УДК 531.36

© 1994 г. М.З. Есенбаева, А.Д. Мышкис

КИНЕМАТИКА КАЧЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ДВУМ ЛИНИЯМ

Исследуются общие дифференциальные уравнения кинематики качения гладкой жесткой поверхности по двум гладким жестким линиям без проскальзывания. Получена формула для скорости поворота этой поверхности относительно пройденного пути, указаны типы характерных точек процесса качения. Рассмотрены примеры.

Ранее [1] была выписана система дифференциальных уравнений качения без проскальзывания гладкой жесткой поверхности по двум гладким жестким направляющим линиям, причем в качестве независимой переменной была взята длина дуги вдоль одной из линий. Это не только ввело асимметрию в основную систему уравнений, но и сделало неизбежным локальный характер рассмотрения в случаях, когда по кинематическому смыслу задачи о качении изменение этой длины не монотонно.

В отличие от этого подхода ниже за независимую переменную принимается произвольный параметр. Важным примером такого параметра служит суммарный угол поворота тела при качении, в связи с чем выводится формула для скорости этого поворота относительно пройденного пути, которая, в частности, приводит к указанию естественных типов характерных точек процесса качения. Это позволяет избежать упомянутых недостатков, но привносит свои трудности. Так, при переходе к углу поворота уравнения становятся более громоздкими; кроме того, приходится выходить за рамки "чисто математических" доказательств (см. [2]) – в частности, сама возможность качения принимается без математического обоснования. Полезно иметь в виду оба подхода.

Родственной задаче об учете проскальзывания в динамике качения твердого тела по направляющим посвящена обширная литература, начиная с трудов Пенлеве (например, [3]).

1. Дифференциальные уравнения качения для произвольного аргумента. Пусть в пространстве заданы две направляющие – ориентированные достаточно гладкие линии L_1, L_2 без общих точек, с векторными уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{f}_i(s_i)$ ($i = 1, 2$), где $|s_i|$ – длина дуги линии L_i, отсчитываемая от некоторой ее точки, а возрастание s_i отвечает ориентации этой линии. Пусть, далее, задана ориентированная достаточно гладкая поверхность Q с векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{g}(u, v)$, причем вектор $\mathbf{n}(u,v) := \mathbf{g}_u(u,v) \times \mathbf{g}_v(u,v) / |\mathbf{g}_u(u,v) \times \mathbf{g}_v(u,v)|$ направлен по внешней нормали к Q и Q является границей некоторого тела.

Будем считать, что качение поверхности Q по линиям L_1, L_2 определяется семейством движений K^α: $Q \mapsto K^\alpha Q$, достаточно гладко зависящих от некоторого параметра α, причем для каждого значения α поверхность $K^\alpha Q$ имеет с линией L_i ($i = 1, 2$) единственную общую точку M_i^α, в которой L_i касается $K^\alpha Q$. Кроме этого требуется, чтобы линия L_i вблизи M_i^α находилась по внешнюю сторону от $K^\alpha Q$ и чтобы точка M_i^α непрерывно зависела от α.

Обозначим через s_i^α значение s_i для точки M_i^α, а через u_i^α, υ_i^α координаты точки $N_i^\alpha := (K^\alpha)^{-1} M_i^\alpha$. Тогда увеличив α на $d\alpha$ и применив условие отсутствия проскальзывания, а затем переходя от дифференциалов к производным, приходим к системе из пяти нелинейных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
|\mathbf{g}_u(u_i,\upsilon_i)u_i' + \mathbf{g}_\upsilon(u_i,\upsilon_i)\upsilon_i'| = |s_i'| \\
[\mathbf{g}(u_2,\upsilon_2) - \mathbf{g}(u_1,\upsilon_1)]\cdot[\mathbf{g}_u(u_i,\upsilon_i)u_i' + \mathbf{g}_\upsilon(u_i,\upsilon_i)\upsilon_1'] = \\
= [\mathbf{f}_2(s_2) - \mathbf{f}_1(s_1)]\cdot \mathbf{f}_i'(s_i)s_i' \quad (i=1,2) \\
[\mathbf{g}_u(u_1,\upsilon_1)u_1' + \mathbf{g}_\upsilon(u_1,\upsilon_1)\upsilon_1']\cdot[\mathbf{g}_u(u_2,\upsilon_2)u_2' + \mathbf{g}_\upsilon(u_2,\upsilon_2)\upsilon_2'] = \mathbf{f}_1'(s_1)\cdot \mathbf{f}_2'(s_2)s_1's_2'
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где штрих у u_i', υ_i', s_i' означает производную по α, а верхний индекс α для краткости не выписан. Кроме того, должно быть справедливым равенство

