УДК 539.374

© 1994 г. С.И. Репин

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ СОДЕРЖАЩИХ РАЗРЫВЫ ПОЛЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Исследуются свойства вариационных постановок задач деформационной теории пластичности, в которых функция текучести зависит от первого и второго инвариантов тензора напряжений. Построены точные решения некоторых задач, содержащие разрывы. Установлено, что решения, содержащие разрывы полей перемещений вдоль некоторых линий (поверхностей), могут существовать только в случае, если поверхность текучести лежит внутри определенного множества.

Как известно, функцию текучести $F(\sigma)$, определяющую пластические свойства материала, обычно считают выпуклой функцией трех инвариантов тензора напряжений σ. Ниже рассматриваются вариационные постановки относительно полей перемещений в задачах деформационной пластичности, когда $F(\sigma)$ зависит от первого и второго инвариантов σ. В этом случае условие текучести можно записать в виде

$$F(\mathrm{Sp}\sigma, |\sigma^D|) \leqslant 0 \tag{0.1}$$

где $\mathrm{Sp}\sigma$ – первый инвариант тензора σ, а σ^D – девиатор. Частными случаями (0.1) являются:

$$F(\sigma) = |\sigma^D| - b \leqslant 0 \tag{0.2}$$

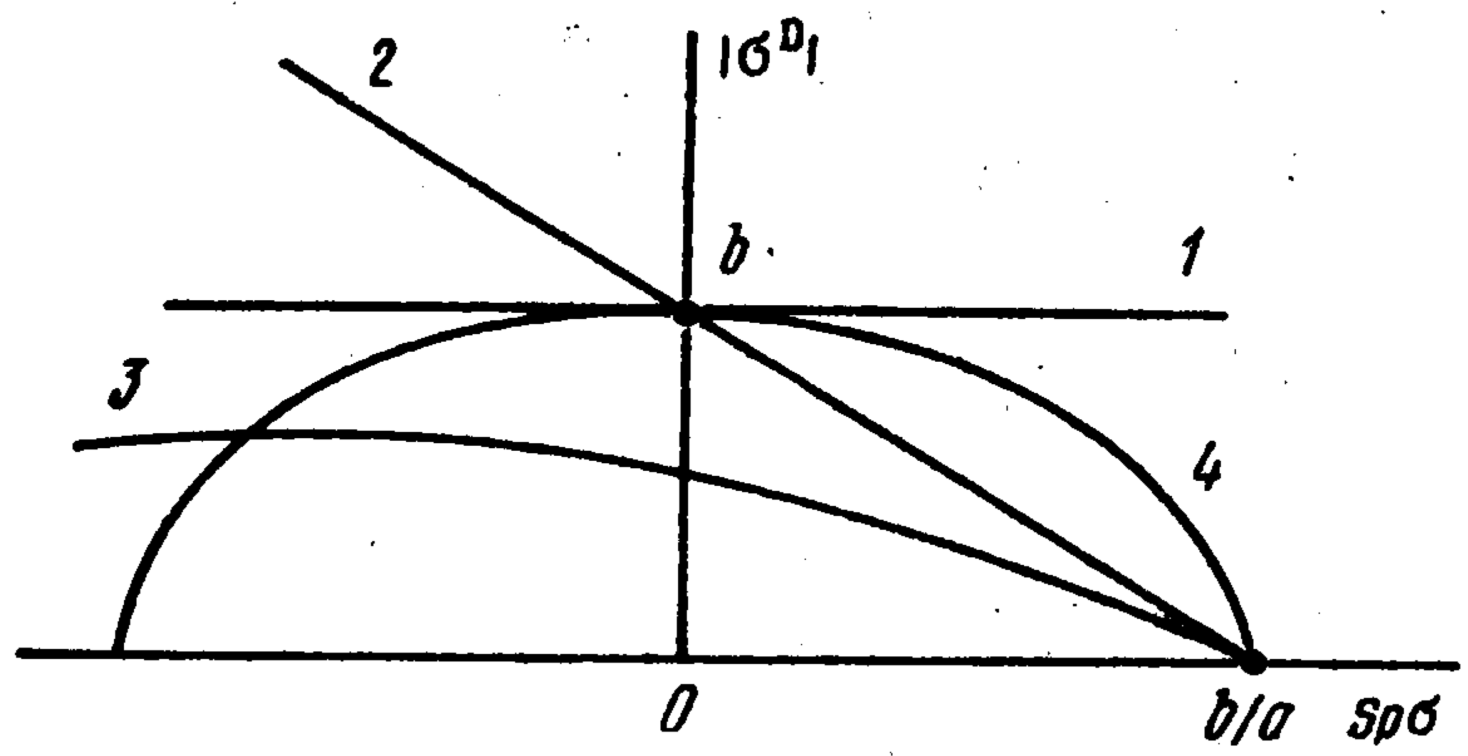
$$F(\sigma) = |\sigma^D| + a\mathrm{Sp}\sigma - b \leqslant 0 \tag{0.3}$$

