}^2(\varepsilon C_{22} - \beta) + \varepsilon A_{21}(\nu - C_{11}A_{21})$$

$$\alpha = A_{12} + B_{22}, \quad \beta = A_{11} + B_{21}, \quad \gamma = B_{11} - C_{12} - A_{22} + C_{21}$$

$$\delta = (B_{11} + C_{21})C_{21}, \quad \nu = (C_{21} + B_{11})C_{22}, \quad \mu = (C_{12} + A_{22})C_{11}$$

Поэтому с точностью членов порядка ε уравнение (1.8) записывается в виде

$$(\alpha k + \beta)(C_{11}k - C_{22})^2 = \varepsilon(\ldots) \tag{1.10}$$

Отсюда следует, что при $\alpha\beta < 0$ уравнение (1.8) всегда имеет положительный корень, вычисляемый по формуле

$$k = -\beta/\alpha + \varepsilon(\ldots)$$

При выполнении дополнительного условия $C_{11}C_{22} > 0$ уравнение (1.10) может иметь и другие положительные корни, которые, как нетрудно установить, не удовлетворяют условию (1.9).

Таким образом, ограничиваясь, как и в [6], "грубой" ситуацией, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. Пусть граница $\partial\mathbf{K}$ конуса

$$\mathbf{K} = \{\rho_1, \rho_2, y\colon\ 4\rho_1\rho_2 \geqslant y^2,\ \rho_1 \geqslant 0,\ \rho_2 \geqslant 0\}$$

не содержит вырожденных инвариантных лучей. Тогда необходимым и достаточным условием устойчивости модельной системы является нарушение хотя бы одного из неравенств

$$\alpha\beta < 0, \quad | A_{21}\alpha^2 + \gamma\alpha\beta - B_{12}\beta^2 | < 2\sqrt{-\alpha\beta} | C_{22}\alpha + C_{11}\beta | \tag{1.11}$$

При выполнении условий (1.11) исходная система (1.2) неустойчива.

2. Условно-периодическая система. Пусть теперь в (1.1) вектор-функция $\mathbf{X}_1(\varepsilon, \mathbf{x}, t)$ условно-периодична по t с базисом частот $\mathbf{\Omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_k)$, а векторы $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{\Omega}$ удовлетворяют условию приводимости системы ([2], с. 92) к нормальной форме. В этом случае резонансные члены определяются из уравнения

$$\begin{gathered}(q_1 - r_1)\lambda_1 + \ldots + (q_n - r_n)\lambda_n + i\langle \mathbf{P}, \mathbf{\Lambda} \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{P}, \mathbf{\Lambda} \rangle = p_1\omega_1 + \ldots + p_n\omega_n\end{gathered} \tag{2.1}$$

а зависимость от времени задается целочисленным вектором **P** в виде множителя $\exp i\langle \mathbf{P}, \mathbf{\Omega} \rangle t$ вместо множителя $\exp(ipt)$ в периодическом случае. Поэтому, если

$$\lambda_s \pm \lambda_j + i\langle \mathbf{P}, \mathbf{\Omega} \rangle \neq 0 \tag{2.2}$$

то (1.3) приводится к такой же нормальной форме, как и в периодическом случае, и теорема 1 остается в силе.

При рассмотрении резонансных случаев (теоремы 2–4) величина ip заменялась через корни λ_s. В случае условно-периодической системы такая замена также имеет место, только вместо ip необходимо взять $i\langle \mathbf{P}, \mathbf{\Omega} \rangle$. Все остальные рассуждения остаются прежними, и теоремы 2–4, таким образом, сохраняют справедливость при замене в их формулировках величины ip на $i\langle \mathbf{P}, \mathbf{\Omega} \rangle$.

3. Системы, близкие к резонансным. Рассмотрим обратимую систему (автономную, периодическую, условно-периодическую), правые части которой зависят от некоторого параметра ε. Пусть система линейного приближения устойчива и приводима к автономной с m нулевыми и n парами чисто мнимых корней $\pm\lambda_s(\varepsilon)$ $(s = 1,\ldots, n)$, а при $\varepsilon = 0$ в системе реализуется резонанс. Тогда при $\varepsilon \neq 0$ имеем нерезонансную ситуацию и система формально устойчива (для условно-периодической системы – при дополнительных условиях приводимости к нормальной форме [2]). Интересно выяснить, что происходит при $\varepsilon \neq 0$ с решениями, приводившими к неустойчивости при резонансе, т.е. при $\varepsilon = 0$. Данную задачу рассмотрим на примере двух характерных случаев – резонансов третьего и четвертого порядков.