$$
\begin{gathered}
[\mathbf{g}(u_2,\upsilon_2) - \mathbf{g}(u_1,\upsilon_1)]\cdot\{[\mathbf{g}_u(u_1,\upsilon_1)u_1' + \mathbf{g}_\upsilon(u_1,\upsilon_1)\upsilon_1']\times[\mathbf{g}_u(u_2,\upsilon_2)u_2' + \mathbf{g}_\upsilon(u_2,\upsilon_2)\upsilon_2']\} = \\
= [\mathbf{f}_2(s_2) - \mathbf{f}_1(s_1)]\cdot[\mathbf{f}_1'(s_1)\times \mathbf{f}_2'(s_2)]s_1's_2'
\end{gathered}
$$

причем существенно только совпадение знаков левой и правой частей, так как совпадение их модулей вытекает из уравнений (1.1).

Шесть искомых функций s_i, u_i, υ_i $(i=1,2)$ от α связаны также двумя конечными уравнениями. Одно из них очевидно:

$$
|\mathbf{g}(u_2,\upsilon_2) - \mathbf{g}(u_1,\upsilon_1)| = |\mathbf{f}_2(s_2) - \mathbf{f}_1(s_1)| \tag{1.2}
$$

Другое имеет более сложный вид и может быть получено исключением u_i', υ_i', s_i' из системы (1.1) (см. [1]) либо с помощью геометрических соображений [4]. Учитывая эти конечные уравнения, получаем, что общее решение системы (1.1), после исключения из него параметра α, содержит три произвольных постоянных. Таким образом, множество геометрически различных движений, вообще говоря, трехмерно.

Существенно, что система уравнений (1.1) однородна относительно u_i', υ_i', s_i'. Поэтому она задает на четырехмерном многообразии, определенном упомянутыми конечными уравнениями, только траектории, но не закон движения по ним в зависимости от α. Для уточнения этого закона требуется указать конкретный смысл параметра α: так, можно принять [1] $\alpha = s_1$, другие примеры будут приведены в п. 4.

2. Скорость поворота при качении. Теорема. Пусть в процессе качения поверхность $K^\alpha Q$ повернулась на угол $d\psi$ вокруг оси $M_1^\alpha M_2^\alpha$ в положительном направлении. Тогда

$$
d\psi = \left[\frac{\mathbf{c}_i^\alpha\cdot \mathbf{f}_i''(s_i^\alpha)}{|\mathbf{c}_i^\alpha|^2} - \frac{\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\nu}_i^\alpha\cdot \mathbf{c}_i^\alpha)}{|\mathbf{c}_i^\alpha\cdot K^\alpha \mathbf{n}_i^\alpha|}k_i^\alpha\right]\left|\overline{M_1^\alpha M_2^\alpha}\right|\, ds_i \quad (i=1,2) \tag{2.1}
$$

$$
\mathbf{c}_i^\alpha := \overline{M_1^\alpha M_2^\alpha}\times \mathbf{f}_i'(s_i^\alpha), \qquad \mathbf{n}_i^\alpha := \mathbf{n}(u_i^\alpha, \upsilon_i^\alpha)
$$

$\boldsymbol{\nu}_i^\alpha$ и k_i^α – орт главной нормали и кривизна нормального сечения поверхности $K^\alpha Q$ в точке M_i^α в направлении $\mathbf{f}_i'(s_i^\alpha)$.

Доказательство приведено в приложении (п. 7).

При известных значениях u_i, υ_i, s_i $(i=1,2)$ для нахождения значения k_i^α в формуле (2.1) требуется найти $du_i / d\upsilon_i$, что можно сделать, разделив при данном i первое из уравнений (1.1) на второе; после этого достаточно воспользоваться теоремой Эйлера о нормальных сечениях [5]. Знание $du_i / d\upsilon_i$ дает возможность подсчитать и $|\mathbf{c}_i^\alpha \cdot K^\alpha \mathbf{n}_i^\alpha|$, так как

$$|\mathbf{c}_i^\alpha \cdot K^\alpha \mathbf{n}_i^\alpha| = |\{[\mathbf{g}(u_2^\alpha, \upsilon_2^\alpha) - \mathbf{g}(u_1^\alpha, \upsilon_1^\alpha)] \times \mathbf{h}_i^\alpha\} \cdot \mathbf{n}_i^\alpha|$$

где $\mathbf{h}_i^\alpha := (K^\alpha)^{-1} \mathbf{f}_i'(s_i^\alpha)$ – единичный вектор, касательный к Q в точке N_i^α в направлении $du_i / d\upsilon_i$.