$$F(\sigma) = |\sigma^D| + h(\mathrm{Sp}\sigma) - b \leqslant 0 \tag{0.4}$$

$$F(\sigma) = a^2(\mathrm{Sp}\sigma)^2 + |\sigma^D|^2 - b^2 \leqslant 0 \tag{0.5}$$

Здесь a и b – положительные постоянные, а h – выпуклая функция. Условие (0.2) при $b = \sqrt{2}\, k_*$ (k_* – предел текучести) соответствует критерию пластичности Мизеса и используется, как правило, для металлов. Условие (0.3) называется обобщенным критерием Кулона-Мора [1, 2] и применяются при анализе поведения грунта, сыпучих и гранулированных сред. Закон текучести (0.4) является обобщением (0.3) [2], а (0.5) имеет место для пористых тел [3] или в задачах о плоском напряженном состоянии в тонких пластинах [4]. На фиг. 1 цифрами 1–4 указаны границы областей $F(\sigma) \leqslant 0$, соответствующих условиям (0.2)–(0.5).

Известно, что в задачах идеальной пластичности возможно возникновение разрывных решений. Исследование условий возникающих на линиях разрыва проводилось разными авторами (см., в частности, [4–7]). Пример точного решения упругопластической задачи содержащий разрыв поля перемещений приведен в [8]. Математические свойства вариационных постановок относительно полей перемещений в задачах с критерием Мизеса изучались в работах [8–11]. Было показано, что исходная вариационная постановка относительно полей перемещений математически некорректна, поскольку исключает из рассмотрения разрывные функции. В этих же работах построены абстрактные расширения соответствующих задач, в которых класс допустимых функций расширяется до про-



Фиг. 1

странства BD функций ограниченной деформации или некоторых его подмножеств. Кроме полных расширений во многих случаях удобно использовать так называемые частично расширенные вариационные постановки [7]. Здесь функционалы определены на широком классе разрывных функций и имеют в отличие от полных расширений достаточно простой вид. Последнее оказывается весьма важным с прикладной точки зрения, поскольку позволяет конструировать соответствующие численные методы [12]. В данной работе изучаются расширенные вариационные постановки для задач с критериями текучести (0.3)–(0.5). С их помощью построены решения ряда задач, содержащие разрывы полей перемещений.

Метод построения таких решений основан на одновременном анализе задачи в перемещениях и двойственной к ней задачи в напряжениях. Поскольку решение последней существует и единственно, это дает возможность построить оценку снизу для функционала в перемещениях и доказать, что его минимум достигается только на разрывной функции.

Кроме того, анализ расширенных постановок приводит к выводу о том, что в задачах деформационной теории пластичности с критерием (0.1) решения, содержащие разрывы вдоль некоторых линий (поверхностей), могут возникать только когда функция текучести удовлетворяет условию

$$F(\mathrm{Sp}\sigma, |\sigma^D|) \geqslant |\sigma^D| + a_* \mathrm{Sp}\sigma - b, \quad b > 0 \tag{0.6}$$

где $a_* = 1/\sqrt{2}$ в плоском и $a_* = 1/\sqrt{6}$ в трехмерном случае.

1. Вариационные постановки для задач деформационной пластичности. Классическая постановка задачи деформационной теории пластичности состоит в определении тензора напряжений $\sigma = \sigma(x)$ и вектора перемещений $u = u(x)$, удовлетворяющих следующей системе уравнений:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1,\dots, n \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij}\nu_j = g_i \quad \text{на } \Gamma_2, \quad u_i = \overset{0}{u_i} \quad \text{на } \Gamma_1, \quad i = 1,\dots, n \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_{ij}(u) = {}^1\!/\!{}_2(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(u) = A_{ijkl}\sigma_{kl} + \lambda_{ij}, \quad i, j = 1,\dots, n \tag{1.3}$$

$$F(\sigma) \leqslant 0 \tag{1.4}$$

$$\lambda_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \leqslant 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{M}_s^{n\times n}; \quad F(\tau) \leqslant 0 \tag{1.5}$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), граница которой Γ непрерывна по Липшицу, причем $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, mes $\Gamma_1 > 0$; A_{ijkl} – компоненты тензора упругости, ν – вектор единичной внешней нормали к Γ, f и g – объемные и поверхностные силы, u^0 – заданные на Γ_1 перемещения, $\mathbb{M}_s^{n\times n}$ – множество симметричных матриц размерности $n \times n$; запятая означает дифференцирование по соответствующему индексу и используется соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу от 1 до n. Через $L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и $W_p^l(\Omega; \mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространства векторно-значных функций, определенных на Ω, компоненты которых соответственно суммируемы со степенью p или принадлежат соболевскому классу W_p^l.