Как и выше, примем ε за локальную переменную и нормализуем полученную резонансную систему с $\varepsilon \neq 0$. Модельная система фактически выписана в [1] и с точностью до ε^2 и членов четвертого порядка малости по фазовым переменным имеет вид

$$\begin{gathered}
\dot{r}_\alpha = 2B_\alpha \sin\theta \prod_{j=1}^{n} r_j^{p_j/2} \quad (\alpha = 1,\ldots,n) \\
\dot{\theta} = a\varepsilon + \prod_{j=1}^{n} A_j r_j + \sum_{j=1}^{n} p_j B_j \prod_{k=1}^{n} r_k^{p_k/2-\delta_{jk}} \cos\theta \\
p_1\lambda_1(0) + \ldots + p_n\lambda_n(0) = 0, \quad p = \sum_{j=1}^{n} p_j = 3 \text{ или } 4
\end{gathered} \tag{3.1}$$

где p_j – натуральные числа, a, A_j, B_α – некоторые постоянные, а все $A_j = 0$ при резонансе третьего порядка. Для простоты предполагаем, что нулевые корни отсутствуют, а все частоты – резонансные.

В невырожденных случаях, когда среди чисел B_α нет нулевых, к неустойчивости системы (3.1) приводят растущие решения в виде лучей $r_\alpha = k_\alpha r$ (k_α = const, α = = 1,…, n), которые существуют при всех B_α одинакового знака [1]. Пусть все $B_\alpha > 0$. Тогда можно взять $k_\alpha = B_\alpha$, и уравнения для r и θ имеют вид

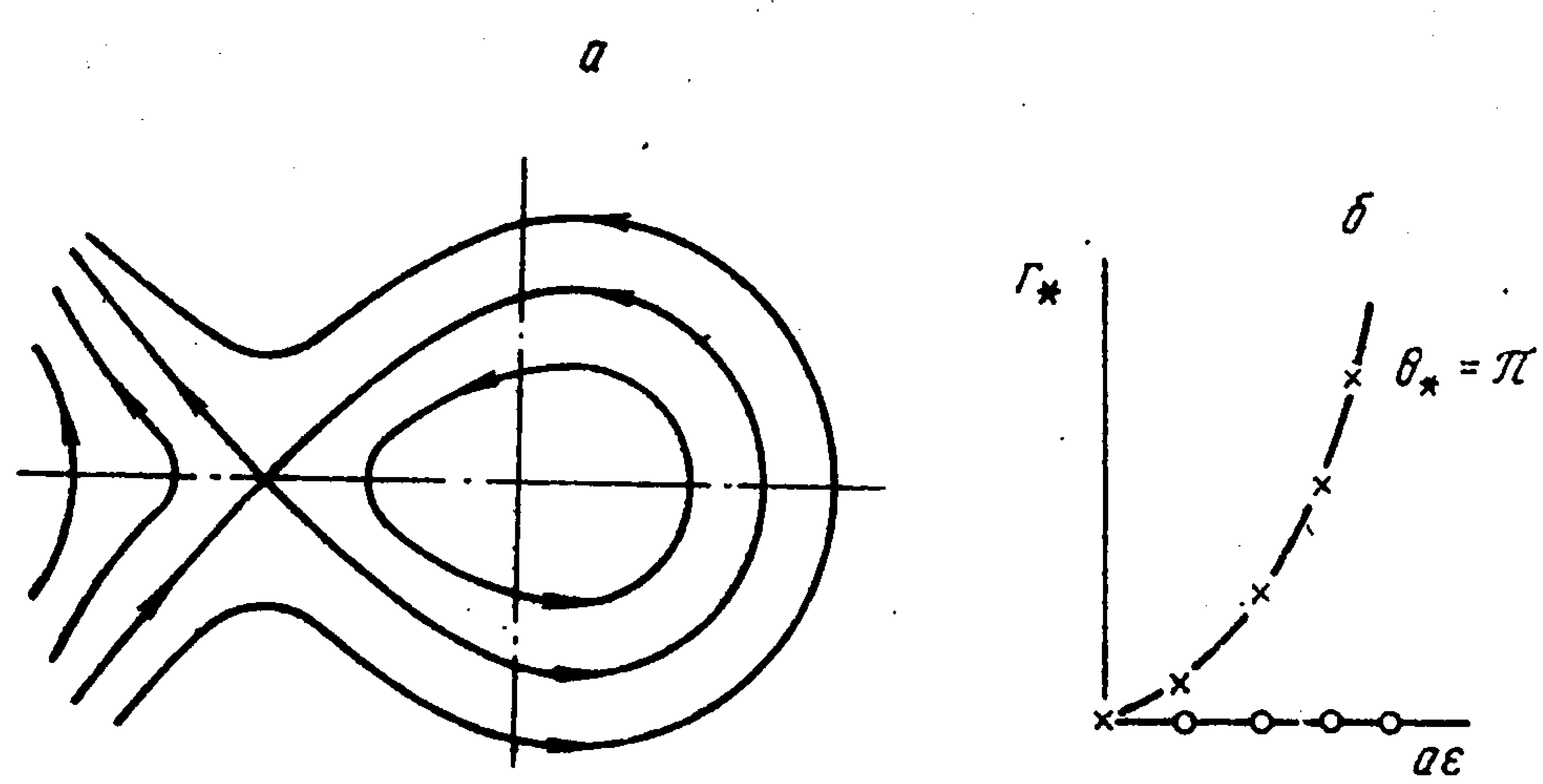
$$\begin{gathered}
\dot{r} = 2\Pi \sin\theta r^{p/2}, \quad \Pi = \prod_{j=1}^{n} B_j^{p_j/2} \\
\dot{\theta} = a\varepsilon + 2br + p\Pi\cos\theta r^{p/2-1}, \quad b = \sum_{j=1}^{n} A_j B_j
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Полученная система – каноническая с функцией Гамильтона

