УДК 539.375

© 1994г. И.М. Лавит

ГРАНИЧНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЫ

Рассматривается задача вычисления коэффициентов интенсивности напряжений для тела с поверхностной трещиной в плоской постановке. Поперечное сечение тела, содержащего трещину, конформно отображается на область, в которой комплексные потенциалы голоморфны всюду, включая кончик трещины. Показано, что их определение сводится к решению граничного интегрального уравнения типа Мусхелишвили. Приводятся алгоритм численного решения этого уравнения и результаты решения ряда задач для конечных и бесконечных областей.

В предыдущих работах [1–3] эта задача сводилась к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода для производной скачка перемещений на линии трещины. Ниже предлагается альтернативный метод, позволяющий свести задачу к граничному интегральному уравнению, близкому по структуре к известному уравнению Мусхелишвили [4].

1. Рассмотрим односвязную (конечную или бесконечную) область D, представляющую собой поперечное сечение тела с поверхностной трещиной. Область D ограничена кусочно-гладким контуром Г, часть которого является контуром трещины, в общем случае криволинейной (фиг. 1).

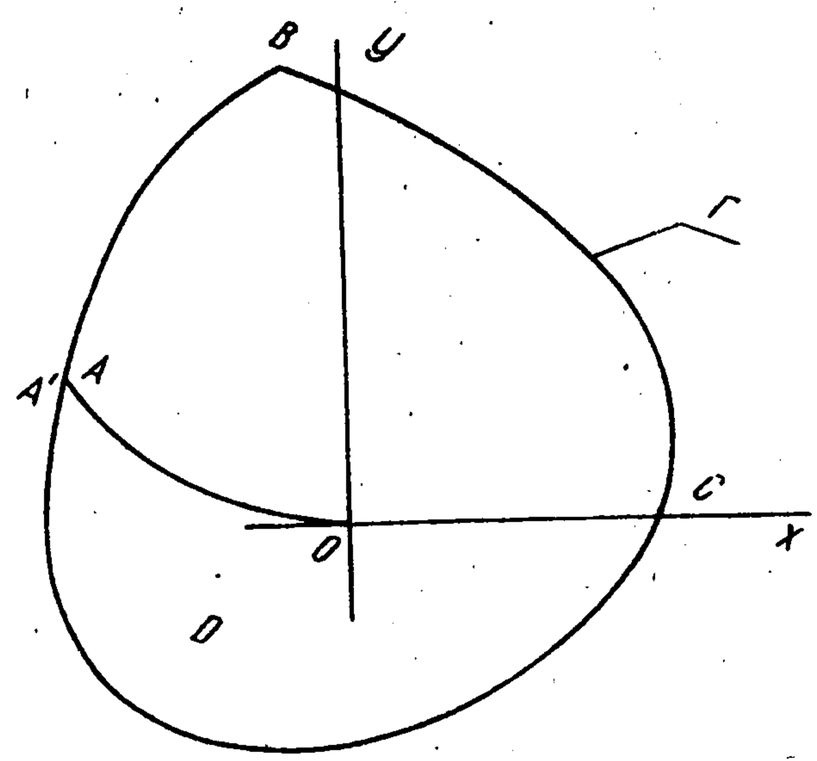
Так как в данном случае не представляет интереса напряженное состояние в непосредственной близости угловых точек контура, отличных от кончика трещины (точки A, A', B на фиг. 1), можно сгладить контур в окрестности этих точек, например сопрягая гладкие участки контура окружностями малого радиуса r. Таким образом, без потери общности можно считать, что область D ограничена контуром Г, гладким повсюду за исключением кончика трещины.

Поместим начало координат в кончик трещины и направим ось абсцисс по касательной к линии трещины в направлении ее роста. Напряженное состояние в области D определяется [4] двумя функциями комплексной переменной (комплексными потенциалами) $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, где $\zeta = x + iy$, удовлетворяющими на контуре Г уравнению

$$\overline{\varphi(\tau)} + \bar{\tau}\varphi'(\tau) + \psi(\tau) = \overline{f(\tau)} \quad \left(f(\tau) = i\int_0^{s(\tau)} (p_x + ip_y)\, ds \right) \tag{1.1}$$

где τ – комплексная координата точки контура, s – длина дуги контура, p_x, p_y – компоненты вектора поверхностной нагрузки.