Определим множество допустимых векторов перемещений

$$V = \{u(x) \in W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^n) | u = u^0 \text{ на } \Gamma_1\}$$

и множества M и Q тензоров напряжений, удовлетворяющих соответственно уравнениям равновесия и заданному условию текучести

$$M = \{\sigma \in \Sigma | \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \ \text{в} \ \Omega, \ \ \sigma_{ij}\nu_j = g_i \ \text{ на } \Gamma_2, \ i = 1,..., n\}$$

$$Q = \{\sigma \in \Sigma | \sigma(x) \in K \ \text{п.в.в.} \ \Omega\}, \quad \Sigma = L_2(\Omega; \mathbb{M}_s^{n\times n})$$

где

$$K = \{\tau \in \mathbb{M}_s^{n\times n} | F(\tau) \leqslant 0\}$$

Будем полагать, что силы f и g определены так, что существует статически допустимое поле напряжений, удовлетворяющее условиям текучести, т.е. $M \cap Q \neq \phi$, а также, что

$$f \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^n), \quad g \in L_\infty(\Gamma_2; \mathbb{R}^n), \quad u^0 \in W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \tag{1.6}$$

Определим на $Q \times V$ лагранжиан

$$l(\sigma, u) = \int_\Omega \varepsilon_{ij}(u)\sigma_{ij}dx - G(\sigma) - L(u) \tag{1.7}$$

где

$$L(u) = \int_\Omega f_i u_i dx + \int_{\Gamma_2} g_i u_i dl, \quad G(\sigma) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(\sigma, \sigma)dx$$

а $a(\sigma, \sigma) = A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$ – положительно определенная квадратичная форма. Лагранжиан l порождает следующую минимаксную проблему: найти пару функций $(\sigma^*, u^*) \in Q \times V$ таких, что

$$l(\sigma, u^*) \leqslant l(\sigma^*, u^*) \leqslant l(\sigma^*, u) \quad \forall\sigma \in Q, \quad \forall u \in V \tag{1.8}$$

Нетрудно показать, что если седловая точка лагранжиана l существует и достигается на достаточно гладких функциях σ^* и u^*, то последние являются решением классической постановки (1.1)–(1.5). Наоборот, если система (1.1)–(1.5) имеет решение, то последнее соответствует седловой точке l. Поэтому задачу (1.1)–(1.5) можно изучать как минимаксную проблему относительно лагранжиана l [11, 13]. С ней связаны две следующие задачи:

Задача P^*: найти тензор $\sigma^* \in Q$ такой, что

$$\Phi(\sigma^*) = \sup\{\Phi(\sigma) | \sigma \in Q\}, \quad \Phi(\sigma) = \inf\{l(\sigma, u) | u \in V\} \tag{1.9}$$

Задача P: найти вектор $u^* \in V$, такой, что

$$J(u^*) = \inf\{J(u) | \ u \in V\}, \quad J(u) = \sup\{l(\sigma, u) | \ \sigma \in Q\} \tag{1.10}$$

Вычисляя инфимум и супремум в (1.9), (1.10) получим

$$\Phi(\sigma) = \begin{cases} \int_{\Gamma_1} \sigma_{ij}\nu_i u_j^0 dl - G(\sigma) & \text{если} \quad \sigma \in M \\ -\infty & \text{если} \quad \sigma \notin M \end{cases} \tag{1.11}$$

$$J(u) = \int_\Omega H(\varepsilon(u))dx - L(u) \tag{1.12}$$

где H: $M_s^{n\times n} \to R$ определяется согласно правилу

$$H(\kappa) = \sup\{\tau_{ij}\kappa_{ij} - G(\tau) | \ \tau \in K\}, \quad \forall\kappa \in M_s^{n\times n}$$

Задачи (1.11) и (1.12) являются двойственными друг по отношению к другу, причем из выпуклого анализа известно, что если существуют решения σ^* и u^* задач P^* и P, то