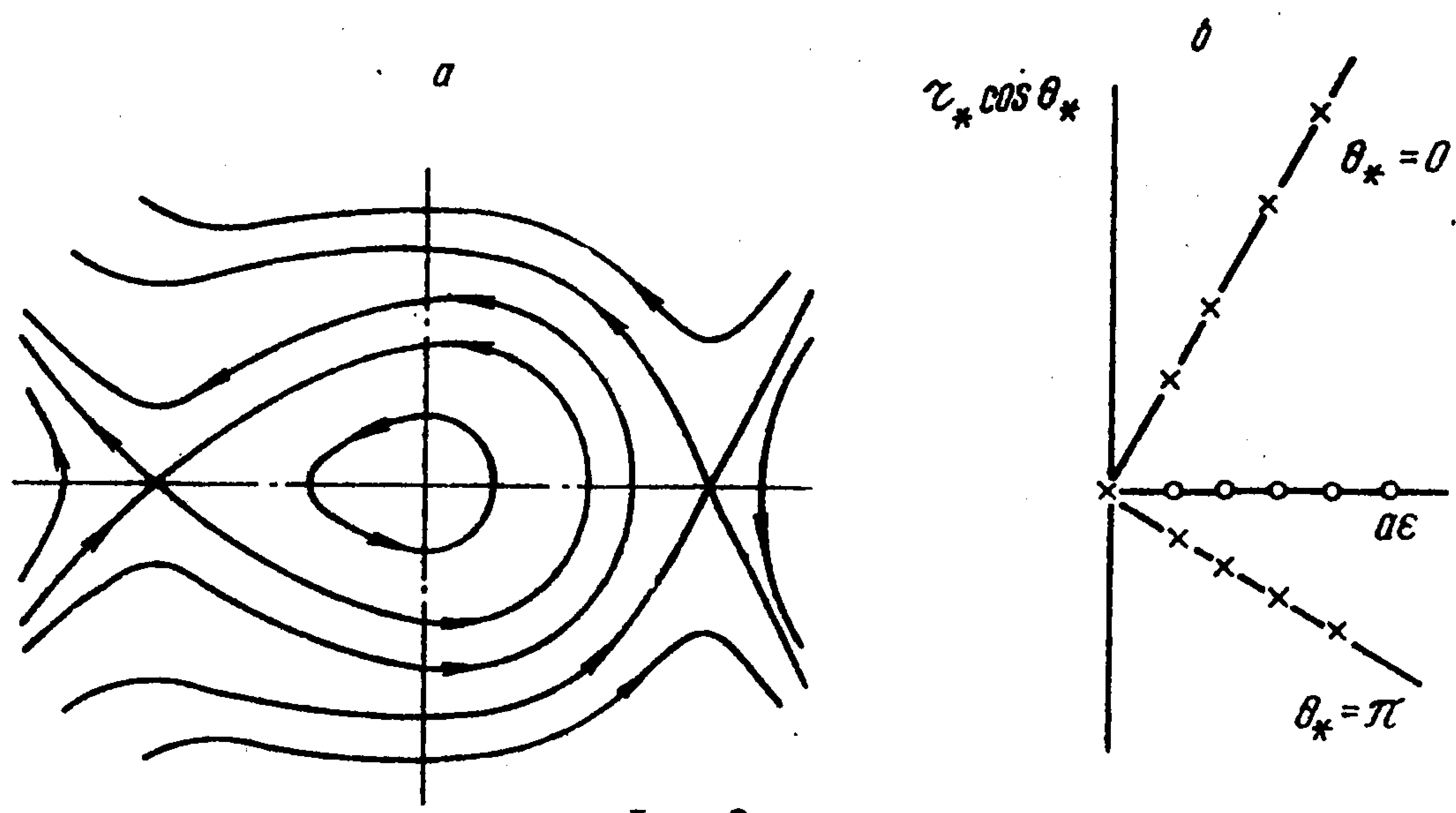
$$H = a\varepsilon r + (b + 2\Pi\cos\theta) r^{p/2}$$