Если трещины нет, то функции φ и ψ аналитичны в области D, включая ее границу [4], и в этом случае их можно найти, решив, например, граничное интегральное уравнение Мусхелишвили [4]. При наличии трещины ее кончик является точкой возврата, следовательно, уравнение Мусхелишвили неприменимо [4]. Функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ неана-



Фиг. 1

литичны в кончике трещины. Их можно представить следующим образом [5]:

$$\varphi(\zeta)=\sqrt{\zeta}\,\varphi_0(\zeta)+\varphi_1(\zeta),\quad \psi(\zeta)=\sqrt{\zeta}\,\psi_0(\zeta)+\psi_1(\zeta) \tag{1.2}$$

где $\varphi_0(\zeta)$, $\varphi_1(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$, $\psi_1(\zeta)$ – функции, аналитические в области D, включая граничный контур.

Попытаемся получить для определения функций φ и ψ интегральное уравнение, аналогичное уравнению Мусхелишвили. Пусть $\zeta=\omega(z)$ – конформное отображение области D на область E, такое, что комплексные потенциалы φ и ψ аналитичны в области E, включая ее граничный контур L. Уравнение (1.1) преобразуется при этом так [4]:

$$\overline{\varphi(t)}+[\overline{\omega(t)}/\omega'(t)]\,\varphi'(t)+\psi(t)=\overline{f(t)} \tag{1.3}$$

где t – комплексная координата точки контура L.

Будем искать потенциалы φ и ψ в виде произведения функций, аналитических в области E (включая граничный контур)

$$\varphi(z)=\Omega(z)\,\vartheta(z),\quad \psi(z)=\Omega(z)\,\chi(z) \tag{1.4}$$

где $\Omega(z)$ – заданная функция (ее вид будет определен ниже), ϑ, χ – новые неизвестные задачи. Получим вместо (1.3) следующее соотношение:

$$F_1(t,\bar t)\,\overline{\vartheta(t)}+F_3(t,\bar t)\,\vartheta(t)+F_2(t,\bar t)\,\vartheta'(t)+\chi(t)=F_0(t,\bar t) \tag{1.5}$$

$$F_1(t,\bar t)=\overline{\Omega(t)}/\Omega(t),\quad F_2(t,\bar t)=\overline{\omega(t)}/\omega'(t)$$

$$F_3(t,\bar t)=F_2(t,\bar t)\,\Omega'(t)/\Omega(t),\quad F_0(t,\bar t)=\overline{f(t)}/\Omega(t)$$

Дальнейшие рассуждения совпадают с соответствующими рассуждениями Мусхелишвили. Пусть $z\notin E$. Тогда, выражая $\chi(t)$ из уравнения (1.5), получим

$$\chi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\chi(\xi)\,d\xi}{\xi-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_L[F_0(\xi,\bar\xi)-F_1(\xi,\bar\xi)\,\overline{\vartheta(\xi)}- \tag{1.6}$$

$$-F_3(\xi,\bar\xi)\,\vartheta(\xi)-F_2(\xi,\bar\xi)\,\vartheta'(\xi)]\frac{d\xi}{\xi-z}=0$$

Пусть теперь $z\to t$, оставаясь все время вне области E. Используя формулы Сохоцкого–Племеля и соотношения

$$\vartheta(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\vartheta(\xi)\,d\xi}{\xi-t},\quad \vartheta'(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\vartheta'(\xi)\,d\xi}{\xi-t} \tag{1.7}$$

справедливые в силу аналитичности функции ϑ, после интегрирования по частям получим сингулярное интегральное уравнение второго рода относительно функции ϑ

$$F_1(t,\bar t)\left[\overline{\vartheta(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\vartheta(\xi)}\,d\bar\xi}{\bar\xi-\bar t}\right]+F_3(t,\bar t)\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\vartheta(\xi)\,d\xi}{\xi-t}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_1(\xi,\bar\xi)\,\overline{\vartheta(\xi)}\,d\xi}{\xi-t}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_3(\xi,\bar\xi)\,\vartheta(\xi)\,d\xi}{\xi-t}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \vartheta(\xi)\,d\,\frac{F_2(t,\bar t)-F_2(\xi,\bar\xi)}{\xi-t}=\frac{F_0(t,\bar t)}{2}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F_0(\xi,\bar\xi)\,d\xi}{\xi-t} \tag{1.8}$$

Выражая коэффициенты интенсивности напряжений K_{I} и K_{II} через комплексный потенциал $\varphi(\zeta)$ [6] и используя соотношение (1.4), получим

$$K_{\mathrm{I}}-iK_{\mathrm{II}}=2\sqrt{2\pi}\lim_{\zeta\to 0}[\zeta^{1/2}\varphi'(\zeta)]=2\sqrt{2\pi}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{[\omega(z)]^{1/2}}{\omega'(z)}[\Omega(z)\,\vartheta(z)]'\right\} \tag{1.9}$$

где z_0 – координата кончика трещины.