(σ^*, u^*) – седловая точка лагранжиана l на множестве $Q \times V$; наоборот, если существует пара функций (σ^*, u^*), удовлетворяющая (1.8), то σ^* и u^* – решения задач P^* и P, соответственно. При этом

$$\Phi(\sigma) \leqslant \Phi(\sigma^*) = l(\sigma^*, u^*) = J(u^*) \leqslant J(u), \quad \forall u \in V, \quad \forall \sigma \in Q \tag{1.13}$$

Непосредственно из (1.13) следует, что если найдены функции $\sigma^* \in Q$ и $u^* \in Q$ такие, что выполнено равенство

$$\Phi(\sigma^*) = J(u^*) \tag{1.14}$$

то σ^*, u^* – решения задач P^* и P. Известно (см. [11], [13]) что задача P^* имеет единственное решение σ^*, если $Q \cap M \neq \phi$ и

$$\Phi(\sigma^*) = \sup_{\sigma \in Q} \inf_{u \in V} l(\sigma, u) = \inf_{u \in V} \sup_{\sigma \in Q} l(\sigma, u) = J_* \tag{1.15}$$

Однако задача P может и не иметь решения (соответствующий пример для упругопластической задачи с критерием Мизеса приведен в [8]). Это связано с тем, что минимизирующая последовательность может сходиться к функции, имеющей разрывы вдоль некоторых линий (поверхностей). Поскольку такие функции не принадлежат множеству V и функционал J на них неопределен, возникает необходимость выполнения процедуры математического расширения данной вариационной проблемы и построения расширенной задачи (см. [8–11]). Расширенная задача P^+ состоит в определении элемента $u^+ \in V^+$, такого, что

$$I(u^+) = \inf\{I(\upsilon) | \upsilon \in V^+\}, \quad \text{где} \quad V \subset V^+ \tag{1.16}$$

Задача P^+ всегда имеет решение и сохраняет точную нижнюю грань задачи P. Двойственной к P^+ также является задача P^*, так что тензору напряжений σ^* соответствует поле переменной $u^+ \in V^+$, причем

$$\Phi(\sigma^*) = I(u^+) \tag{1.17}$$

Часто оказывается удобным использовать так называемые частично расширенные постановки (см. [7]), когда расширенный функционал $\bar{J}$ определен на множестве $\bar{V}$ таком, что $V \subset \bar{V} \subset V^+$, где $\bar{V}$ содержит некоторый набор разрывных полей перемещений. Задача $\bar{P}$ состоит в определении вектор-функции $\bar{u} \in \bar{V}$ минимизирующей функционал $\bar{J}$

$$\bar{J}(\bar{u}) = \inf\{\bar{J}(\upsilon) | \upsilon \in \bar{V}\} \tag{1.18}$$

При этом

$$\bar{J}(u) = J(u) \ \forall u \in V; \quad \bar{J}(u) = I(u) \ \forall u \in \bar{V}, \quad \bar{J}(u) \geqslant J_* \ \forall u \in \bar{V} \tag{1.19}$$

Непосредственно из (1.15)–(1.19) следует, что если существует решение задачи P, то оно также является решением задачи $\bar{P}$ (1.18), в свою очередь любое решение задачи $\bar{P}$ является и решением задачи P^+. Таким образом, если найдены функции $\sigma^* \in Q$ и $\bar{u} \in \bar{V}$ такие, что

$$\Phi(\sigma^*) = \bar{J}(\bar{u}) \tag{1.20}$$

то $\bar{u}$ является решением задачи P^+, а σ^* – решением двойственной к ней задачи P^*.

Далее мы ограничимся рассмотрением наиболее простого варианта постановки (1.18), когда разрыв поля перемещений допускается только на границе области Γ_1.

Тогда [7]

$$\bar{J}(u)=\int_{\Omega} H(\varepsilon(u))dx - L(u)+\int_{\Gamma_1} \Psi(S(\nu,u-u^0))dl \tag{1.21}$$

$$\bar{V}=W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^n),\quad S\in \mathbb{M}_s^{n\times n},\quad S=\{s_{ij}\},\quad s_{ij}=\frac{1}{2}(\nu_i\upsilon_j+\nu_j\upsilon_i)$$

а функция Ψ: $\mathbb{M}_s^{n\times n}\to\mathbb{R}$ вычисляется согласно правилу

$$\Psi(\kappa)=\sup\{\tau_{ij}\kappa_{ij}|\ \tau\in K\}\quad \forall\kappa\in\mathbb{M}_s^{n\times n} \tag{1.22}$$

Условие (1.20) в котором функционал $\bar{J}$ имеет вид (1.21), может быть использовано для построения точных решений, содержащих разрывы перемещений на границе Γ_1.

