ЛИТЕРАТУРА

1. *Локшин А.А., Лопатников С.Л., Рок В.Е.* Метод Каньяра – Хупа для поглощающих сред / Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 188–190.
2. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир, 1983. 519 с.
3. *Баринова Т.Я.* Об асимптотическом методе решения динамических задач теории неидеальной упругости // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. № 1. С. 30–37.

Москва

Поступила в редакцию
12.V.1992

УДК 539.3

© 1994 г. **И.В. Панферов**

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОНУСА ИЗ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ И ОСЕВОЙ СИЛЫ

В цилиндрической системе координат получено автомодельное решение задачи о равномерном нагреве упругого конуса из трансверсально-изотропного материала с криволинейной цилиндрической анизотропией. Предполагается, что конус имеет небольшой раствор. Дается решение задачи о деформировании исследуемого конуса под действием осевой силы. Особенность задач состоит в том, что оси физической и геометрической симметрии исследуемого тела не совпадают.

Были приведены [1, 2] решения задач о деформировании конуса из трансверсально-изотропного материала под действием осевой силы, причем рассматривался случай коллинеарности осей физической и геометрической симметрии тела [1] и случай материала со сферической анизотропией, когда ось симметрии материала направлена по сферическому радиусу [2].

1. Конус из трансверсально-изотропного материала под действием равномерно распределенной температуры. Рассматривается автомодельное решение уравнений теории упругости в цилиндрической системе координат r, θ, x применительно к задаче о равномерном нагреве упругого конуса из трансверсально-изотропного материала с криволинейной цилиндрической анизотропией. Особенность задачи заключается в том, что плоскость изотропии материала не перпендикулярна оси конуса. Предполагается, что конус имеет небольшой раствор, т.е. $\operatorname{tg}\varphi \ll 1$, где φ – половина угла раствора конуса.

Начало координат поместим в вершину конуса, направив ось x по его оси. Концы конуса описываются уравнениями $x = x_0 \geqslant 0$, $x = X > x_0$.

В дальнейшем присвоим индексы 1, 2, 3 соответственно направлениям r, θ, x.

Напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{13}$ и деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \frac{1}{2}\varepsilon_{13}$ в рассматриваемом материале связаны следующим образом [1]:

$$\begin{aligned}
&E_2\varepsilon_1 = k\sigma_1 - k\nu'(\sigma_2+\sigma_3) + E_2\alpha_1\Delta T\\
&E_2\varepsilon_2 = \sigma_2 - \nu\sigma_3 - k\nu'\sigma_1 + E_2\alpha_2\Delta T\\
&E_2\varepsilon_3 = \sigma_3 - \nu\sigma_2 - k\nu'\sigma_1 + E_2\alpha_2\Delta T\\
&E_2\varepsilon_{13} = \gamma\sigma_{13}, \quad k = E_2 / E_1, \ \gamma = E_2 / G
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Ось симметрии трансверсально-изотропного материала направлена по оси 1, E_1 и E_2 –

модули упругости соответственно в направлениях 1 и 2, G – модуль сдвига, α_1 и α_2 – коэффициенты теплового расширения по осям 1 и 2, $\Delta T = \mathrm{const}$ – температура конуса.

Представляет интерес случай $k > 1$.

Решение задачи ищем в форме

$$\sigma_i = \sigma_i(y), \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i(y), \quad i = 1,2,3$$
$$\sigma_{13} = \sigma_{13}(y), \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}(y), \quad y = x/r \tag{1.2}$$

Уравнения равновесия и совместности деформаций для случая осесимметричной деформации в цилиндрической системе координат при условии (1.2) записываются в виде

$$-\sigma_1' y + \sigma_{13}' + \sigma_1 - \sigma_2 = 0, \quad -\sigma_{13}' y + \sigma_{13} + \sigma_3' = 0 \tag{1.3}$$

$$-\varepsilon_2' y + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2'' = \varepsilon_{13}' + \varepsilon_3' y \tag{1.4}$$

где штрих означает дифференцирование по y.

На боковой поверхности конуса $y = y_1 = \mathrm{ctg}\varphi$ отсутствуют поверхностные нагрузки. В этом случае граничные условия на боковой поверхности запишутся таким образом [1]:

$$\sigma_1(y_1) y_1 = \sigma_{13}(y_1), \quad \sigma_{13}(y_1) y_1 = \sigma_3(y_1) \tag{1.5}$$

Условие равенства нулю равнодействующей силы, действующей на концах $x = x_0, x = X$ имеет вид

$$\int_0^{x\,\mathrm{tg}\varphi} \sigma_3 r dr = 0 \tag{1.6}$$

Ищется решение, ограниченное при $y \to \infty$ $(r \to 0)$. В этом случае при выполнении вторых равенств из (1.3) и (1.5) условие (1.6) выполняется автоматически.