2. Покажем, что решения уравнения (1.8) справедливы не только для точек $z\notin E$, но и для точек $z\in E$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z,\bar z)=F_2(z,\bar z)\,\vartheta'(z)+\chi(z),\quad z\in E \tag{2.1}$$

Используя формулу Коши и соотношение (1.5), получим

$$\Phi(z,\bar z)=F_2(z,\bar z)\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\vartheta'(\xi)\,d\xi}{\xi-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L [F_0(\xi,\bar\xi)-F_1(\xi,\bar\xi)\,\overline{\vartheta(\xi)}- \tag{2.2}$$

$$-F_3(\xi,\bar\xi)\,\vartheta(\xi)-F_2(\xi,\bar\xi)\,\vartheta'(\xi)]\frac{d\xi}{\xi-z}$$

Устремим z к точке контура t (при этом $z\in E$). С учетом непрерывности функции Φ и формул Сохоцкого–Племеля приходим к выражению для $\Phi(t,\bar t)$, после подстановки которого в (1.5) вновь получаем уравнение (1.8). Таким образом, решения полученного уравнения аналитически продолжимы в область E.

3. Исследуем разрешимость уравнения (1.8). Пусть вначале $\Omega(z)=1$. При этом так же, как и уравнение Мусхелишвили, уравнение (1.8) имеет нетривиальные решения при нулевой правой части (собственные функции), иными словами, оно в общем случае неразрешимо. Однако если нагрузки, приложенные к телу, удовлетворяют уравнениям статики, то уравнение (1.8) в силу теоремы существования решения задач теории упругости имеет решение, так как оно тождественно дифференциальному уравнению (1.5). Собственные функции уравнения (1.8) обусловлены поступательным перемещением тела как целого

$$\varphi_0=-\overline{\psi}_0=c_0 \tag{3.1}$$

и жестким вращением

$$\varphi_1=ic_1\zeta,\quad \psi_1=0 \tag{3.2}$$

где c_0 – комплексная, а c_1 – действительная произвольные постоянные [7]. Других собственных функций, в силу теоремы единственности решения задач теории упругости, нет [7].

Наличие собственных функций приводит к неединственности решения уравнения (1.8) при $\Omega(z)=1$. И хотя собственные функции (3.1), (3.2) не влияют на значения

коэффициентов интенсивности напряжений (1.9), неединственность решения может затруднить или даже сделать невозможным процесс решения уравнения (1.8). С целью обеспечить единственность решения и вводится функция $\Omega(z)$ в выражения (1.4). Помимо аналитичности эта функция должна удовлетворять еще одному требованию: обращаться в нуль в какой-либо точке области E или ее граничного контура. Теперь если справедливы равенства (3.1), то собственные функции ϑ_0 и χ_0 определяется выражениями

$$\vartheta_0(z) = c_0 / \Omega(z), \quad \overline{\chi_0(z)} = -c_0 / \overline{\Omega(z)} \tag{3.3}$$

Так как ϑ и χ разыскиваются в классе функций, аналитических в E, включая граничный контур, то решение (3.3) невозможно. Таким образом, введение функции $\Omega(z)$ позволяет исключить собственные функции (3.1).

Для исключения собственных функций (3.2) воспользуемся приемом, аналогичным примененному Д.И. Шерманом к преобразованию уравнения Лауричеллы–Шермана [7]. Прибавим к левой части уравнения (1.5) выражение

$$b[\overline{\omega(t)} / \omega'(t) + \bar{t}] / \Omega(t) \tag{3.4}$$

где b – чисто мнимая постоянная; умножим обе части уравнения на $\omega'(t)\,\Omega(t)$ и проинтегрируем по L. Используя интегрирование по частям, получим

$$2i\,\mathrm{Im}\left[\int_L \overline{\Omega(t)}\,\overline{\vartheta'(t)}\,\omega'(t)\,dt\right] + 2ib\,\mathrm{Im}\left[\int_L \overline{\omega(t)}\,dt\right] = \int_L \overline{f(t)}\,\omega'(t)\,dt \tag{3.5}$$

Если момент внешних сил равен нулю, то [7]

$$\mathrm{Re}\int_L \overline{f(t)}\,\omega'(t)\,dt = 0 \tag{3.6}$$

а следовательно, $b = 0$. Таким образом, при выполнении уравнения статики (3.6) уравнение (1.5) и уравнение, модифицированное указанным выше образом, эквивалентны. Преобразовывая модифицированное уравнение так же, как и уравнение (1.5), приходим к уравнению (1.8) с тем отличием, что к его левой части добавляется слагаемое

$$b\left\{[F_2(t,\bar{t}) + \bar{t}] / [2\Omega(t)] - \frac{1}{2\pi i}\int_L [F_2(\xi,\bar{\xi}) + \bar{\xi}]\frac{d\xi}{\Omega(\xi)(\xi - t)}\right\} \tag{3.7}$$

