УДК 539.376

© 1994 г. Д.В. Георгиевский

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

Рассматривается устойчивость плоского течения Куэтта в идеально жесткопластическом слое относительно малых возмущений. Для произвольного невозмущенного профиля скорости даются достаточные интегральные оценки устойчивости. Аналитически решается спектральная краевая задача в области наиболее неустойчивых длинных волн.

Известны исследования по устойчивости сдвиговых течений для различных реологических моделей тел (неньютоновской модели второго порядка [1–3], где определяющие соотношения выбраны в форме Ривлина – Эриксена [4]; вязкоупругих жидкостей в приближении короткой памяти [5]; идеально пластических анизотропных сред [6]; вязкопластических сред [7]). Существенную роль играет класс возмущений, относительно которых изучается устойчивость системы. Так, например, показано [1], что неньютоновские свойства – упругость и нелинейность – дестабилизируют течение. При помощи энергетических методов установлено [2], что в случае двумерных возмущений упруговязкость всегда стабилизирует течение, а в случае трехмерных ее роль определяется безразмерным соотношением параметров модели. Отметим также монографию [8], в которой подробно освещены данные вопросы.

1. Постановка спектральной краевой задачи. Воспользуемся результатами работы [9], где выведено уравнение устойчивости одномерного сдвига в несжимаемом вязкопластическом слое относительно двумерных возмущений (обобщенное уравнение Орра–Зоммерфельда). Выпишем его для идеально жесткопластической среды Сен-Венана, связь тензоров напряжений σ_{mj} и скоростей деформаций v_{mj} в которой задается соотношениями

$$\sigma_{mj} = -p\delta_{mj} + 2\tau v_{mj} / U, \quad m,j = 1,3 \tag{1.1}$$

где p – функция давления, U – максимальная скорость скольжения, τ – предел текучести при сдвиге [7], δ_{mj} – единичный тензор. Уравнение устойчивости имеет вид

$$4\tau s(\varphi'/U)' + (\alpha/s + iv)(\varphi'' - s^2\varphi) - iv''\varphi = 0 \tag{1.2}$$

Здесь φ – комплексная амплитуда функции тока ψ: $\psi(x_1, x_3, t) = \varphi(x_3)\exp(isx_1 + \alpha t)$, $s \in \mathbb{R}$, $\alpha_* + i\alpha_{**} = \alpha \in \mathbb{C}$; $v(x_3)$ – скорость основного движения, заданная во всем слое $\{\Omega: 0 < x_3 < 1\}$; $U = |v'|$. Все величины в (1.1), (1.2) приведены к безразмерному виду в базисе $\{\rho, V, h\}$, где ρ – постоянная плотность тела, V и h – характерные скорость и линейный размер; $\tau = \tau_s / (\rho V^2)$ (τ_s – размерный предел текучести при сдвиге). Штрихами обозначены производные по x_3.

При $\tau = 0$ уравнение (1.2) сводится к хорошо изученному уравнению Релея. К соответствующему сдвиговому течению применимы теоремы из теории гидродинамической устойчивости идеальной жидкости – условия Релея и Фьортьофта – Хойланда, а также теорема Ховарда "о полукруге" [10], – связанные со знаком кривизны профиля скорости внутри области течения.

Известно, что возможна неединственность решения уравнений движения вязко- и идеально пластических тел. Одному и тому же сдвиговому напряжению τ соответствует, вообще говоря, бесконечно много значений U. Следовательно, для течения между плоскими параллельными границами, движущимися вдоль оси x_1 с постоянными скоростями (плоское течение Куэтта), в качестве основного профиля можно выбрать любую монотонную функцию $v(x_3)$, принимающую заданные значения в точках 0 и 1. Возможно также любое распределение на интервале $0 < x_3 < 1$ жестких зон ($U = 0$). Граничные условия в возмущениях имеют при этом вид

$$x_3=0:\ \varphi=0;\quad x_3=1:\ \varphi=0 \tag{1.3}$$

Будем полагать далее, что основное течение характеризуется произвольной монотонно возрастающей функцией $\upsilon(x_3)$ с непрерывной производной, такой, что $U\leqslant q$ и