и полностью исследуется на фазовой плоскости.

Фазовый портрет системы (3.2) при $p = 3$ (резонанс третьего порядка) приведен на



Фиг. 1



Фиг. 2

фиг. 1, *а* для случая $a\varepsilon > 0$. Таким образом, при $\varepsilon = 0$ происходит бифуркация равновесия и, наряду с нулевым положением равновесия, появляется седло с координатами $\theta_* = \pi$, $r_* = (a\varepsilon/3\Pi)^2$. Бифуркационная диаграмма приведена на фиг. 1, *б*, где светлыми точками помечен центр, а крестиками – седло. Уравнение сепаратрис имеет вид

$$(a\varepsilon + 2\Pi\sqrt{r}\cos\theta)r = -(a\varepsilon)^3 / (3\Pi)^2$$

В случае, близком к резонансу четвертого порядка, фазовый портрет имеет различный вид в зависимости от того, является ли система (3.2) устойчивой при $\varepsilon = 0$. Если $|b| > 2\Pi$ (система устойчива), то при $a\varepsilon b > 0$ все траектории замкнуты и окружают нуль. При $a\varepsilon b < 0$ фазовый портрет приведен на фиг. 2, *а*. Появляются две новые стационарные точки – седла с координатами: $\theta_* = \pi$, $r_* = -a\varepsilon/(2b - 4\Pi)$; $\theta_* = 0$, $r_* = -a\varepsilon/(2b + 4\Pi)$. Уравнения сепаратрисс в этом случае имеют вид

$$[a\varepsilon + (b + 2\Pi\cos\theta)r]r = (a\varepsilon)^2/(2b \pm 4\Pi)$$

Бифуркационная диаграмма приведена на фиг. 2, *б*.

В случае $|b| < 2\Pi$ (система (3.2) при $\varepsilon = 0$ неустойчива) фазовый портрет имеет такой же вид, как и на фиг. 1, *а*. В случае $|b| = 2\Pi$ при $a\varepsilon b > 0$ имеем периодические движения, при $a\varepsilon b < 0$ фазовый портрет такой же, как и на фиг. 1, *а*, тогда седло появляется в правой полуплоскости (при $a\varepsilon > 0$).

4. Параметрическая неустойчивость в задаче о качении шара Чаплыгина по абсолютно шероховатой плоскости. Рассмотрим движение тяжелого твердого тела сферической формы по неподвижной шероховатой горизонтальной плоскости. Пусть тело – шар Чаплыгина [7]; его геометрический центр совпадает с центром тяжести. Отметим, что эта задача разрешена Чаплыгиным в квадратурах [8]. Ниже исследуется устойчивость качений шара вдоль прямой.