Второе уравнение совместности деформаций преобразуем в соотношение

$$\varepsilon_3' y = -\varepsilon_1' y^{-1} - \varepsilon_{13}' \tag{1.7}$$

Учитывая малый угол φ, решение уравнений (1.1), (1.3), (1.7) и первого уравнения (1.4) ищем в виде рядов [3]

$$\sigma_i = D_1 y^{-\omega+1} \sum a_{i,m} y^{-2m} + B_i / [(1-\nu^2)(\omega^2-1)], \quad i = 1,2,3$$
$$\sigma_{13} = D_1 y^{-\omega} \sum a_{4,m} y^{-2m}$$
$$B_1 = B_2 = -[P + (\nu - k\nu')D_2], \quad B_3 = D_2(k-1) - (\nu + k\nu')P$$
$$P = E_2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T, \quad \omega = [(k - (k\nu')^2)/(1-\nu^2)]^{1/2}$$
$$a_{1,0} = 1, \quad a_{2,0} = \omega, \quad a_{3,0} = \nu\omega + k\nu', \quad a_{4,0} = a_{3,0}(\omega-1)/(\omega+1)$$

D_1, D_2 – неопределенные постоянные, суммирование здесь и далее ведется по m от 0 до ∞.

Заметим, что для материала с ярко выраженной анизотропией можно считать, что $\omega > 1$ при $k > 1$.

Метод нахождения величин φ и $a_{i,0}$ $(i = 1,...4)$ будет изложен ниже.

Коэффициенты $a_{j,m}$ $(j = 1,...4;\ m \geqslant 1)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$(\omega+2m)a_{1,m} - a_{2,m} = (\omega+2m-2)a_{4,m-1}$$
$$(\omega+2m)(-k\nu' a_{1,m} + a_{2,m} - \nu a_{3,m}) - k a_{1,m} + k\nu'(a_{2,m} + a_{3,m}) = 0$$
$$(\omega+2m-1)(-k\nu' a_{1,m} - \nu a_{2,m} + a_{3,m}) =$$
$$= -(\omega+2m-3)k\{a_{1,m-1} - \nu'(a_{2,m-1} + a_{3,m-1})\} - (\omega+2m-2)\gamma a_{4,m-1}$$
$$(\omega+2m+1)a_{4,m} = (\omega+2m-1)a_{3,m}$$

Если в рядах $\Sigma a_{i,m} y^{-2m}$ удержать только первые члены $a_{i,0}$, получим асимптотическое решение задачи. Оно удовлетворяет второму соотношению (1.3), первому уравнению (1.4) и уравнениям

$$-\sigma_1' y + \sigma_1 - \sigma_2 = 0, \quad E_2 \varepsilon_3 = D_2 + E_2 \alpha_2 \Delta T$$

которые являются асимптотическими приближениями при $y \to \infty$ соответственно первого уравнения (1.3) и соотношения (1.7).

Указанная система уравнений легко интегрируется, в результате определяются коэффициенты $a_{i,0}$ ($i = 1,...,4$) с точностью до постоянного множителя D_1 и величина ω.

Постоянные D_1 и D_2 находятся из граничных условий (1.5).

Особенность полученного решения описывается множителем перед знаком суммы ряда. В частности, записав решение задачи в естественной переменной $\xi = y^{-1}$, получим, что в точке $\xi = 0$ при $1 < \omega < 2$ производные $d\sigma_i/d\xi$ ($i = 1, 2, 3$) стремятся к бесконечности.

2. Конус под действием осевой силы. Исследуется напряженное состояние упругого конуса ($\operatorname{tg} \varphi \ll 1$) из трансверсально-изотропного материала под действием противоположно направленных осевых сил Q, приложенных на торцах $x = x_0 \geqslant 0$, $x = X > x_0$.

Связь между напряжениями и деформациями задается соотношениями (1.1). Как и в разд. 1 рассматривается случай $k > 1$ ($\omega > 1$).

Решение задачи ищем в форме

$$\sigma_i = x^{-2} p_i(y), \quad \varepsilon_i = x^{-2} e_i(y), \quad i = 1,2,3$$
$$\sigma_{13} = x^{-2} p_{13}(y), \quad \varepsilon_{13} = x^{-2} e_{13}(y), \quad y = x/r \qquad (2.1)$$

Запишем уравнения равновесия и совместности деформаций при учете (2.1)

$$-p_1' y + p_1 - p_2 + (p_{13} y^{-2})' y^2 = 0$$
$$-p_{13}' y + p_{13} - 2p_3 y^{-1} + p_3' = 0 \qquad (2.2)$$

$$-e_2' y + e_2 - e_1 = 0$$
$$y^2 (e_2 y^{-2})'' = (e_{13} y^{-2})' y^2 + e_3' y \qquad (2.3)$$

Граничные условия на боковой поверхности конуса заданы соотношениями (1.5).