$$\int_0^c \frac{dx_3}{U(x_3)}<\infty,\quad \forall c\in[0,1]$$

Если же в этом течении тангенциальная скорость терпит разрывы (зоны пластического течения с монотонным и гладким профилем чередуются с жесткими прослойками, где скорость деформации нулевая), то достаточно независимо исследовать устойчивость в каждой из зон течения. Для этого пределы интегрирования [0, 1] в дальнейших выкладках необходимо заменить на другие пределы, определяемые из основного движения, например, экспериментально. Здесь возможен и вырожденный случай отсутствия зон течения, когда скорость деформации является суммой нескольких δ-функций. Этот случай исключается из рассмотрения.

2. Интегральные оценки устойчивости в пространстве $\overline{H}_2(\Omega)$. Пусть φ – элемент комплексно-значного гильбертова пространства $\overline{H}_2(\Omega)$ с нормой

$$\|\varphi\|=\left(\int|\varphi''|^2dx_3\right)^{1/2} \tag{2.1}$$

имеющий две непрерывные производные [11] (здесь и всюду далее интегрирование по x_3 ведется от 0 до 1).

Умножим равенство (1.2) на комплексно-сопряженную функцию $\overline{\varphi}$ и проинтегрируем по x_3 от 0 до 1. С учетом граничных условий (1.3) получим

$$4\tau s I_\upsilon^2+\alpha(I_1^2+s^2I_0^2)/s+i\int[(\upsilon''+s^2\upsilon)|\varphi|^2+\upsilon|\varphi'|^2]dx_3+i\int\upsilon'\varphi'\overline{\varphi}dx_3=0 \tag{2.2}$$

$$\left(I_m^2=\int|\varphi^{(m)}|^2dx_3,\quad m=0,1;\quad I_\upsilon^2=\int|\varphi'|^2|\upsilon'|^{-1}dx_3\right)$$

Приравняем действительную часть стоящего слева в (2.2) выражения к нулю

$$4\tau sI_\upsilon^2+\alpha_*(I_1^2+s^2I_0^2)s^{-1}-\int\upsilon'(\varphi\overline{\varphi})_{**}dx_3=0 \tag{2.3}$$

и воспользуемся неравенством Шварца в пространстве $\overline{H}_2(\Omega)$ с нормой (2.1)

$$\int|\upsilon'|\,|\varphi'|\,|\varphi|dx_3\leqslant qI_0I_1 \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) следует

Теорема. Пусть $\alpha(s,\tau)$ – произвольное собственное число спектральной краевой задачи (1.2), (1.3). Тогда

$$\alpha_*\leqslant s(qI_0I_1-4\tau sI_\upsilon^2)/(I_1^2+s^2I_0^2) \tag{2.5}$$

Достаточным условием устойчивости плоского идеально пластического течения Куэтта является отрицательность правой части неравенства (2.5).