Определим постоянную b следующим образом:

$$b = i\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Omega(\xi)\,\vartheta(\xi)\,d\xi}{\omega(\xi)(\xi - z_*)}\right] \tag{3.8}$$

где z_* – некоторая внутренняя точка области E. Теперь, если ϑ_1 – собственная функция, получаемая из выражения (3.2)

$$\vartheta_1(z) = ic_1\omega(z) / \Omega(z) \tag{3.9}$$

то из равенства (3.8) следует

$$b = ic_1 = 0 \tag{3.10}$$

Уравнение (1.8) с добавленным слагаемым (3.7) не имеет нетривиальных решений при нулевой правой части, так как при этом вследствие уравнения (3.5) получается $b = 0$.

4. Исходя из сформулированных требований, определим конкретный вид функций $\omega(z)$ и $\Omega(z)$. Рассмотрим вначале случай, когда область D – конечная. Из формул (1.2)

ясно, что комплексные потенциалы φ и ψ – аналитические функции аргумента $\zeta^{1/2}$. Поэтому естественно принять

$$\omega(z) = z^2, \quad \Omega(z) = z \tag{4.1}$$

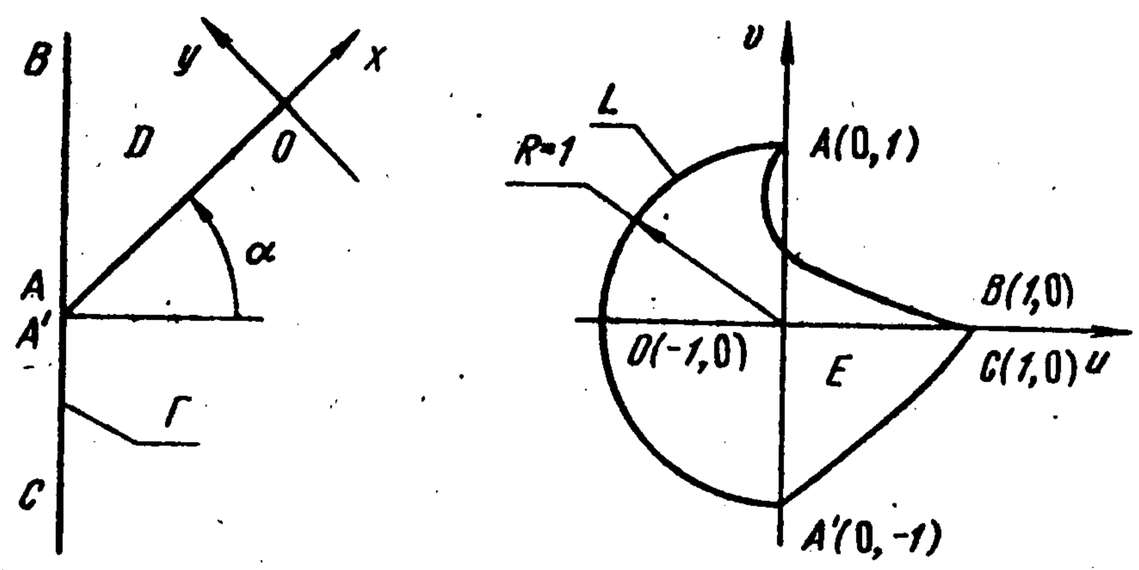
Выбор функции Ω в такой форме равносилен требованию равенства нулю перемещений в кончике трещины. Формула (1.9) при этом принимает вид

$$K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = \sqrt{2\pi}\,\vartheta(0) \tag{4.2}$$

Чтобы найти координаты точек контура L, запишем

$$\tau = Re^{i\theta}, \quad t = \sqrt{\tau} = \sqrt{R}\,e^{i\theta/2} \tag{4.3}$$

Для точек контура Г, начиная с точки C (точка пересечения оси абсцисс с контуром) и до точки A, а также для верхней кромки трещины (участок AO) принимается $\theta > 0$, на остальной части контура ($OA'C$) $\theta < 0$. В результате отображения (4.1) кончик трещины (точка O) оказывается на гладкой части контура L.



Фиг. 2

Рассмотрим случай, когда область D содержит бесконечно удаленную точку. Конформное отображение $\omega(z)$ строится таким образом, чтобы область E была конечной. Такое отображение можно получить, объединяя отображение (4.1) с отображением, переводящим полуплоскость $x > 0$ внутрь круга единичного радиуса

$$\omega(z) = a[(z+1)/(z-1)]^2 \tag{4.4}$$

где a – действительная постоянная.