Сформулируем достаточные условия существования такого решения. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу, которая отличается от исходной только заданием краевого условия на Γ_1, а именно

$$u=w^0 \text{ на } \Gamma_1;\quad w^0\in W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^n),\quad w^0\neq u^0 \tag{1.23}$$

Соответствующая вариационная постановка относительно перемещений имеет вид

$$\inf\left\{\int_{\Omega} H(\varepsilon(u))dx - L(u)|u\in V_1\right\}$$
$$V_1=\{u\in W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\mid u=w^0 \text{ на } \Gamma_1\} \tag{1.24}$$

Утверждение 1. Пусть решение задачи (1.24) существует и достигается на поле u^*, которому соответствует тензор напряжений σ^* (решение соответствующей двойственной задачи), и выполнено следующее равенство

$$\int_{\Gamma_1}\{\Psi(S(\nu,w^0-u^0))-\nu_i\sigma_{ij}^*(u_j^0-w_j^0)\}dl=0 \tag{1.25}$$

Тогда u^* и σ^* – решения задач P^+ и P^* соответственно.

Доказательство. Поскольку u^* – решение задачи (1.24), и σ^* – решение соответствующей двойственной задачи, то в силу соотношений двойственности (см. (1.14))

$$J(u^*)=-\frac{1}{2}\int_{\Omega} a(\sigma^*,\sigma^*)dx+\int_{\Gamma_1}\nu_i\sigma_{ij}^*w_j^0dl \tag{1.26}$$

где $\sigma^*\in Q\cap M$. Складывая равенства (1.25) и (1.26), получим

$$\bar{J}(u^*)=J(u^*)+\int_{\Gamma_1}\Psi(S(\nu,w^0-u^0))dl=-\frac{1}{2}\int_{\Omega} a(\sigma^*,\sigma^*)dx+\int_{\Gamma_1}\nu_i\sigma_{ij}^*u_j^0dl$$

которое показывает, что условие (1.20) выполнено и, следовательно, u^* и σ^* являются решениями задач P^+ и P^*.

Таким образом, если выполнены условия утверждения *1*, то u^* – решение расширенной задачи, которое содержит разрыв перемещений величины w^0–u^0 на границе Γ_1.

Замечание. Пусть K_1 и K_2 – выпуклые множества, отвечающие двум различным условиям текучести F_1 и F_2:

$$K_i=\{\tau\in\mathbb{M}_s^{n\times n}|\ F_i(\tau)\leqslant 0\},\quad i=1,2,\quad K_2\subset K_1 \tag{1.27}$$

Соответствующие этим множествам функции P и Ψ будем обозначать H_i и Ψ_i, и пусть

$$Q_i=\{\sigma\in\Sigma|\ \sigma(x)\in K_i \text{ п.в.в. } \Omega\},\quad i=1,2$$

Рассмотрим в области Ω две упругопластические задачи, различающиеся только выбором условия текучести. Предположим, что решение σ^*, u^* одной из них (при $F = F_1$) найдено, причем $\sigma^* \in Q_1$, $u^* \in \overline{V}$ и

$$\Phi(\sigma^*) = \chi_1 + \Lambda_1 - L(u^*) \tag{1.28}$$

$$\chi_i = \int_\Omega H_i(\varepsilon(u^*))dx; \quad \Lambda_i = \int_{\Gamma_1} \Psi_i(S(\nu, u^* - u^0))dl, \quad i = 1,2$$

Если при этом $\sigma^* \in Q_2$ и

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 \tag{1.29}$$

то σ^*, u^* одновременно являются и решением второй задачи (при $F = F_2$).

Действительно, так как $\sigma^* \in Q_2$ и $K_2 \subset K_1$, то

$$\Phi(\sigma^*) \leqslant \sup\{\Phi(\sigma) | \sigma \in Q_2\} \leqslant \sup\{\Phi(\sigma) | \sigma \in Q_1\} = \Phi(\sigma^*) \tag{1.30}$$

$$H_2(\kappa) \leqslant H_1(\kappa) \quad \forall \kappa \in \mathbb{M}_s^{n \times n} \Rightarrow \chi_2 \leqslant \chi_1$$

Используя (1.28)–(1.30), получим

$$\sup\{\Phi(\sigma) | \sigma \in Q_2\} = \Phi(\sigma^*) = \chi_1 + \Lambda_1 - L(u^*) \geqslant \chi_2 + \Lambda_2 - L(u^*) \geqslant \Phi(\sigma) \quad \forall \sigma \in Q_2$$

Положив здесь $\sigma = \sigma^*$, приходим к выводу, что условие (1.20) во второй задаче ($F = F_2$) выполнено, и, следовательно, σ^* и u^* – решения.

