ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 58, Вып. 1 1994

УДК 539:3:534.1

© 1994 г. А.А. Локшин

ГОЛОВНАЯ ВОЛНА НА ГРАНИЦЕ ДВУХ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ. СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА

Строится прифронтовая асимптотика для отраженной и головной волн в задаче об отражении цилиндрической сдвиговой горизонтально поляризованной волны (так называемой SH-волны) от границы раздела двух склеенных между собой однородных изотропных наследственно-упругих полупространств, причем ядра наследственности предполагаются регулярными. Эта задача решается здесь обобщенным методом Каньяра – Хупа (КХ), представляющим собой усовершенствованный вариант подхода, предложенного в [1]. В отличие от [1], в предлагаемом здесь обобщении метода КХ не требуется, чтобы в слоистой среде функции памяти были одинаковы для всех слоев.

В чисто упругом случае решение этой же задачи было получено [2] классическим методом КХ. Следует отметить, что результаты настоящей работы можно было бы получить и иным способом, опираясь на результаты [3], где построена высокочастотная асимптотика потенциалов отраженной и преломленной волн для случая гармонического источника. Однако приводимый в настоящей заметке прямой вывод прифронтовых асимптотик, основанный на обобщении метода КХ, оказывается более простым.

1. Рассмотрим в пространстве xyz (ось z направлена вертикально вниз) два однородных изотропных наследственно-упругих полупространства, жестко соединенных между собой вдоль поверхности $z = 0$. Напомним, что в однородной изотропной наследственно-упругой среде операторный модуль сдвига μ^* определяет (в случае чистого сдвига) следующую связь между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_{ik} = 2\mu^*\varepsilon_{ik} = 2\mu^0(1-Q(t)*)\varepsilon_{ik}$$

Здесь $\mu^0 = \mathrm{const}$ – мгновенный модуль сдвига, $Q(t)$ – сдвиговое ядро релаксации, равное нулю при $t < 0$, звездочка на строке означает свертку по t (используются обозначения работы [1]).

Итак, будем считать, что полупространство $z < 0$ обладает плотностью ρ_1 и сдвиговым модулем $\mu_1^* = \mu_1^0(1-Q_1(t)*)$, а полупространство $z > 0$ – плотностью ρ_2 и сдвиговым модулем $\mu_2^* = \mu_2^0(1-Q_2(t)*)$. Ядра релаксации $Q_j(t) \geqslant 0$ считаем регулярными, т.е. обладающими конечными пределами при $t \to +0$. При этом предполагаем, что при $t > 0$ справедливы разложения

$$Q_j(t) = Q_j(0) + \sum_{k\geqslant 1} \kappa_{jk}t^k$$

(здесь и в дальнейшем для краткости пишем $Q_j(0)$ вместо $Q_j(+0)$).

Пусть в верхнем полупространстве действует линейный источник

$$f = (0, A\delta(x)\delta(z-z_0)\delta(t), 0); \quad z_0 < 0$$

Такой источник возбуждает только y-компоненту смещения (которую обозначим через υ). Ясно, что в рассматриваемой задаче $\upsilon = \upsilon(x, z, t)$. Уравнения для υ в соответствующих полупространствах имеют вид

$$\rho_1 \partial^2 \upsilon / \partial t^2 = A\delta(x)\delta(z - z_0)\delta(t) + \mu_1^* \Delta\upsilon, \quad z < 0 \tag{1.1}$$

$$\rho_2 \partial^2 \upsilon / \partial t^2 = \mu_2^* \Delta\upsilon, \quad z > 0$$

где Δ – оператор Лапласа по x, z. При этом считаем, что

$$\upsilon = 0 \text{ при } t < 0 \tag{1.2}$$

Далее, напряжение σ_{yz} связано со смещением υ формулами

$$\sigma_{yz} = \mu_1^* \partial\upsilon / \partial z, \quad z < 0; \quad \sigma_{yz} = \mu_2^* \partial\upsilon / \partial z, \quad z > 0$$

Поэтому условие непрерывности напряжений на границе $z = 0$ принимает вид

$$\mu_1^* \partial\upsilon / \partial z|_{z=0-} = \mu_2^* \partial\upsilon / \partial z|_{z=0+} \tag{1.3}$$

Наконец, условие непрерывности смещений имеет вид

$$\upsilon|_{z=0-} = \upsilon|_{z=0+} \tag{1.4}$$

2. Применим двойное преобразование Фурье – Лапласа $x, t \to \xi, s$ к задаче (1.1)–(1.4):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} dx \int_{0}^{\infty} e^{-st} dt$$