На концах конуса $x = x_0$, $x = X$ действуют противоположные по знаку осевые силы Q:

$$2\pi \int_0^{x\operatorname{tg}\varphi} \sigma_3 r dr = Q$$

Последнее условие при учете (2.1) запишем в форме

$$2\pi \int_0^{\operatorname{ctg}\operatorname{tg}\varphi} p_3 y^{-3} dy = -Q \qquad (2.4)$$

Второе уравнение равновесия (2.2) и второе граничное условие (1.5) тождественно выполняются, если положить

$$\sigma_3 = y \sigma_{13} \qquad (2.5)$$

Второе уравнение совместности (2.3) преобразуем в соотношение

$$y\{-y^{-3}(e_2 + e_1) - e_{13} y^{-2}\}' = e_3' \qquad (2.6)$$

Учитывая малый геометрический параметр конуса $\operatorname{tg} \varphi \ll 1$, решение первых уравнений из (2.2) и (2.3) и уравнений (2.5), (2.6) ищем в виде рядов

$$p_i = D_1 y^{-\omega+1} \sum a_{i,m} y^{-2m} + D_2 \sum b_{i,m} y^{-2m}, \quad i = 1,2,3$$

$$p_{13} = D_1 y^{-\omega} \sum a_{4,m} y^{-2m} + D_2 y^{-1} \sum b_{4,m} y^{-2m}$$

где D_1, D_2 – постоянные.

$\xi/\mathrm{tg}\,\varphi$	σ_1^*	σ_2^*	σ_3^*	$10^2\times\sigma_{13}^*$	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_{13}^*
0	0,5114	0,5114	0,2276	0	2,045	2,045	40,90	0
0,5	0,2032	–0,0243	–0,0340	–0,632	1,154	–0,265	35,43	4,428
1	–0,0044	–0,3821	–0,0700	–1,748	1,599	–0,750	25,58	6,394

Асимптотическое решение

$$p_i = D_1 y^{-\omega+1} a_{i,0} + D_2 b_{i,0}, \quad p_{13} = D_1 y^{-\omega} a_{4,0} + D_2 y^{-1} b_{4,0}$$

находится из первого уравнения (2.3), соотношения (2.5) и уравнений

$$-p_1' y + p_1 - p_2 = 0, \quad E_2 e_3 = D_2$$

Последние два соотношения являются асимптотическими приближениями при $y \to \infty$ соответственно первого уравнения (2.2) и уравнения (2.6).

При интегрировании этой системы уравнений получим

$$a_{1,0} = 1, \ a_{2,0} = \omega, \ a_{3,0} = \nu\omega + k\nu', \ a_{4,0} = a_{3,0}$$

$$b_{1,0} = b_{2,0} = -\frac{\nu - k\nu'}{(1-\nu^2)(\omega^2-1)}, \quad b_{3,0} = b_{4,0} = \frac{k-1}{(1-\nu^2)(\omega^2-1)}$$

$$\omega = [(k-(k\nu')^2)/(1-\nu^2)]^{1/2}$$

Коэффициенты $a_{j,m} (m \geqslant 1)$ определяются рекуррентным образом через коэффициенты $a_{i,m-1} (i = 1,...,4)$. Аналогично, $b_{j,m} (m \geqslant 1)$ вычисляются через величины $b_{i,m-1} (i = 1,...,4)$. Чтобы получить эти рекуррентные соотношения, следует подставить выписанное выше решение $p_i(y)$ $(i = 1, 2, 3)$, $p_{13}(y)$ в уравнения (2.2), (2.6) и первое уравнение из (2.3).

3. Результаты расчетов. Расчеты проводились при $k = 3$, $\nu = 0{,}2$, $k\nu' = 0{,}3$, $\gamma = 6$, $\mathrm{tg}\,\varphi = 0{,}25$ и различных значениях L (номер члена, на котором обрываются суммы рядов).

В столбцах 2–5 таблицы приведены величины безразмерных температурных напряжений $\sigma_i^* = \sigma_i/|P| (i = 1,2,3)$, $\sigma_{13}^* = \sigma_{13}/|P|$ в точках $\xi = 0$, $0{,}5\,\mathrm{tg}\varphi$, $\mathrm{tg}\,\varphi (\xi = y^{-1})$ для случая $\alpha_1 > \alpha_2$, $\Delta T = \mathrm{const} < 0$.

Заметим, что при $L \geqslant 5$ результаты практически совпадают.

Напряжения монотонно убывают по координате ξ.

В таблице также приведены величины автомодельных функций $p_i^* = p_i \times 2\pi/Q$ $(i = 1,2,3)$, $p_{13}^* = p_{13} \times 2\pi/Q$.

При $L \geqslant 11$ результаты расчетов этих функций практически совпадают.

Функции p_2, p_3 монотонно убывают по координате ξ; функция p_1 достигает минимальное значение в точке $\xi \approx 0{,}5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
2. *Панферов И.В.* Напряжения в упругих конусообразных трубах из трансверсально-изотропных материалов со сферической анизотропией при температурном и силовом нагружениях // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 1012–1016.
3. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.III.1993