2. Расширенные постановки для задач с условиями текучести (0.3)–(0.5). Для изотропной среды квадратичная форма $a(\tau, \tau)$ может быть записана в виде

$$a(\tau, \tau) = \frac{1}{2\mu} |\tau^D|^2 + \frac{1}{n^2 K_0} (\mathrm{Sp}\tau)^2$$

где μ и K_0 – упругие константы материала. Поскольку в рассматриваемом нами случае условия текучести также зависят только от девиатора и следа тензора, то и функции H и Ψ, определяемые согласно (1.12), (1.22), могут быть записаны как функции двух параметров $s = \mathrm{Sp}\varepsilon$ и $t = |\varepsilon^D|$. Для условия текучести Мизеса выражения для H и Ψ известны [13]

$$H(t,s) = \frac{K_0}{2} s^2 + h_0(t); \qquad h_0(t) = \begin{cases} \mu t^2, & t \leqslant k_* / \sqrt{2}\mu \\ k_*(\sqrt{2}t - k_* / 2\mu), & t > k_* / \sqrt{2}\mu \end{cases}$$

$$\Psi(\kappa) = \begin{cases} \sqrt{2}k_* |\kappa^D|, & \mathrm{Sp}\,\kappa = 0 \\ +\infty, & \mathrm{Sp}\,\kappa \neq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим другие случаи.

Условие текучести Кулона-Мора. Вычисляя супремум по множеству K, соответствующему условию (0.3), получим

$$H(t,s) = \begin{cases} \mu t^2 + \dfrac{K_0}{2} s^2, & \text{если} \quad t + \dfrac{as}{nq} \leqslant \dfrac{b}{2\mu} \\ h_1(t,s) + \dfrac{\mu h_2^2(t,s)}{a^2 + q} & \text{если} \quad t + \dfrac{as}{nq} > \dfrac{b}{2\mu} \quad \text{и} \quad h_2(t,s) \geqslant 0 \\ h_1(t,s), & \text{если} \quad h_2(t,s) < 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

где

$$q = \frac{2\mu}{n^2 K_0}, \qquad h_1(t,s) = \frac{b}{a}\left(\frac{s}{n} - \frac{qb}{4\mu a}\right), \qquad h_2(t,s) = at - \frac{s}{n} + \frac{qb}{2\mu a}$$

$$\Psi(\kappa)=\begin{cases}\dfrac{b\,\mathrm{Sp}\,\kappa}{na}, & \text{если } |\kappa^D|\leqslant \dfrac{1}{na}\mathrm{Sp}\,\kappa\\ +\infty, & \text{в остальных случаях}\end{cases}\qquad \forall\kappa\in \mathsf{M}_s^{n\times n} \tag{2.2}$$

Поскольку $|S^D(\nu,\upsilon)|=\left(\dfrac{n-1}{n}|\upsilon_\nu|^2+\dfrac{1}{2}|\upsilon_\tau|^2\right)^{1/2}$, $\upsilon_\nu=\nu_i\upsilon_i=\mathrm{Sp}(S(\nu,\upsilon))\upsilon_\tau=\upsilon-\upsilon_\nu\nu$, то $\Psi(S(\nu,\upsilon))$ может быть конечным только при

$$a\leqslant a_*=1/(n^2-n)^{1/2} \tag{2.3}$$

При $a>a_*$ $\Psi(S(\nu,\upsilon))=+\infty$ для любого ненулевого вектора υ. Таким образом, решение, содержащее разрыв (что соответствует $\upsilon\neq 0$), вдоль некоторой линии или поверхности может существовать только в том случае, если постоянная a в условии (0.3) удовлетворяет условию (2.3).

Условие текучести (0.4). Для произвольной выпуклой функции h нельзя построить явные выражения для H и Ψ. Однако можно установить некоторые важные свойства этих функций. Введем обозначения

$$K_{ab}=\{\tau\in \mathsf{M}_s^{n\times n}\,|\,|\tau^D|+a\mathrm{Sp}\tau\leqslant b\},\quad \Psi_{ab}(\kappa)=\sup\{\tau_{ij}\kappa_{ij}|\,\tau\in K_{ab}\}$$

Непосредственно из определения функции Ψ вытекает

Утверждение 2. Если $K_{a_1b_1}\subset K\subset K_{a_2b_2}$, то

$$\Psi_{a_1b_1}(\kappa)\leqslant\Psi(\kappa)\leqslant\Psi_{a_2b_2}(\kappa)\qquad\forall\kappa\in \mathsf{M}_s^{n\times n}$$

Следствие. Пусть множество K, соответствующее условию (0.1), содержит множество K_{ab} при $a\geqslant a_*$ и $b>0$ (или, что то же самое, выполнено неравенство (0.6)). Тогда $\Psi(S(\nu,\upsilon))=+\infty$ для любого $\upsilon\neq 0$, и, следовательно, разрывные решения невозможны.