3. Характерные точки. Укажем на относительные положения Q, L_1, L_2, обладающие некоторыми качественными особенностями.

Пусть $\mathbf{c}_i^{\alpha_0} = 0$ для некоторых i, α_0, т.е. $\mathbf{f}_i'(s_i^{\alpha_0}) \| \overline{M_1^{\alpha_0} M_2^{\alpha_0}}$. Тогда $ds_i / d\psi = 0$, т.е. при конечном $d\psi$ это положение стационарно для s_i. Если это равенство справедливо только для одного i, то при дальнейшем качении оно сразу же нарушается, т.е. для s_i имеет место мгновенный останов; типичной является перемена направления движения точки M_i^α после момента α_0. Если же $\mathbf{c}_1^{\alpha_0} = \mathbf{c}_2^{\alpha_0} = 0$, то в процессе вращения точки M_1^α и M_2^α остаются неподвижными.

Если $\mathbf{c}_i^{\alpha_0} \neq 0$, $\mathbf{c}_i^{\alpha_0} \cdot K^{\alpha_0} \mathbf{n}_i^{\alpha_0} = 0$ и $k_i^{\alpha_0} \neq 0$, то ситуация аналогична. Отличие состоит лишь в том, что если эти условия выполнены при $i = 1$ и $i = 2$, то останов точек M_1^α и M_2^α, вообще говоря, мгновенный, за исключением случая, когда $\mathbf{n}_1^{\alpha_0} \| \mathbf{n}_2^{\alpha_0} \| \overline{N_1^{\alpha_0} N_2^{\alpha_0}}$: тогда точки $M_1^{\alpha_0}$ и M_2^α остаются неподвижными.

Противоположным является случай

$$\frac{\mathbf{c}_i^\alpha \cdot \mathbf{f}_i'(s_i^\alpha)}{|\mathbf{c}_i^\alpha|^2} = \frac{\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\nu}_i^\alpha \cdot \mathbf{c}_i^\alpha)}{|\mathbf{c}_i^\alpha \cdot K^\alpha \mathbf{n}_i^\alpha|} k_i^\alpha \quad \text{при } \alpha = \alpha_0 \tag{3.1}$$

В этом случае $ds_i / d\psi = \infty$, т.е. при конечном ds_i получаем $d\psi|_{\alpha=\alpha_0} = 0$. (Отсюда следует, что если равенство (3.1) справедливо только для одного i, то $ds_j / ds_i = 0$ $(j \neq i)$ при $\alpha = \alpha_0$.) При этом типично изменение знака $d\psi$ после перехода s_i через $s_i^{\alpha_0}$, а потому, если равенство (3.1) справедливо только для одного i – то и изменение направления движения точки M_j^α $(j \neq i)$ при этом переходе.

Для выполнения равенства (3.1) достаточно, в частности, чтобы линия L_i имела в точке $M_i^{\alpha_0}$ с поверхностью $K^{\alpha_0} Q$ касание выше второго порядка. Однако такое касание не является необходимым, в чем можно убедиться, положив, например, $K^{\alpha_0} Q = \{(x,y,z)\colon\ z = x^2 - y^2\}$, $M_1^{\alpha_0}(0,0,0)$, $L_1 = \{(x,y,0)\colon\ (x+y)^2 = x - y\}$, $M_2^{\alpha_0}(0,1,0)$.

Выше считалось, что поверхность $K^\alpha Q$ имеет с каждой из линий L_i только одну общую точку M_i^α. Если этого требования не ставить, то возможны два варианта постановки задачи. Так, можно считать поверхность $K^{\alpha}Q$, проницаемой для линий L_i. Это означает, что $K^{\alpha}Q \cap L_i$, кроме M_i^{α}, может содержать и другие точки, в которых требование соприкосновения не ставится. В этом случае применение системы (1.1) такое же, как при $K^{\alpha}Q \cap L_i = \{M_i^{\alpha}\}$.

Во втором варианте постановки задачи, более естественном с позиций механики (качения твердого тела неизменной формы), линии L_i не должны оказываться внутри $K^{\alpha}Q$. Тогда при качении могут появиться характерные точки еще одного типа, определяемые значениями $\alpha = \alpha_0$, при которых поверхность $K^{\alpha_0}Q$ имеет по крайней мере с одной из линий L_i более чем одну общую точку. Здесь при продолжении вращения типично появление разрывов первого рода функций $\alpha \mapsto u_i^{\alpha}$, υ_i^{α}, s_i^{α} при $\alpha = \alpha_0$; пример будет приведен в п. 5.