Пусть шар радиуса R имеет массу m, а A, B, C – моменты инерции относительно подвижной системы координат, образованной главными центральными осями инерции. Уравнения движения шара получим как частный случай уравнений из [9]

$$[A+mR^2(\gamma_2^2+\gamma_3^2)]\dot\omega_1 - mR^2\gamma_1\gamma_2\dot\omega_2 - mR^2\gamma_1\gamma_3\dot\omega_3 = (B-C)\omega_2\omega_3$$

$$[B+mR^2(\gamma_3^2+\gamma_1^2)]\dot\omega_2 - mR^2\gamma_2\gamma_3\dot\omega_3 - mR^2\gamma_2\gamma_1\dot\omega_1 = (C-A)\omega_3\omega_1 \qquad (4.1)$$

$$[C+mR^2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)]\dot\omega_3 - mR^2\gamma_3\gamma_1\dot\omega_1 - mR^2\gamma_2\gamma_3\dot\omega_2 = (A-B)\omega_1\omega_2$$

$$\dot\gamma_1+\gamma_3\omega_2-\gamma_2\omega_3=0,\quad \dot\gamma_2+\gamma_1\omega_3-\gamma_3\omega_1=0,\quad \dot\gamma_3+\gamma_2\omega_1-\gamma_1\omega_2=0$$

$$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)^T,\qquad \boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)^T$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения тела, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, восстановленный в точке контакта шара с плоскостью вертикально вверх.

Система (4.1) обратима и не меняет своего вида при замене знаков t и величин в одной из пар (ω_j, γ_j) или в векторе $\boldsymbol{\omega}$ на противоположный, т.е. имеет четыре линейных автоморфизма.

Уравнения (4.1) допускают частное решение

$$\omega_1=\omega_2=0,\quad \gamma_3=0,\quad \omega_3=\omega_*(\mathrm{const}),\quad \gamma_1=\cos\omega_* t,\quad \gamma_2=\sin\omega_* t \qquad (4.2)$$

которое описывает качение шара с постоянной угловой скоростью ω_* вдоль некоторой прямой. Составим систему уравнений в вариациях в окрестности движения (4.2). Эта система распадается на две группы уравнений, одна из которых дает

$$\omega_3=\omega(\mathrm{const}),\quad \gamma_1=\cos\varphi,\quad \gamma_2=\sin\varphi\quad (\varphi=\omega t)$$

$$\dot\gamma_3=-\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi$$

Во второй группе уравнений

$$(A+mR^2\sin^2\varphi)\dot\omega_1 - mR^2\sin\varphi\cos\varphi\dot\omega_2 = (B-C)\omega\omega_2$$

$$(B+mR^2\cos^2\varphi)\dot\omega_2 - mR^2\sin\varphi\cos\varphi\dot\omega_1 = (C-A)\omega\omega_1$$

перейдем к новым переменным

$$p=\omega_1\cos\varphi+\omega_2\sin\varphi,\quad q=\omega_1\sin\varphi-\omega_2\cos\varphi$$

и времени φ и разрешим полученные уравнения относительно производных. В результате получим обратимую систему

$$dp/d\varphi = -q + [a_*\sin 2\varphi p + (b_* + a_*\cos 2\varphi)q]/(2\Delta)$$

$$qq/d\varphi = p - [(c_* + e_*\cos 2\varphi)p + e_*\sin 2\varphi q]/(2\Delta) \qquad (4.3)$$

$$a_*=(C-A)(A+mR^2)-(C-B)(B+mR^2),\quad b_*=(C-A)(A+mR^2)+$$

$$+(C-B)(B+mR^2),$$

$$c_*=A(C-A)+B(C-B),\quad e_*=A(C-A)-B(C-B)$$

$$\Delta=-[AB+mR^2(A\cos^2\varphi+B\sin^2\varphi)]$$

При $A=B$ система (4.3) становится автономной, и в этом случае квадрат частоты малых колебаний равен

$$\Omega_*^2 = \frac{C}{A}\,\frac{C+mR^2}{A+mR^2}$$

что совпадает с результатом [10] для случая шара Чаплыгина.