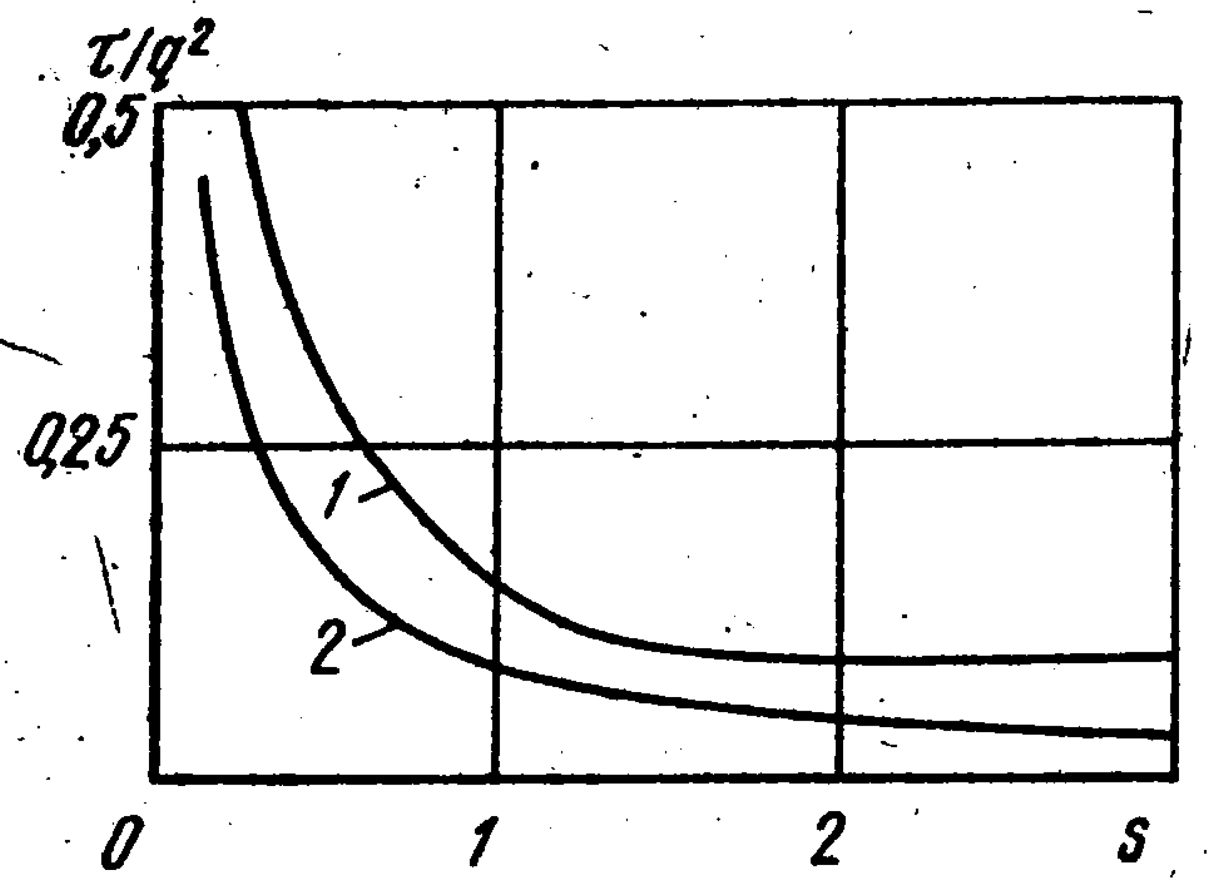
Следствие 1. Если $\tau/q^2>(\pi^2+s^2)/(8\pi^2s^2)$, то $\alpha_*<0$.

Следствие 2. Если $\tau/q^2>1/(4\pi s)$, то $\alpha_*<0$.

Доказательство следствий 1 и 2 вытекает из очевидного неравенства $sI_0I_1\leqslant(I_0^2+s^2I_1^2)/2$ и неравенств Фридрихса в пространстве $\overline{H}_2(\Omega)$ с нормой (2.1) [11]

$$I_1^2\geqslant\pi^2I_0^2,\quad I_\upsilon^2\geqslant I_1^2/q$$

Соответствующие критические кривые 1 и 2 в плоскости (s, τ/q^2) изображены на фигуре. Так как следствия 1 и 2 независимы и достаточны, справедливо



Следствие 3. Если при фиксированном s_0

$$\frac{\tau}{q^2} > \min\left\{\frac{\pi^2 + s_0^2}{8\pi^2 s_0};\ \frac{1}{4\pi s_0}\right\} = \frac{1}{4\pi s_0},\quad \forall s_0 > 0 \qquad (2.6)$$

то $\alpha_*(s_0, \tau) < 0$.

Оно означает, что если при некотором s_0 значение τ/q^2 лежит выше кривой 2 на фигуре, то исходное течение устойчиво относительно возмущения с волновым числом s_0. Поскольку в реальном возмущении $\psi(x_1, x_3, t)$ присутствуют все гармоники, $s > 0$, то общей достаточной и независимой от s оценки устойчивости представить не удается. Из фигуры видно, что наиболее неустойчивыми будут длинноволновые вариации, увеличение же τ/q^2 оказывает стабилизирующее влияние.