4. О выборе параметра качения. Представляется естественным ввести переменную $\psi = \int |d\psi|$, просуммировав малые углы поворота поверхности $K^{\alpha}Q$ от начального положения до любого текущего. Эту переменную можно применить в системе уравнений (1.1), положив $\alpha = \psi$, что сохраняет ее симметричный вид; для фиксирования геометрического смысла аргумента надо присоединить уравнение (2.1). (Достаточно – при каком-то одном i, так как если из уравнений (2.1) при $i = 1, 2$ исключить $d\psi$, получится следствие из системы (1.1).) Недостатком введения переменной ψ является то, что она в общем случае, если вектор $\overline{M_1^{\alpha}M_2^{\alpha}}$ изменяет направление, не имеет непосредственного геометрического смысла, так как приращение ψ зависит не только от начального и конечного положений $K^{\alpha}Q$, но и от всего способа перехода из одного положения в другое.

При исследовании динамики качения естественно считать, что α в уравнениях (1.1) – это время t. В таком случае к уравнениям (1.1) надо добавить уравнение, определяющее скорость движения изображающей точки по траектории в фазовом пространстве. Пусть движение тела, ограниченного поверхностью $K^{t}Q$, происходит в потенциальном силовом поле, причем потенциальная энергия тела, когда точки (u_1, υ_1), $(u_2, \upsilon_2) \in Q$ совпадают соответственно с точками s_1, s_2 линий L_1, L_2, равна $U(u_1, \upsilon_1, u_2, \upsilon_2, s_1, s_2)$, а момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через точки (u_1, υ_1), (u_2, υ_2), равен $I(u_1, \upsilon_1, u_2, \upsilon_2)$. Тогда необходимое добавочное уравнение, если не учитывать диссипации энергии, имеет вид

$$\frac{1}{2} I(u_1, \upsilon_1, u_2, \upsilon_2)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + U(u_1, \upsilon_1, u_2, \upsilon_2, s_1, s_2) = \text{const}$$

куда надо еще подставить выражение для $d\psi$ из равенства (2.1).

5. Пример 1. Качение круглого цилиндра по параллельным цепным линиям. Рассмотрим простейший способ качения круглого цилиндра радиуса R по паре параллельных цепных линий. Здесь

$$Q\colon\ \mathbf{r} = R\cos\upsilon\,\mathbf{i} + u\mathbf{j} + R\sin\upsilon\,\mathbf{k}$$

$$L_i\colon\ \mathbf{r} = a\,\mathrm{arsh}(s/a)\mathbf{i} + (-1)^i l\mathbf{j} + (a^2 + s^2)^{1/2}\mathbf{k} \quad (i = 1;2)$$

где $a, l > 0$ – параметры. Будем считать, что в процессе качения образующие цилиндра остаются параллельными оси y. Тогда все возможные движения получаются из одного при помощи простых переносов и поворотов, поэтому положим

$$u_i \equiv (-1)^i l \quad (i=\overline{1,2}), \quad \upsilon_1 \equiv \upsilon_2 =: \upsilon, \quad s_1 \equiv s_2 =: s$$

Система (1.1) сводится к единственному уравнению $|R\upsilon'| = |s'|$, т.е. можно считать, что $R\upsilon \equiv s + \text{const}$. Далее формула (2.1) дает

$$d\psi = \left(\frac{1}{R} - \frac{a}{s^2+a^2}\right) ds$$

Отсюда получаем, что если $R < a$, то характерные точки, упомянутые в п. 3, отсутствуют и можно положить

$$\upsilon = \frac{s}{R}, \quad \psi = \frac{s}{R} - \operatorname{arctg}\frac{s}{a}$$

При $R = a$ появляется стационарная точка $s = 0$ для $\psi(s)$.

Допустим теперь, что $R > a$; этот случай представляет бо́льший интерес. Если считать поверхность $K^\alpha Q$ проницаемой для линий L_i, то она может непрерывно прокатиться вдоль них, т.е. за параметр α можно взять s; однако при этом с ростом s на интервале $(-[a(R-a)]^{1/2}, [a(R-a)]^{1/2})$ имеем $d\psi < 0$, т.е. вращение происходит в отрицательном направлении.