На фиг. 2 представлен пример отображения (4.4): полуплоскость с наклонной трещиной (область D) отображается на конечную область E, в которой кончик трещины лежит на гладкой части граничного контура. Параметр a принят равным длине трещины. Кромки трещины переходят в полуокружность единичного радиуса; бесконечно удаленная точка отображается в точку $z = 1$. Для того чтобы найти координаты t точек контура, необходимо обратное отображение

$$\tau = [(\sqrt{R}\,e^{i\theta/2} - \sqrt{a})/(\sqrt{R}\,e^{i\theta/2} + \sqrt{a})]; \quad t = Re^{i\theta} \tag{4.5}$$

Для части контура BAO (конечно, и BA, и AO в общем случае могут быть криволинейны) принимается $\theta > 0$, для остальной части контура $\theta < 0$.

Выбор функции Ω определяется следующим условием: в бесконечно удаленной точке должно быть $\varphi = \psi = 0$. Поэтому естественно положить

$$\Omega = z - 1 \tag{4.6}$$

Выражение (1.9) принимает вид

$$K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = 2\sqrt{2\pi / a}\,[\vartheta(-1) - 2\vartheta'(-1)] \tag{4.7}$$

При выбранных выражениях (4.4) и (4.6) для функций $\omega(z)$ и $\Omega(z)$ собственная функция, обусловленная жестким вращением (3.9), неаналитична в точке $z = 1$, т.е. находится вне класса функций, среди которых разыскивается $\vartheta(z)$. Поэтому при решении задач для бесконечных областей нет необходимости в прибавлении к левой части уравнения (1.8) слагаемого (3.4).

5. Уравнение (1.8) естественно решать методом граничных элементов [8]. Получим решение с использованием простейших элементов, внутри которых значения функции ϑ предполагаются постоянными. Пусть граничный контур разбит на n элементов. Внутри каждого j-го элемента выберем точку коллокации t_j. Уравнения (1.8) и (3.8) преобразуются к системе линейных комплексных алгебраических уравнений относительно значений функции ϑ в элементах и постоянной b (всюду далее суммирование ведется по k от $k = 1$ до $k = n$, интегрирование – по контуру L_k)

$$\overline{\vartheta}_j + \sum (A_{jk}\overline{\vartheta}_k + B_{jk}\vartheta_k) + bC_j = F_j; \quad j = 1, \ldots, n \tag{5.1}$$

$$b = i\,\mathrm{Im}\sum G_k\vartheta_k$$

Разделяя действительные и мнимые части, получим систему $2n + 1$ линейных уравнений

$$\vartheta_j^R + \sum [(A_{jk}^R + B_{jk}^R)\,\vartheta_k^R + (A_{jk}^{\mathrm{I}} - B_{jk}^{\mathrm{I}})\,\vartheta_k^{\mathrm{I}}] - b^{\mathrm{I}}C_j^{\mathrm{I}} = F_j^R$$

$$-\vartheta_j^{\mathrm{I}} + \sum [(A_{jk}^{\mathrm{I}} + B_{jk}^{\mathrm{I}})\,\vartheta_k^R + (B_{jk}^R - A_{jk}^R)\,\vartheta_k^{\mathrm{I}}] + b^{\mathrm{I}}C_j^R = F_j^{\mathrm{I}} \tag{5.2}$$

$$b^{\mathrm{I}} = \sum (G_k^{\mathrm{I}}\vartheta_k^R + G_k^R\vartheta_k^{\mathrm{I}})$$

Индексами R и I обозначены соответственно действительные и мнимые части комплексных величин.

Коэффициенты системы определяются формулами

$$A_{jk} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi} - \overline{t}_j} - \frac{1}{F_1(t_j, \overline{t}_j)}\,\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F_1(\xi, \overline{\xi})\,d\xi}{\xi - t_j} \tag{5.3}$$

$$B_{jk} = \frac{F_3(t_j, \overline{t}_j)}{F_1(t_j, \overline{t}_j)}\,\frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\overline{\xi}}{\xi - t_j} - \frac{1}{F_1(t_j, \overline{t}_j)}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F_3(\xi, \overline{\xi})\,d\xi}{\xi - t_j} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int d\left[\frac{F_2(t_j, \overline{t}_j) - F_2(\xi, \overline{\xi})}{\xi - t_j}\right]\right\} \tag{5.4}$$