В результате задача (1.1)–(1.4) сводится к сшивке решений обыкновенных дифференциальных уравнений по z. Можно проверить, что решение этой задачи имеет вид

$$\upsilon(\xi, z, s) = \begin{cases} \dfrac{A}{2\mu_1(s) n_1} \exp[-n_1 |z - z_0|] + \upsilon_{\text{ref}}(\xi, z, s), & z < 0 \\ \upsilon_{\text{tr}}(\xi, z, s), & z > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\upsilon_{\text{ref}}(\xi, z, s) = \frac{k_{\text{ref}} A}{2\mu_1(s) n_1} \exp[n_1(z + z_0)], \quad \upsilon_{\text{tr}}(\xi, z, s) = \frac{k_{\text{tr}} A}{2\mu_1(s) n_1} \exp[-(n_2 z + n_1 z_0)]$$

Здесь

$$n_j = (\xi^2 + s^2 / \beta_j^2(s))^{1/2}, \quad \operatorname{Re} n_j \geqslant 0$$

$$\beta_j(s) = (\mu_j(s) / \rho_j)^{1/2}, \quad \mu_j(s) = \mu_j^0 (1 - Q_j(s)); \quad j = 1, 2 \tag{2.2}$$

$$k_{\text{ref}} = \frac{\mu_1(s) n_1 - \mu_2(s) n_2}{\mu_1(s) n_1 + \mu_2(s) n_2}, \quad k_{\text{tr}} = \frac{2\mu_1(s) n_1}{\mu_1(s) n_1 + \mu_2(s) n_2}$$

(k_{ref}, k_{tr} – коэффициенты отражения и прохождения).

Ниже понадобятся также обозначения для мгновенно-упругих скоростей сдвиговых волн $\beta_j^0 = (\mu_j^0 / \rho_j^0)^{1/2}$. Ясно, что

$$\beta_j(s) = \beta_j^0 (1 - Q_j(s))^{1/2} \tag{2.3}$$

В дальнейшем будем рассматривать случай

$$\beta_2^0 > \beta_1^0 \tag{2.4}$$

который в поставленной задаче отвечает возникновению головных волн. Из (2.4), очевидно, следует

$$\beta_2(s) > \beta_1(s) \quad \text{при } s \to +\infty \tag{2.5}$$

3. Ограничимся исследованием волны, отраженной от границы в полупространство $z < 0$, т.е. изучением функции $\upsilon_{ref}(\xi,z,s)$ определенной в (2.1). Применим к выражению для $\upsilon_{ref}(\xi,z,s)$ обратное преобразование Фурье по x. Далее, введем лучевой параметр p по той же формуле, что и чисто упругом случае [2]: $\xi = isp$. Теперь, используя обозначения

$$\eta_j = (\beta_j^{-2}(s) - p^2)^{1/2}, \quad \mathrm{Re}\,\eta_j \geqslant 0$$

заметим, что (при чисто мнимом p) вещественная часть подынтегрального выражения для $\upsilon_{ref}(x,z,s)$ – четная функция p, а мнимая часть – нечетная функция p. Поэтому получим

$$\upsilon_{ref}(x,z,s) = \mathrm{Im}\int\limits_0^{i\infty} \frac{\Phi(\mu_j(s),\eta_j)}{\eta_1}\exp[-s(px+\eta_1|z+z_0|)]dp$$
$$\Phi(\alpha_j,\beta_j) \equiv \frac{A}{2\pi\alpha_1}\,\frac{\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2} \tag{3.1}$$

Отметим также, что в дальнейшем при деформировании контура интегрирования в (3.1) придется учитывать разрезы

$$1/\beta_1(s) \leqslant p < \infty, \quad 1/\beta_2(s) \leqslant p < \infty \tag{3.2}$$

проведенные вдоль оси $\mathrm{Re}\,p$ и связанные с требованием $\mathrm{Re}\,\eta_1 \geqslant 0$, $\mathrm{Re}\,\eta_2 \geqslant 0$.

4. Введем вещественную переменную τ, $0 < \tau < \infty$, и при каждом $s = \mathrm{const} > 0$ рассмотрим уравнение

$$\tau = px + \eta_1|z+z_0| \tag{4.1}$$

Можно показать, что одно из решений уравнения (4.1) относительно p имеет вид

$$p_s = R_0^{-2}[x\tau + \kappa|z+z_0|\cdot|R_0^2/\beta_1^2(s) - \tau^2|^{1/2}]$$
$$\kappa = \begin{cases} -1, & 0 < \tau \leqslant R_0/\beta_1(s) \\ i, & \tau > R_0/\beta_1(s) \end{cases} \tag{4.2}$$
$$R_0 = [x^2 + (z+z_0)^2]^{1/2}$$

Величины x, z рассматриваются здесь как фиксированные параметры, параметр $s > 0$ также фиксирован. Контур $p = p_s(\tau)$, определяемый формулами (4.2), будем называть обобщенным контуром Каньяра для υ_{ref}. Переменная τ играет (4.2) такую же роль, как время t в соответствующих формулах классического метода КХ для чисто упругих сред. Отметим, что в (4.2) "подобная времени" переменная τ и переменная Лапласа s входят одновременно.