Если же при $R > a$ поверхность $K^\alpha Q$ непроницаема для линий L_i, то картина иная. При $s = \pm a\lambda(R/a)$ поверхность $K^\alpha Q$ имеет по две точки касания с каждой из линий L_i, где $\lambda(p)$ – единственный положительный корень уравнения

$$\lambda = \operatorname{sh}[p\lambda(1+\lambda^2)^{-1/2}] \quad (p>1)$$

Таким образом, здесь появляются две характерные точки последнего типа из п. 3, а s может принимать значения только из интервалов $(-\infty, -a\lambda(R/a))$ и $(a\lambda(R/a), \infty)$. При достижении этих точек поверхность $K^\alpha Q$ непрерывно "переваливается" из одного интервала в другой, так что s и υ испытывают разрывы первого рода, но ψ остается непрерывным.

6. Пример 2. Качение шара по паре плоских линий, симметричных друг другу. Особенность качения сферы состоит в том, что здесь появляется еще одно конечное уравнение, связывающее s_1 с s_2 (в общем случае довольно громоздкое). Это приводит к тому, что множество геометрически различных движений, если различать точки сферы, становится двумерным, а если не различать их – то нульмерным (дискретным).

Рассмотрим простой случай, когда линии L_i лежат в плоскости x, y и симметричны друг другу относительно оси x, т.е.

$$\mathbf{f}_1(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}, \quad \mathbf{f}_2(s) = x(s)\mathbf{i} - y(s)\mathbf{j}$$

где $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем

$$y(s) > 0, \quad x'(s) > 0, \quad [x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1$$

Пусть Q – сфера радиуса R, а u, υ – сферические координаты с полюсами на оси y, т.е.

$$\mathbf{g}(u,\upsilon) = (R\sin\upsilon\cos u)\mathbf{i} + (R\cos\upsilon)\mathbf{j} + (R\sin\upsilon\sin u)\mathbf{k}$$

Из соображений симметрии получаем

$$s_1 \equiv s_2 =: s, \quad u_1 \equiv u_2 =: u, \quad \upsilon_1 \equiv \pi - \upsilon_2 =: \upsilon \in (0, \pi/2)$$

Равенство (1.2) принимает вид $R\cos\upsilon = y$ и определяет значения $\upsilon(s)$, а первое уравнение (1.1) – вид

$$R^2(\sin^2 u\, du^2 + d\upsilon^2) = ds^2$$

откуда получаем уравнение для функции $s \mapsto u(s)$:

$$du = \pm(R^2 x'^2 - y^2)^{1/2}(R^2 - y^2)^{-1} ds \tag{6.1}$$

Здесь берется верхний (нижний) знак, если аппликата центра сферы $K^\alpha Q$ больше (соответственно меньше) нуля.

Из формулы (6.1) вытекает, в частности, необходимое условие возможности качения:

$$y(s) \leq Rx'(s) \tag{6.2}$$

Когда это неравенство обращается в равенство, центр сферы $K^\alpha Q$ попадает на плоскость x, y.

Для применения формулы (2.1) находим

$$\mathbf{c}_i^\alpha = 2x'y\mathbf{k}, \quad \mathbf{f}_i'(s_i) = x''\mathbf{i} - (-1)^i y''\mathbf{j}, \quad k_i^\alpha = 1/R$$

$$K^\alpha \mathbf{n}_i^\alpha = \frac{1}{R}\left[-\frac{yy'}{x'}\mathbf{i} - (-1)^i y\mathbf{j} \mp \frac{(R^2 x'^2 - y^2)^{1/2}}{x'}\mathbf{k}\right]$$

с тем же правилом знаков, что в формуле (6.1). Отсюда получаем

$$ds = \mp\{R^2[x'(s)]^2 - [y(s)]^2\}^{1/2} d\psi \tag{6.3}$$

Таким образом, точки, в которых неравенство (6.1) обращается в равенство, являются характерными – стационарными для s. Стационарные точки для ψ здесь отсутствуют и ψ можно глобально принять за параметр α. Отметим, что из (6.1) и (6.3) вытекает неравенство $|du/d\psi| \leq 1$, которое обращается в равенство, только если $y'(s) = 0$.