$$F_j = \frac{1}{F_1(t_j, \overline{t}_j)}\left[\frac{F_0(t_j, \overline{t}_j)}{2} - \frac{1}{2\pi i}\sum \int \frac{F_0(\xi, \overline{\xi})\,d\xi}{\xi - t_j}\right] \tag{5.5}$$

$$C_j = \frac{1}{F_1(t_j, \overline{t}_j)}\left\{\frac{F_2(t_j, \overline{t}_j) + \overline{t}_j}{2\Omega(t_j)} - \frac{1}{2\pi i}\sum \int [F_2(\xi, \overline{\xi}) + \overline{\xi}]\right\}\frac{d\xi}{\Omega(\xi)(\xi - t_j)} \tag{5.6}$$

$$G_k = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Omega(\xi)\,\vartheta(\xi)\,d\xi}{\omega(\xi)(\xi - z_*)} \tag{5.7}$$

При $j = k$ входящие в эти формулы интегралы – сингулярные, но при выборе функ-

ций ω и Ω в виде (4.1), (4.4), (4.6) условия существования главных значений этих интегралов удовлетворяются. Интегрировать можно, например, численно [8]; при выполнении расчетов, результаты которых приведены ниже, все упомянутые интегралы, за исключением первого в формуле (5.3), первого и третьего в формуле (5.4), которые находятся точно, аппроксимировались формулой

$$I_{jk} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g_k(\xi)\, d\xi}{\xi - t_j} \tag{5.8}$$

Для изменения функции g_k внутри элемента принимается линейный закон

$$g_k(\xi) = a_k \xi + b_k \tag{5.9}$$

Коэффициенты a_k, b_k определяются заданием значений функции g_k на границах элемента.

Подстановка выражения (5.9) в формулу (5.8) позволяет получить

$$I_{jk} = [a_k(\xi_{2k} - \xi_{1k}) + (a_k t_j + b_k)\, I]$$

$$I = \begin{cases} \ln[(\xi_{2k} - t_j)/(\xi_{1k} - t_j)], & j \neq k \\ \ln[(\xi_{2k} - t_j)/(\xi_{1k} - t_j)] + \pi i, & j = k \end{cases}$$

где ξ_{1k}, ζ_{2k} – координаты начальной и конечной точек элемента.

Приращение аргумента

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1; \quad r_1 \exp(i\theta_1) = \xi_{1j} - t_j, \quad r_2 \exp(i\theta_2) = \xi_{2j} - t_j$$

выбирается отрицательным. Величина $\vartheta(z_0)$, где z_0 – координата кончика трещины, вычисляется по формуле

$$\vartheta(z_0) = (\vartheta_+ + \vartheta_-)/2$$

где ϑ_+ и ϑ_- – значения функции ϑ в элементах, прилегающих к кончику трещины с противоположных сторон. Такая же формула применяется и для нахождения $\vartheta'(z_0)$, а величины ϑ'_+ и ϑ'_- вычисляются с использованием второго соотношения (1.10).

Пусть

$$\Delta_1 = \vartheta_1 - \vartheta_n; \quad \Delta_j = \vartheta_j - \vartheta_{j-1}, \quad j = 2, \ldots, n$$

где j – номер элемента. Кусочно-постоянную функцию $\vartheta(t)$ можно представить как

$$\vartheta(t) = \vartheta_n + \sum \Delta_k H(t - \xi_{1k})$$

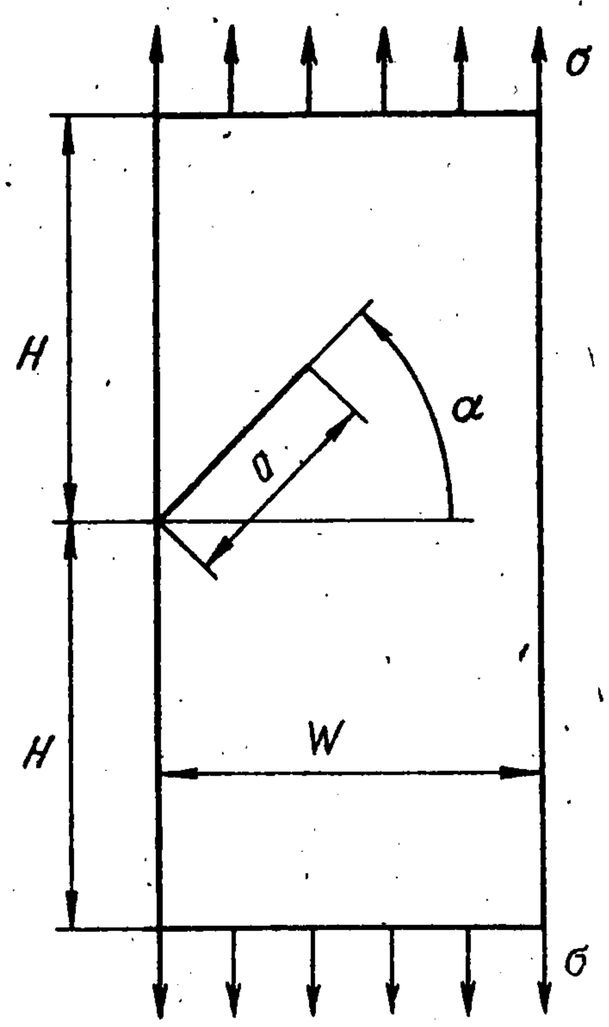
где H – ступенчатая функция, равная нулю, если t принадлежит участку контура с номером, меньшим, чем k, и равная единице в противном случае. Из второй формулы (1.7) следует