Рассмотрим случай, когда A близко к B: $B = A(1+2\varepsilon)$. Тогда

$$a_* = 2A\varepsilon(2A - C + mR^2 + 2A\varepsilon), \qquad b_* = 2(C-A)(A+mR^2) - a_*$$

$$e_* = 2A\varepsilon(2A - C - 2A\varepsilon), \quad c_* = 2A(C-A) - e_*$$

$$\Delta = -[A(A+mR^2) + 2A\varepsilon(A + mR^2\sin^2\varphi]$$

и система (4.3) приобретает вид (периодические члены выписаны с точностью до членов порядка ε)

$$dp/d\varphi = -\kappa_1 q - \alpha\varepsilon\sin 2\varphi p + \beta\varepsilon\cos 2\varphi q + \ldots$$

$$dq/d\varphi = \kappa_2 p + \alpha\varepsilon\cos 2\varphi p + \gamma\varepsilon\sin 2\varphi q + \ldots \tag{4.4}$$

$$\kappa_1 = 1 + \frac{1}{2\Delta_* f}\left(b_* + \frac{a_*\beta_*}{1+f}\right), \quad \kappa_2 = 1 + \frac{1}{2\Delta_* f}\left(c_* + \frac{e_*\beta_*}{1+f}\right)$$

$$\alpha = \frac{2A - C + mR^2}{A+mR^2}, \quad \beta = \frac{A(2A-C) + CmR^2}{A(A+mR^2)}, \quad \gamma = \frac{2A-C}{A+mR^2}$$

$$f = \sqrt{1-\beta_*^2}, \quad \beta_* = mR^2\varepsilon / \Delta_*, \quad \Delta_* = A + mR^2 + 2A\varepsilon + mR^2\varepsilon$$

Усредним эту систему по φ на периоде 2π. Тогда из теоремы 1 следует, что при условии

$$\Omega^2 = \kappa_1\kappa_2 = \frac{C}{A}\,\frac{C+mR^2}{A+mR^2}(1-2\varepsilon) + \ldots \neq \frac{l^2}{4}, \quad l \in \mathbf{Z} \tag{4.5}$$

(Ω – частота колебаний усредненной системы) линейная система устойчива, а ее характеристические показатели с точностью до членов порядка ε равны $\pm i\Omega$. В противном случае в системе реализуется резонанс второго порядка $2\Omega = l$, который, как это следует из вида правых частей (4.4), может привести к неустойчивости при $l = 2$. При $\Omega = 1$ величины A и C отличаются на слагаемые порядка ε и шар Чаплыгина близок к однородному.

Пусть параметры таковы, что $\Omega = 1$. Перейдем в (4.4) к комплексно-сопряженным переменным

$$\eta = \kappa_2 p + i\Omega q, \quad \bar\eta = \kappa_2 p - i\Omega q$$

и нормализуем полученную систему. В результате имеем систему вида (1.4), в которой

$$4b = \alpha(\kappa_2 + \Omega)/\kappa_2 + (\kappa_2\beta + \Omega\gamma)/\Omega$$

Учитывая теперь, что при $\Omega = 1$ с точностью до членов порядка ε

$$\alpha = 1 + \ldots, \quad \beta = 1 + \ldots, \quad \gamma = A/(A+mR^2), \quad \kappa_2 = 1 + \ldots$$

вычислим

$$4b = 3 + A/(A+mR^2) + \ldots \neq 0$$

Согласно теореме 2, в этом случае качение шара неустойчиво.

Теорема 5. Пусть шар Чаплыгина радиуса R имеет массу m, а A, $B = A(1+2\varepsilon)$, C – его главные центральные моменты инерции. Тогда при достаточно малом ε и выполнении условия (4.5) качение шара вдоль прямой формально устойчиво. При $\Omega = 1$ возникает параметрический резонанс и качение неустойчиво по первому приближению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
2. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
3. *Матвеев М.В., Тхай В.Н.* Устойчивость периодических обратимых систем // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 3–11.
4. *Якубович В.А., Стражинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
5. *Куницын А.Л., Муратов А.С.* Об устойчивости одного класса квазиавтономных периодических систем при внутреннем резонансе // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 31–39.
6. *Красильников П.С., Тхай В.Н.* Обратимые системы. Устойчивость при резонансе 1:1 // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 570–579.
7. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
8. *Чаплыгин С.А.* О катании шара по горизонтальной плоскости // Мат. сб. 1903. Т. 24. Вып. 1. С. 139–168.
9. *Карапетян А.В.* Бифуркация Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела на шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 19–24.
10. *Миндлин И.М.* Об устойчивости движения тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Инж. журн. 1964. Т. 4. Вып. 2. С. 225–230.

Поступила в редакцию
19.II.1993

Химки