Обозначим часть обобщенного контура Каньяра (4.2), лежащую в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p \geqslant 0$, через C_s. Как и в классическом методе КХ [2], заключаем, что формулу (3.1) можно переписать в виде

$$\upsilon_{ref}(x,z,s) = \mathrm{Im}\int\limits_{C_s} \frac{\Phi(\mu_j(s),\eta_j)}{\eta_1}dp_s(\tau) \tag{4.3}$$

5. Пусть, для определенности, $x > 0$. Тогда из (4.2) видно, что контур C_s отходит от оси $\mathrm{Re}\,p$ в точке

$$\bar{p}_s = x/(R_0\beta_1(s)) > 0 \tag{5.1}$$

Предположим, что

$$x / R_0 < \beta_1^0 / \beta_2^0 \tag{5.2}$$

Тогда при больших $s > 0$ точка (5.1) лежит левее концов обоих разрезов (3.2), проведенных в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, т.е.

$$x / (R_0 \beta_1(s)) < 1 / \beta_2(s) < 1 / \beta_1(s), \quad s \to +\infty$$

Как показано ниже, выполнение неравенства (5.2) означает, что x меньше критического расстояния, на котором наблюдается головная волна.

Если условие (5.2) выполнено, то при больших $s > 0$ на части C_s, лежащей на оси $\operatorname{Re} p$, подынтегральное выражение в (4.3) вещественно и, следовательно, не дает вклада в выражение для υ_{ref}. Таким образом, при больших $s > 0$ можно считать, что в (4.3) $\tau > R_0 / \beta_1(s)$. Далее, имеем

$$dp_s / d\tau = i\eta_1 [\tau^2 - R_0^2 / \beta_1^2(s)]^{-1/2} \quad \text{при} \quad \tau > R_0 / \beta_1(s) \tag{5.3}$$

Поэтому при больших $s > 0$ (4.3) приобретает вид

$$\upsilon_{\text{ref}}(x,z,s) = \int\limits_{R_0/\beta_1(s)}^{\infty} \operatorname{Re}\Phi(\mu_j(s), \eta_j) \frac{e^{-s\tau} d\tau}{(\tau^2 - R_0^2 / \beta_1^2(s))^{1/2}} \tag{5.4}$$

6. Вычислим теперь прифронтовую асимптотику $\upsilon_{\text{ref}}(x,z,t)$, считая условие (5.2) выполненным. Для этого сделаем в (5.4) замену

$$\tau \to \tau \beta_1^0 / \beta_1(s) \tag{6.1}$$

В силу (2.3)

$$\exp[-s\tau\beta_1^0 / \beta_1(s)] = e^{-s\tau} \exp[-\tau Q_1(0)/2](1 + O(s^{-1}))$$

Теперь из (5.4) получаем

$$\upsilon_{\text{ref}}(x,z,s) \sim \int\limits_{R_0/\beta_1^0}^{\infty} \operatorname{Re}\Phi(\mu_j^0, \eta_j^0(\tau)) \frac{\exp[-\tau Q_1(0)/2]}{[\tau^2 - R_0^2 / (\beta_1^0)^2]^{1/2}} e^{-s\tau} d\tau$$

$$s \to +\infty \tag{6.2}$$

$$\eta_j^0(\tau) \equiv [(\beta_j^0)^{-2} - p_\infty^2(\tau)]^{1/2}$$

Руководствуясь теоремой единственности для представления преобразования Лапласа, заключаем, что вблизи фронта отраженной волны (т.е. при $t \to R_0 / \beta_1^0 + 0$)

$$\upsilon_{\text{ref}}(x,z,t) \sim \operatorname{Re}\Phi(\mu_j^0, \eta_j^0(t)) \frac{\exp[-Q_1(0) R_0 / (2\beta_1^0)]}{[t^2 - R_0^2 / (\beta_1^0)^2]^{1/2}} \tag{6.3}$$

Видно, что экспоненциальный множитель, определяющий затухание на фронте, не содержит величины $Q_2(0)$. Тем самым выражение (6.3) соответствует волне, распространяющейся только в полупространстве $z < 0$.