$$\vartheta'(t) = (\pi i)^{-1} \sum \Delta_k / (\xi_{1k} - t) \tag{5.10}$$

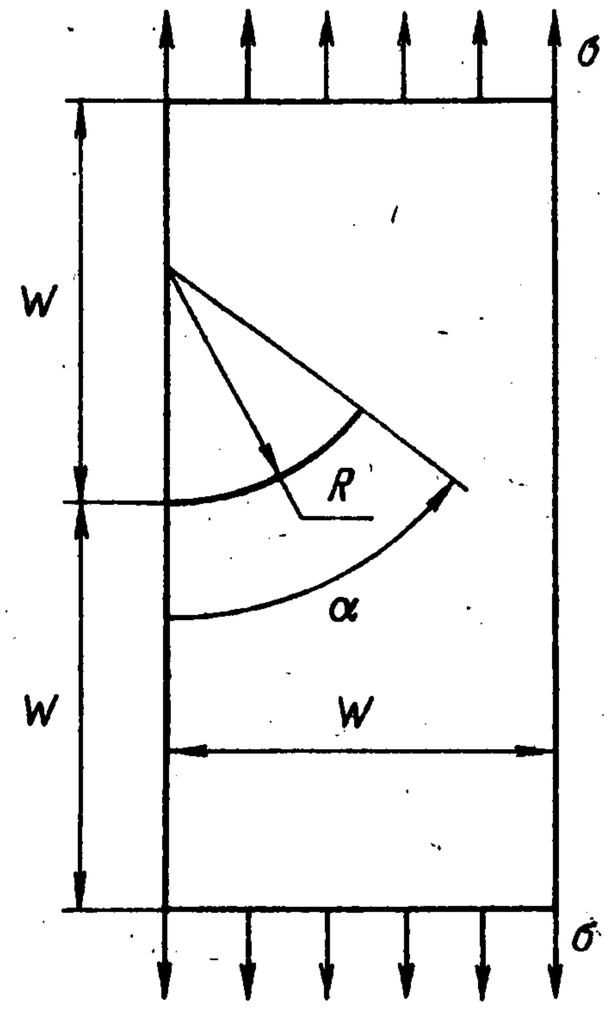
Полагая в формуле (5.10) величину t равной координатам точек коллокации элементов, прилегающих к кончику трещины, получим ϑ'_+ и ϑ'_-.

6. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие применение изложенного метода. Пусть полуплоскость, изображенная на фиг. 2, растягивается на бесконечности равномерно распределенной нагрузкой интенсивности σ в направлении, параллельном границе полуплоскости. Будем искать зависимости безразмерных величин

$$F_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}} / [\sigma(\pi a)^{1/2}], \quad F_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{II}} / [\sigma(\pi a)^{1/2}] \tag{6.1}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

где a – длина трещины, от угла α. Остановимся вначале на случае $\alpha = 0$. Аналитическое решение, полученное Койтером [9], дает для F_{I} значение 1,1215 ($F_{\mathrm{II}} = 0$ в силу симметрии). Занг и Гудмундсон получили $F_{\mathrm{I}} = 1{,}121579$ [2].