Из (6.3) следует дифференциальное уравнение

$$d^2 s / d\psi^2 + y(s)y'(s) - R^2 x'(s)x''(s) = 0$$

показывающее, в частности что происходит вблизи характерных значений s. Именно, если $s = s^*$ – такое значение, причем

$$y'(s^*) \neq Rx''(s^*) \tag{6.4}$$

то при $s = s^*$ получаем $ds/d\psi = 0$, $d^2 s/d\psi^2 \neq 0$, т.е. при переходе ψ через ψ^* $(s|_{\psi=\psi^*} = s^*)$ функция $\psi \mapsto s(\psi)$ меняет направление своего изменения на противоположное. Это означает, что центр сферы $K^\Psi Q$ пересекает плоскость x, y и сфера начинает двигаться вспять. Если внутри некоторого интервала $s^{**} \leq s \leq s^*$ неравенство (6.2) строгое, а на концах оно обращается в равенство, причем на обоих концах выполнено условие (6.4), то при непрерывном возрастании ψ сфера движется периодически с периодом (по ψ), равным

$$\Psi = 2\int_{s^{**}}^{s^*} \{R^2[x'(s)]^2 - [y(s)]^2\}^{-1/2} ds$$

Пусть, например, линии L_i имеют уравнение $y = (-1)^{i-1} a\,\mathrm{ch}(x/a)$, причем $0 < a < R$ и s отсчитывается от точки $(0, a)$. Тогда критическими являются точки $s = \pm[a(R-a)]^{1/2}$, а период (по ψ) равен

$$\Psi = 4\int_0^{[a(R-a)]^{1/2}} (a^2 + s^2)^{1/2}[a^2 R^2 - (a^2 + s^2)^2]^{-1/2} ds = \frac{4a}{[R(R-a)]^{1/2}}\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{R-a}{R}\left(\frac{R-a}{R+a}\right)^{1/2}\right)$$

где Π – эллиптический интеграл третьего рода.

Если вместо условия (6.4) потребовать, чтобы $y'(s^*)=Rx''(s^*)$, то в достаточной близости от s^* справедливо неравенство

$$|R^2[x'(s)]^2-[y(s)]^2|\leq C^2(s-s^*)^2 \quad (C=\mathrm{const}>0)$$

и потому из (6.3) следует, что $|ds/d\psi|\leq C|s-s^*|$. Значит, при $s\neq s$ имеем

$$\frac{d}{d\psi}(e^{C\psi}|s-s^*|)=Ce^{C\psi}|s-s^*|+e^{C\psi}\operatorname{sgn}(s-s^*)\frac{ds}{d\psi}\geq e^{C\psi}\left(C|s-s^*|-\left|\frac{ds}{d\psi}\right|\right)\geq 0$$

Отсюда $e^{C\psi}|s-s^*|>\mathrm{const}>0$, и потому $s\to s^*$ только при $\psi\to\infty$.

Таким образом, сфера $K^{\Psi}Q$ приближается к характерной точке только асимптотически, делая при этом бесконечное число оборотов. Так как в предельном положении при $s=s^*$ возможно вращение без изменения s, то получаем, что рассматриваемый случай осуществляется, если и только если $y(s^*)=R$, $y'(s^*)=0$.

7. Приложение. Доказательство теоремы. Докажем сначала лемму об изменении кривизны линии при проецировании. Будем рассматривать ортогональное проецирование на плоскость P' и образы после проецирования будем обозначать штрихами. Пусть M – точка достаточно гладкой линии L; установим связь между кривизной k линии L в точке M и кривизной k' соответствующей линии L' в точке M'.

Лемма. Имеет место формула

$$k'\cos^3\beta=k\cos\gamma$$

где $\beta\in[0,\pi/2]$ – угол наклона линии L в точке M к плоскости P' а $\gamma\in[0,\pi/2]$ – угол между P' и соприкасающейся плоскостью P к линии L в точке M.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать линию L лежащей в плоскости P. Пусть l – касательная к L в точке M; $\boldsymbol{\tau}$ – орт этой касательной; $\mathbf{n}$ – орт главной нормали к L в M; $\mathbf{d}\perp P'$ – единичный вектор. Выбрав $A\in l$, $B\in L$, $\overline{AB}\|\mathbf{n}$, имеем $|\overline{AB}|\sim k|\overline{MB}|^2/2$ при $A\to M$.