Устойчивость коротких волн ("мелкой ряби") и нарастающий со временем характер длинных волн уже неоднократно отмечались ранее, в частности, в задачах, связанных с деформированием пластов земной коры (системы типа упругая литосфера – вязкая или идеальная астеносфера [12] и др.).

Дадим оценку минимальной неустойчивой длины волны λ^* ($\lambda = 2\pi/s$) в слое с характерными для геофизических процессов параметрами: $\rho = 3000$ кг/м^3, $V \approx 10$ см/год (высокоскоростные процессы), $q = 10$, $\tau_s \approx 10^7$ Па (при температурах ниже 200°С) [13]. Согласно (2.6) $\lambda^* = 8\pi^2\tau/q^2$, т.е. $\lambda^* \approx 3\times10^{20}$. Даже для самых тонких слоев такие длины волн превышают всякие линейные размеры Земли. Следовательно, в приближении идеально жесткопластической модели течения Куэтта геоматериалов устойчивы при любом реальном возмущении s, и ограничение (2.6) не оказывает на них существенного влияния.

3. Аналитическое решение спектральной задачи и длинноволновое приближение. Рассмотрим более подробно спектральную краевую задачу (1.2), (1.3) в случае, когда $\upsilon(x_3) = x_3$ (течение Куэтта в узком смысле). Тогда уравнение (1.2) перепишется в виде

$$(\alpha + isx_3 + 4\tau s^2)\varphi'' - s^2(\alpha + isx_3)\varphi = 0 \qquad (3.1)$$

Производя замены зависимой и независимой переменных

$$\varphi(x_3) = \eta(\zeta)\exp(\pm sx_3),\quad \zeta = -2(sx_3 - i\alpha - 4\tau s^2) \qquad (3.2)$$

сведем (3.2) к одному из двух дифференциальных уравнений с линейными коэффициентами (уравнений Лапласа)

$$\zeta\eta'' \mp \zeta\eta' + 2i\tau s^2 = 0 \qquad (3.3)$$

решение которых можно представить в рядах [14]

$$\eta(\zeta) = \mp\zeta\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Xi_n(\pm 2i\tau s^2)}{n!(n+1)!}(\mp\zeta)^n\right)\exp(\pm\zeta) \qquad (3.4)$$

$$\Xi_n(z) = (1-z)(2-z)\ldots(n-z)$$

Таким образом, два фундаментальных решения уравнения (3.1) можно получить, произведя обратную замену (3.2) и взяв верхний и нижний знаки в формулах (3.4). Подставим эти фундаментальные решения в граничные условия (1.3) и придем стандартным путем к дисперсионно-волновому уравнению

$$|W_{mj}| = 0,\quad m, j = 1,2 \qquad (3.5)$$

Четыре элемента характеристического определителя $|W_{mj}|$ записываются следующим образом:

$$W_{11;21}=\pm\beta-1+\Sigma(s,\beta)$$

$$W_{12;22}=[\pm(\beta-s)-1+\Sigma(s,\beta-s)]\exp(\pm s) \tag{3.6}$$

$$\Sigma(s,\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Xi_n(\pm 2i\tau s^2)}{n!(n+1)!}(\pm 2)^n(\pm\beta-1+n)\beta^n,\quad \beta=i(\alpha+4\tau s^2)$$

Так как $\alpha_*=\beta_{**}-4\tau s^2$, критерий устойчивости будет иметь вид

$$\beta_{**}<4\tau s^2 \tag{3.7}$$

Разложим левую часть (3.5) в ряд по s и оставим первые три ненулевые члены разложения

$$|W_{mj}|=s(W_0+W_1 s+(W_2+2i\tau W_2^{(\tau)})s^2+\ldots) \tag{3.8}$$

Коэффициенты W_0, W_1, W_2, $W_2^{(\tau)}$, зависящие только от β, представляют собой произведения двойных рядов, однако их удается просуммировать в конечном виде [15]. Опуская выкладки, будем иметь при $\beta\neq 0$