Значение функции Ψ можно вычислить для двух разных случаев, соответствующих нормальному и тангенциальному разрывам

Утверждение 3. 1°. Пусть $K\subset K_{ab}$ при $a\leqslant a_*$, $b>0$ и $\tau^0=\dfrac{b}{na}1\in K$, $1\in \mathsf{M}_s^{n\times n}$ – единичный тензор, тогда

$$\Psi(S(\nu,\upsilon))=\upsilon_\nu b/(na),\quad \text{если}\quad |\upsilon_\tau|=0,\quad \upsilon_\nu>0 \tag{2.4}$$

2°. Пусть функция h в (0.4) удовлетворяет условию

$$\inf\{h(t)|\,t\in\mathbb{R}\}=c>-\infty \tag{2.5}$$

тогда

$$\Psi(S(\nu,\upsilon))=(b-c)|\upsilon_\tau|/\sqrt{2},\quad \text{если}\quad \upsilon_\nu=0. \tag{2.6}$$

Доказательство. 1°. В случае $|\upsilon_\tau|=0$, $\upsilon_\nu>0$ условие $|S^D(\nu,\upsilon)|\leqslant \mathrm{Sp}\,S(\nu,\upsilon)/(na)$ очевидно выполнено при $a<a_*$, и учитывая (2.2), получим

$$\Psi(S(\nu,\upsilon))=\sup\{\tau_{ij}s_{ij}|\,\tau\in K\}\leqslant\sup\{\tau_{ij}s_{ij}|\,\tau\in K_{ab}\}=b/na\upsilon_\nu$$

С другой стороны:

$$\sup\{\tau_{ij}s_{ij}|\,\tau\in K\}\geqslant\tau^0_{ij}s_{ij}=b/na\upsilon_\nu$$

и, таким образом, имеет место (2.4).

2°. Для доказательства второй части утверждения заметим, что если $\upsilon_\nu = 0$, то $|S^D(\nu, \upsilon)| = |\upsilon_\tau|\sqrt{2}$

$\Psi(S(\nu, \upsilon)) = \sup\{\tau_{ij}s_{ij} | \tau \in K\} = D|S^D(\nu, \upsilon)|\}$, $D = \sup\{|\tau^D| \mid \tau \in K\}$

Поскольку $|\tau^D| \leqslant b - h(\mathrm{Sp}\tau)$, то из (2.5) следует, что $D = b - c$ и имеет место (2.6).

Условие текучести (0.5). Здесь выражения для Ψ и H имеют вид

$$\Psi(\kappa) = \frac{b}{na}\sqrt{|\mathrm{Sp}\,\kappa|^2 + n^2a^2|\kappa^D|^2}, \quad \kappa \in \mathrm{M}_s^{n\times n} \tag{2.7}$$

$$H(t,s) = \begin{cases} \mu t^2 + \dfrac{K_0}{2}s^2, & \text{если} \quad t^2 + \dfrac{a^2s^2}{q^2n^2} \leqslant \dfrac{b^2}{4\mu^2} \\ \lambda_*(|s|/n - q\lambda_*/4\mu) + \delta_* b(t - \delta_* b/4\mu), & \text{если} \quad t^2 + \dfrac{a^2s^2}{q^2n^2} > \dfrac{b^2}{4\mu^2} \end{cases} \tag{2.8}$$

где $\lambda_* = ba^{-1}\sqrt{1-\delta_*^2}$, а $\delta_* \in [0, 1]$ определяется как корень уравнения

$$|s|\delta/(an\sqrt{1-\delta^2}) = t - \delta b(A/a^2 - 1)/(2\mu)$$

если $A = a^2$ (что будет, например, для несжимаемого материала в случае плоского напряженного состояния) выражение (2.8) существенно упрощается

$$H(t,s) = \begin{cases} \mu\Theta^2 & \text{если} \quad |\Theta| \leqslant b/2\mu \\ b(|\Theta| - b/4\mu) & \text{если} \quad |\Theta| > b/2\mu \end{cases}$$

где $\Theta^2 = s^2 + t^2/(a^2n^2)$. Отметим, что в соответствии с (2.7), здесь возможны разрывы не только касательной, но и нормальной составляющей поля. Однако подобные решения нельзя трактовать как действительный разрыв среды. В задачах о плоском напряженном состоянии решения, содержащие такие разрывы, связаны с образованием шейки [4], а в трехмерных задачах они могут рассматриваться как математическое описание процессов локализации пластической деформации [14], которые часто сопровождаются явлениями декогезии и дилатансии материала [15, 16].