Далее, проецируя на P', получаем

$$\overline{M'A'}=\overline{MA}-(\overline{MA}\cdot\mathbf{d})\mathbf{d},\quad \overline{A'B''}=\overline{AB}-(\overline{AB}\cdot\mathbf{d})\mathbf{d}$$

Поэтому модуль p проекции вектора $\overline{A'B'}$ на главную нормаль к L' в M' равен

$$|\overline{A'B'}|\left[1-\left(\frac{\overline{M'A'}\cdot\overline{A'B'}}{|\overline{M'A'}|\cdot|\overline{A'B'}|}\right)^2\right]=\{|\overline{AB}|[1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d})^2]^{1/2}\}\left\{1-\frac{(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{d})^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d})^2}{[1-(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{d})^2][1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d})^2]}\right\}^{1/2}=$$

$$=|\overline{AB}|\frac{[1-(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{d})^2-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d})^2]^{1/2}}{[1-(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{d})^2]^{1/2}}=|\overline{AB}|\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$$

Однако нетрудно проверить, что $k'=2\lim(p|\overline{M'A'}|^{-1})$ при $A\to M$. Отсюда

$$k'=2\lim_{A\to M}\left\{|\overline{AB}|\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}|\overline{MA}|^{-2}[1-(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{d})^2]^{-1}\right\}=2\frac{\cos\gamma}{\cos^3\beta}\lim_{A\to M}\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{MA}|^2}=k\frac{\cos\gamma}{\cos^3\beta}$$

Лемма доказана.

Переходя к доказательству теоремы, рассмотрим сначала специальный случай, когда $K^{\alpha}Q$ – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси $M_1^{\alpha}M_2^{\alpha}$, а линия L_i лежит в плоскости $P_i^{\alpha}\perp\overline{M_1^{\alpha}M_2^{\alpha}}$. Допустим также, что векторы $\mathbf{f}_i''(s_i^{\alpha})$ и $\boldsymbol{\nu}_i^{\alpha}$ направлены противоположно вектору $\mathbf{c}_i^\alpha$ и что $k_{L_i}^\alpha := |\mathbf{f}_i''(s_i^\alpha)| < k_i^\alpha$. Заменим линии L_i и $K^\alpha Q \cap P_i^\alpha$ на соприкасающиеся окружности к ним в точке M_i^α и обозначим через O_i^α центр второй окружности. Тогда после поворота получаем, отбрасывая малые высшего порядка, что

$$d\psi = \angle O_i^\alpha M_i^\alpha O_i^{\alpha+d\alpha} = k_i^\alpha |\overline{O_i^\alpha O_i^{\alpha+d\alpha}}| = k_i^\alpha (1 - k_{L_i}^\alpha / k_i^\alpha) |\overline{M_i^\alpha M_i^{\alpha+d\alpha}}| = (k_i^\alpha - k_{L_i}^\alpha) ds_i$$

Рассмотрение остальных вариантов расположения векторов $\mathbf{f}''(s_i^\alpha)$ и $\boldsymbol{\nu}_i^\alpha$ относительно $\mathbf{c}_i^\alpha$ показывает, что во всех этих вариантах, а также при любом соотношении между $k_{L_i}^\alpha$ и k_i^α в исследуемом специальном случае имеет место равенство

$$d\psi = \{k_{L_i}^\alpha \operatorname{sgn}[\mathbf{f}_i''(s_i^\alpha) \cdot \mathbf{c}_i^\alpha] - k_i^\alpha \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\nu}_i^\alpha \cdot \mathbf{c}_i^\alpha)\} ds_i \tag{7.1}$$

Пусть теперь поверхность $K^\alpha Q$ и линии L_i произвольны. С точностью до величин третьего порядка малости относительно ds_i заменим линию L_i на ее соприкасающуюся окружность $\overline{L}_i^\alpha$ в точке M_i^α, а след этой линии на поверхности $K^\alpha Q$ при качении последней – на линию D_i^α пересечения $K^\alpha Q$ с плоскостью, проходящей через M_i^α параллельно векторам $\mathbf{f}_i'(s_i^\alpha)$ и $\mathbf{c}_i^\alpha$. Если теперь провести через D_i^α цилиндрическую поверхность с образующими, паралельными вектору $\overline{M_1^\alpha M_2^\alpha}$, и спроецировать $\overline{L}_i^\alpha$ и D_i^α на плоскость $S \perp \overline{M_1^\alpha M_2^\alpha}$, то рассматриваемый общий случай оказывается сведенным к разобранному выше специальному случаю.