$$W_0=-(\operatorname{ch}2\beta-1-\beta^2)/\beta^2,\quad W_1=(1+\beta\operatorname{sh}2\beta-\operatorname{ch}2\beta)/\beta^3$$

$$W_2=-[3(2+\beta)(\operatorname{ch}2\beta-1)-6\beta\operatorname{sh}2\beta-\beta^4]/(6\beta^4)$$

$$W_2^{(\tau)}=\{[2(C+\ln 2\beta)-\operatorname{Ei}2\beta-\operatorname{Ei}(-2\beta)]\operatorname{sh}2\beta+[\operatorname{Ei}2\beta-\operatorname{Ei}(-2\beta)](\operatorname{ch}2\beta-1-\beta^2)\}/\beta^2+(\operatorname{ch}2\beta-1)/\beta$$

и при $\beta=0$ $W_0=-1$, $W_1=W_2^{(\tau)}=0$, $W_2=-1/6$. Здесь C – постоянная Эйлера, $\operatorname{Ei}(z)$ – интегральная экспонента.

Представим $\beta(s,\tau)$ также в виде ряда по s

$$\beta(s,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(\tau)s^n \tag{3.9}$$

Для нахождения $\beta_n(\tau)$ надо подставить (3.9) в (3.8), затем (3.8) в (3.5) и приравнять к нулю коэффициенты при степенях s. Трижды проводя эту операцию, найдем

$$\beta_0=\pm i\kappa_0,\quad \beta_1=1/2,\quad \beta_2=-iA_1/A_2,\quad \kappa_0\in\mathbb{R} \tag{3.10}$$

$$A_1=\pm\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\kappa_0^2\right)+\tau\kappa_0^3+\tau\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2\kappa_0)^{2n}}{n(2n)!}\sin 2\kappa_0$$

$$A_2=\sin 2\kappa_0-\kappa_0$$

где $\kappa_0\approx 1{,}39155$ – положительный корень уравнения $\cos 2\kappa=1-\kappa^2$. Условие устойчивости (3.7) при учете (3.10) запишется следующим образом:

$$\pm\kappa_0-A_1 s^2/A_2<4\tau s^2$$

или приближенно

$$\tau>\pm(0{,}5895/s^2-0{,}015)$$

Так как мы ограничились только тремя членами асимптотических разложений (3.8) и (3.9), полученный результат имеет место, если $s^3\ll 1$ (длинноволновое приближение).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–16529).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клименков Е.Я., Полуянов Л.В.* Об устойчивости течения Куэтта жидкости второго порядка // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 934–937.
2. *Kundu P.K.* Investigation of stability of plane Couette flow of a second-order fluid by the energy method // Trans. Soc. Rheol. 1974. V. 18. № 4. P. 527–539.
3. *Crochet M.J.* A note on the stability of Poiseuille and Couette flows of viscoelastic fluids // Mech. Res. Communs. 1975. V. 2. № 1. P. 13–18.
4. *Coleman B.D., Noll W.* On certain steady flows of general fluids // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1959. V. 3. № 4. P. 289–303.
5. *Dunwoody J., Joseph D.D.* Systematic linearization for stability of shear flows of viscoelastic fluids // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1984. V. 86. № 1. P. 65–84.
6. *Победря Б.Е.* Теория течения анизотропной среды // Прочность, пластичность и вязкоупругость материалов и конструкций. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1986. С. 101–108.
7. *Ильюшин А.А.* Деформация вязкопластичного тела // Учен. зап. МГУ. Механика. 1940. Т. 39. С. 3–81.
8. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
9. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость двумерных и трехмерных вязкопластических течений и обобщенная теорема Сквайра // Изв. АН СССР. МТТ. 1993. № 2. С. 117–123.
10. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 25. С. 3–89.
11. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.
12. *Дубровский В.А.* Тектонические волны // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 1. С. 29–34.
13. *Рамберг Х.* Сила тяжести и деформации в земной коре. М.: Недра, 1985. 399 с.
14. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
15. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.

Поступила в редакцию
5. V. 1993

Москва