Исследуем сходимость численного решения к определенному результату с увеличением количества граничных элементов. Участки контура L: $BA, AO, OA', A'C$ разбивались на одинаковое число элементов m. Все элементы в пределах каждого участка имели одинаковую длину. Точки коллокации брались в серединах элементов. Результаты расчетов даны ниже

m	1	2	3	6	12	24
F_{I}	0,720	1,116	1,131	1,12289	1,12203	1,12158

Рассмотрим теперь эту задачу при разных значениях угла α. Принцип разбиения контура L на граничные элементы тот же. Ниже приведены результаты расчета при $m = 12$ ($F1$), здесь же представлены для сравнения результаты Хасебе и Инохары ($F2$), заимствованные из [10]

α	0°	15°	30°	45°	60°	75°
$F1_{\mathrm{I}}$	1,122	1,068	0,916	0,698	0,453	0,221
$F2_{\mathrm{I}}$	1,121	1,069	0,920	0,705	0,461	0,239
$F1_{\mathrm{II}}$	0	0,178	0,313	0,373	0,343	0,228
$F2_{\mathrm{II}}$	0	0,174	0,306	0,364	0,338	0,219

Рассмотрим теперь примеры приложения метода к конечным областям. На фиг. 3 изображена полоса с прямолинейной наклонной трещиной длиной a, растягиваемая равномерно распределенной нагрузкой σ. Контур Г состоит из восьми прямолинейных участков (незагруженная сторона полосы, на которой нет трещины, рассматривается для удобства как два участка). Каждый из них равномерно разбивался на m граничных элементов. Точки коллокации брались в серединах элементов. Рассмотрим прежде всего случай, когда $\alpha = 0$. При этом в силу симметрии $F_{\mathrm{II}} = 0$. Пусть $W/H = 2$. Результаты анализа сходимости значений F_{I} к определенной величине при различных значениях m вместе с результаты Бови [11] и Занга [3] представлены в таблице.

$\frac{a}{W}$	m				[11]	[3]
	1	2	6	12		
0,1	1,517	1,325	1,243	1,233	1,23	1,228
0,3	1,749	1,831	1,855	1,854	1,85	1,843
0,5	2,228	2,710	2,989	3,022	3,01	2,004
0,7	2,892	4,140	5,948	6,334	6,40	6,338

Для этой же задачи при $W/H = 1$ ниже даны результаты расчетов F_I при $m = 6$ и $m = 12$, а также более ранние результаты [12, 13], полученные для бесконечной полосы,

a/W	0,1	0,3	0,5	0,7
$F_I(m=6)$	1,201	1,651	2,750	5,646
$F_I(m=12)$	1,192	1,658	2,811	6,194
F_I [12]	–	1,655	2,827	6,376
F_I [13]	1,189	1,660	2,825	6,36

Результаты расчетов зависимостей $F_I(\alpha)$ и $F_{II}(\alpha)$ при $W/H = 1$ и $a/W = 0,3$ (принималось $m = 6$), практически совпадают с известными [11].

Можно отметить, что приведенные решения тестовых задач свидетельствуют о приемлемой точности метода.

В заключение рассмотрим задачу о криволинейной трещине в растягиваемой полосе (фиг. 4). Пусть линия трещины – часть окружности радиуса R. Длина трещины $a = R\alpha$. Принцип разбиения контура L на элементы такой же, как и в предыдущей задаче о прямолинейной трещине в полосе. Ниже приведены данные расчетов при $R/W = 0,3$ ($m = 6$)

α	15°	30°	45°	60°	75°	90°
F_I	1,146	1,116	1,044	0,905	0,708	0,481
F_{II}	0,171	0,337	0,484	0,584	0,615	0,570

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саврук М.П.* Сингулярные интегральные уравнения двумерных задач теории упругости для тел с краевыми разрезами // Физ.-хим. механика материалов. 1987. Т. 23. № 1. С. 61–67.
2. *Zang W., Gudmundson P.* An integral equation method for piece-wise smooth cracks in an elastic half-plane // Eng. Fract. Mech. 1989. V. 32. № 6. P. 889–897.
3. *Zanq W.* On modelling of piece-wise smooth cracks in two-dimensional finite bodies // Intern. J. Fract. 1990. V. 46. № 1. P. 41–55.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения // Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975. С. 204–335.
6. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975. С. 83–203.
7. *Михлин С.Г.* Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М., Л.: Гостехиздат, 1949. 380 с.
8. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
9. *Benthem J.P., Koiter W.T.* Asymptotic approximations to crack problems // Mechanics of fracture. V. 1. Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden: Noordhoff, 1973. P. 131–178.
10. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т. 1 / Под ред. *Ю. Мураками.* М.: Мир, 1990. 448 с.
11. *Bowie O.L.* Solutions of plane crack problems by mapping technique // Mechanics of fracture. V. 1. Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden: Noordhoff, 1973. P. 1–55.
12. *Браун У., Сроули Дж.* Испытания высокопрочных металлических материалов на вязкость разрушения при плоской деформации. М.: Мир, 1972. 245 с.
13. *Бойко А.В., Карпенко Л.Н.* Об интегральном уравнении задачи для упругой полосы с разрезом // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 1035–1040.

Тула

Поступила в редакцию
30.XI.1992