7. Пусть теперь

$$x / R_0 > \beta_1^0 / \beta_2^0 \tag{7.1}$$

Тогда точка $\bar{p}_s$, в которой контур C_s отходит от оси $\operatorname{Re} p$ (см. (5.1)), удовлетворяет неравенствам

$$1/\beta_2(s)<\overline{p}_s=x/R_0\beta_1(s)<1/\beta_1(s),\quad s\to+\infty \tag{7.2}$$

т.е. при больших $s>0$ лежит между концами разрезов (3.2), расположенными в полуплоскости $\operatorname{Re} p>0$. Тогда при больших $s>0$ на прямолинейной части $[1/\beta_2(s),\overline{p}_s]$ контура C_s величина $\eta_2=[\beta_2^{-2}(s)-p^2]^{1/2}$ оказывается чисто мнимой. На указанной части контура C_s, в отличие от (5.3), имеем при больших $s>0$:

$$dp_s/d\tau=\eta_1[R_0^2/\beta_1^2(s)-\tau^2]^{-1/2} \tag{7.3}$$

Теперь, подставляя (5.3) и (7.3) в (4.3), получаем при больших $s>0$

$$\upsilon_{\text{ref}}(x,z,s)=\operatorname{Im}\int\limits_{\tau_s}^{\infty}\Phi(\mu_j(s),\eta_j)\,\frac{e^{-s\tau}}{[R_0^2/\beta_1^2(s)-\tau^2]^{1/2}} \tag{7.4}$$

Здесь величина τ_s определяется из (4.1), где p нужно заменить на $1/\beta_2(s)$:

$$\tau_s=x/\beta_2(s)+[\beta_1^{-2}(s)-\beta_2^{-2}(s)]^{1/2}|z+z_0| \tag{7.5}$$

Кроме того, при $\tau>R_0/\beta_1(s)$ по определению считаем

$$[R_0^2/\beta_1^2(s)-\tau^2]^{1/2}=i[\tau^2-R_0^2/\beta_1^2(s)]^{1/2} \tag{7.6}$$

Введем теперь обозначение

$$\tau_0=x/\beta_2^0+[(\beta_1^0)^{-2}-(\beta_2^0)^{-2}]^{1/2}|z+z_0|$$

(Как будет видно ниже, $t=\tau_0$ является временем прихода головной волны в точку (x, y, z).) Замена $\tau\to\tau\tau_s/\tau_0$ при $s\to+\infty$ переводит соотношение (7.4) в

$$\upsilon_{\text{ref}}(x,z,s)\sim\int\limits_{\tau_0}^{\infty}\operatorname{Im}\{\Phi(\mu_j^0,\eta_j^0(\tau))[R_0^2/(\beta_1^0)^2-\tau^2]^{-1/2}\}\exp(-s\tau\tau_s/\tau_0)d\tau \tag{7.7}$$

Теперь, учитывая, что при больших $s>0$

$$\beta_2^0\tau_s=\beta_2^0\tau_0+(2s)^{-1}Q_2(0)\{x-|z+z_0|[(\beta_2^0/\beta_1^0)^2-1]^{-1/2}\}+$$
$$+(2s)^{-1}Q_1(0)(\beta_2^0/\beta_1^0)^2[(\beta_2^0/\beta_1^0)^2-1]^{-1/2}+O(s^{-2}),$$

получаем из (7.7) искомую прифронтовую асимптотику головной волны ($t\to\tau_0+0$):

$$\upsilon_{\text{ref}}(x,z,t)\sim\operatorname{Im}\{\Phi(\mu_j^0,\eta_j^0(t))[R_0^2/(\beta_1^0)^2-t^2]^{-1/2}\}\times$$
$$\times\exp\{-(2\beta_2^0)^{-1}Q_2(0)[x-|z+z_0|((\beta_2^0/\beta_1^0)^2-1)^{-1/2}]- \tag{7.8}$$
$$-(2\beta_1^0)^{-1}Q_1(0)|z+z_0|(1-(\beta_1^0/\beta_2^0)^2)^{-1/2}\}$$

Здесь считаем $x>0$; кроме того считается выполненным соотношение (7.6). Очевидно, что (7.8), в отличие от (6.3), представляет собой волну, прошедшую по обеим средам. Ясно, что расстояние, пройденное этой волной по нижней среде, равно $x-|z+z_0|((\beta_2^0/\beta_1^0)^2-1)^{-1/2}$.

8. Наконец, интересен случай, когда $\beta_1^0=\beta_2^0$, но $\beta_1(s)<\beta_2(s)$, например на луче $s_0<s<\infty$. Пусть, для определенности, $x>0$. Ясно, что всегда $x/R_0<1$. Тем самым реализуется случай (5.2), в то время как случай (7.1) невозможен, т.е. в рассматриваемой задаче головная волна отсутствует.