Обозначив для краткости $\boldsymbol{\tau}_i^\alpha := \mathbf{f}_i'(s_i^\alpha)$, $\mathbf{f}_{12}^\alpha := \overline{M_1^\alpha M_2^\alpha} / |\overline{M_1^\alpha M_2^\alpha}|$, получаем по теореме Менье [5] кривизну $\overline{k}_i^\alpha$ линии D_i^α в точке M_i^α:

$$\overline{k}_i^\alpha = \frac{k_i^\alpha}{|\cos(K^\alpha \mathbf{n}_i^\alpha, \boldsymbol{\tau}_i^\alpha \times \mathbf{f}_{12}^\alpha)|} = k_i^\alpha \frac{|\boldsymbol{\tau}_i^\alpha \times \mathbf{f}_{12}^\alpha|}{|(\boldsymbol{\tau}_i^\alpha \times \mathbf{f}_{12}^\alpha) \cdot K^\alpha \mathbf{n}_i^\alpha|}$$

Теперь применяем лемму. Так как в данном случае β дополняет до 90° угол между $\boldsymbol{\tau}_i^\alpha$ и $\mathbf{f}_{12}^\alpha$, а γ – это угол между векторами $\boldsymbol{\tau}_i^\alpha \times (\boldsymbol{\tau}_i^\alpha \times \mathbf{f}_{12}^\alpha) = (\boldsymbol{\tau}_i^\alpha \cdot \mathbf{f}_{12}^\alpha)\boldsymbol{\tau}_i^\alpha - \mathbf{f}_{12}^\alpha$ и $\mathbf{f}_{12}^\alpha$, то по лемме получаем кривизну после проецирования

$$\overline{k}_i^{\alpha\prime} = \overline{k}_i^\alpha \frac{|\cos[(\boldsymbol{\tau}_i^\alpha \cdot \mathbf{f}_{12}^\alpha)\boldsymbol{\tau}_i^\alpha - \mathbf{f}_{12}^\alpha, \mathbf{f}_{12}^\alpha]|}{\sin^3(\boldsymbol{\tau}_i^\alpha, \mathbf{f}_{12}^\alpha)} = \frac{\overline{k}_i^\alpha}{1 - (\boldsymbol{\tau}_i^\alpha \cdot \mathbf{f}_{12}^\alpha)^2} =$$

$$= k_i^\alpha |(\boldsymbol{\tau}_i^\alpha \times \mathbf{f}_{12}^\alpha) \cdot K^\alpha \mathbf{n}_i^\alpha|^{-1} [1 - (\boldsymbol{\tau}_i^\alpha \cdot \mathbf{f}_{12}^\alpha)^2]^{-1/2}$$

Аналогично находится кривизна $k_{L_i}^{\alpha\prime}$ спроецированной линии L_i. Здесь β то же, что выше, а γ – это угол между $\mathbf{f}_i''(s_i^\alpha) \times \boldsymbol{\tau}_i^\alpha$ и $\mathbf{f}_{12}^\alpha$. (Предполагаем, что $\mathbf{f}_i''(s_i^\alpha) \neq 0$, в противном случае $k_{L_i}^{\alpha\prime} = 0$.) Обозначив $\mathbf{p}_i^\alpha = \mathbf{f}_i''(s_i^\alpha) / |f_i''(s_i^\alpha)|$, по лемме получаем

$$k_{L_i}^{\alpha\prime} = |\mathbf{f}_i''(s_i^\alpha)| \cdot |(\mathbf{p}_i^\alpha \times \boldsymbol{\tau}_i^\alpha) \cdot \mathbf{f}_{12}^\alpha| [1 - (\boldsymbol{\tau}_i^\alpha \cdot \mathbf{f}_{12}^\alpha)^2]^{-3/2}$$

Заметим, наконец, что элемент ds_i длины дуги линии L_i при проецировании сокращается по формуле

$$ds_i' = [1 - \boldsymbol{\tau}_i^{\alpha} \cdot \mathbf{f}_{12}^{\alpha})^2]^{1/2} ds_i$$

Отсюда, применяя к ds_i' формулу (7.1) и возвращаясь к исходным обозначениям, после простых преобразований получаем формулу (2.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мышкис А.Д.* К кинематике колесной пары // Математические методы решения задач транспорта: Тр. МИИТ. М.: Изд-е МИИТ, 1988. Вып. 802. С. 11–19.
2. *Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. М.: Наука, 1990. 356 с.
3. *Painlevé P.* Oeuvres. T. 3. Equations différentielles du second ordre. – Paris: CNRS, 1975. 826 p.
4. *Енсебаева М.З.* Новая конечная связь для системы уравнений качения твердого тела по двум направляющим // Математические методы и задачи функционирования транспортных систем: Тр. МИИТ. М.: Изд-е МИИТ, 1992. Вып. 866. С. 49–53.
5. *Бляшке В.* Введение в дифференциальную геометрию. М.: Гостехиздат, 1957. 223 с.

Алма-Ата, Москва

Поступила в редакцию
29. IX. 1992