3. Некоторые точные решения. Используем полученные в первых двух параграфах результаты для того, чтобы построить точные решения задач о скручивании толстостенного цилиндра и о деформации шарового слоя и показать, что для широкого набора условий текучести решение достигается на разрывном поле перемещений.

1°. Пусть $\Omega = \{(r, \Theta, z) | r_1 < r < r_2, 0 \leqslant \Theta < 2\pi, -d < z < d\}$, $u = (u_r, u_\theta, u_z)$, где (r, Θ, z) – цилиндрические координаты. Рассмотрим задачу с критерием текучести (0.4), где

$$h(t) \geqslant 0, \quad h(0) = 0 \tag{3.1}$$

и краевыми условиями

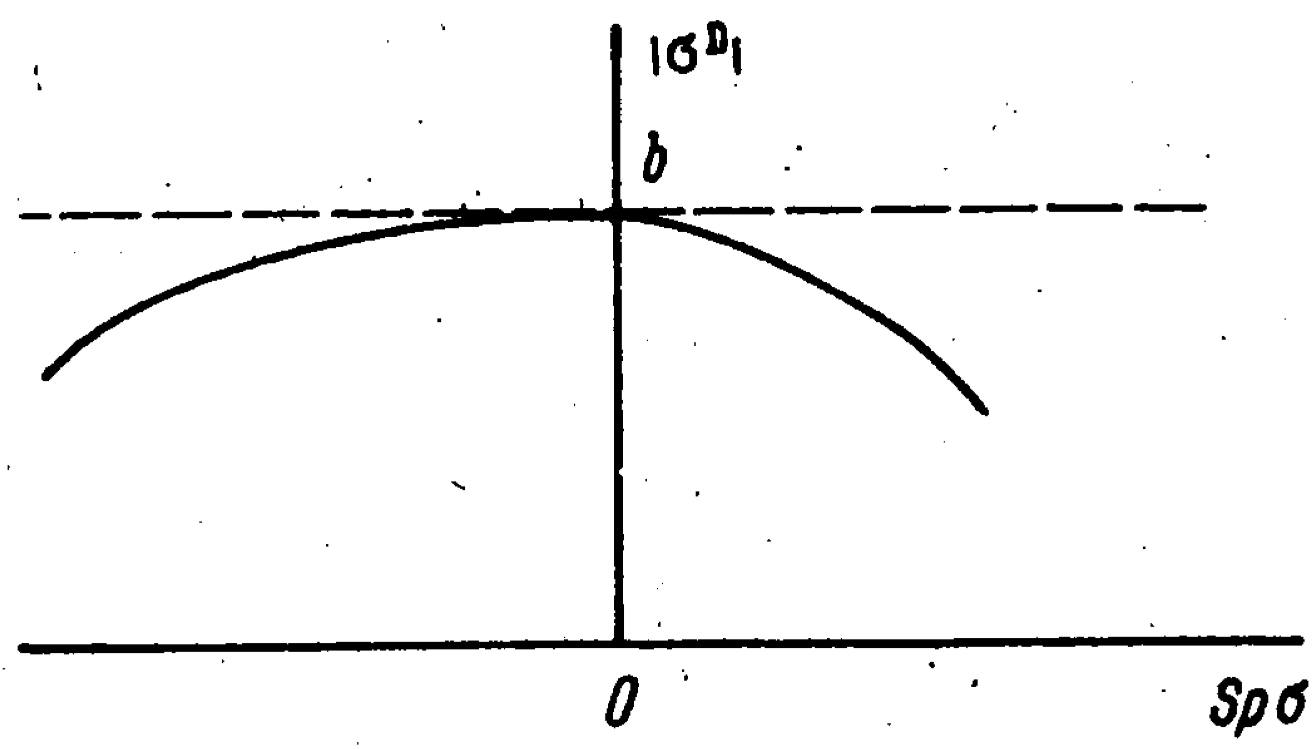
$$u = (0, 0, 0) \ \text{при} \ r = r_1, \quad u = (0, U, 0) \ \text{при} \ r = r_2, \quad U = \mathrm{const} \tag{3.2}$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \ \text{при} \ z = \pm d \tag{3.3}$$

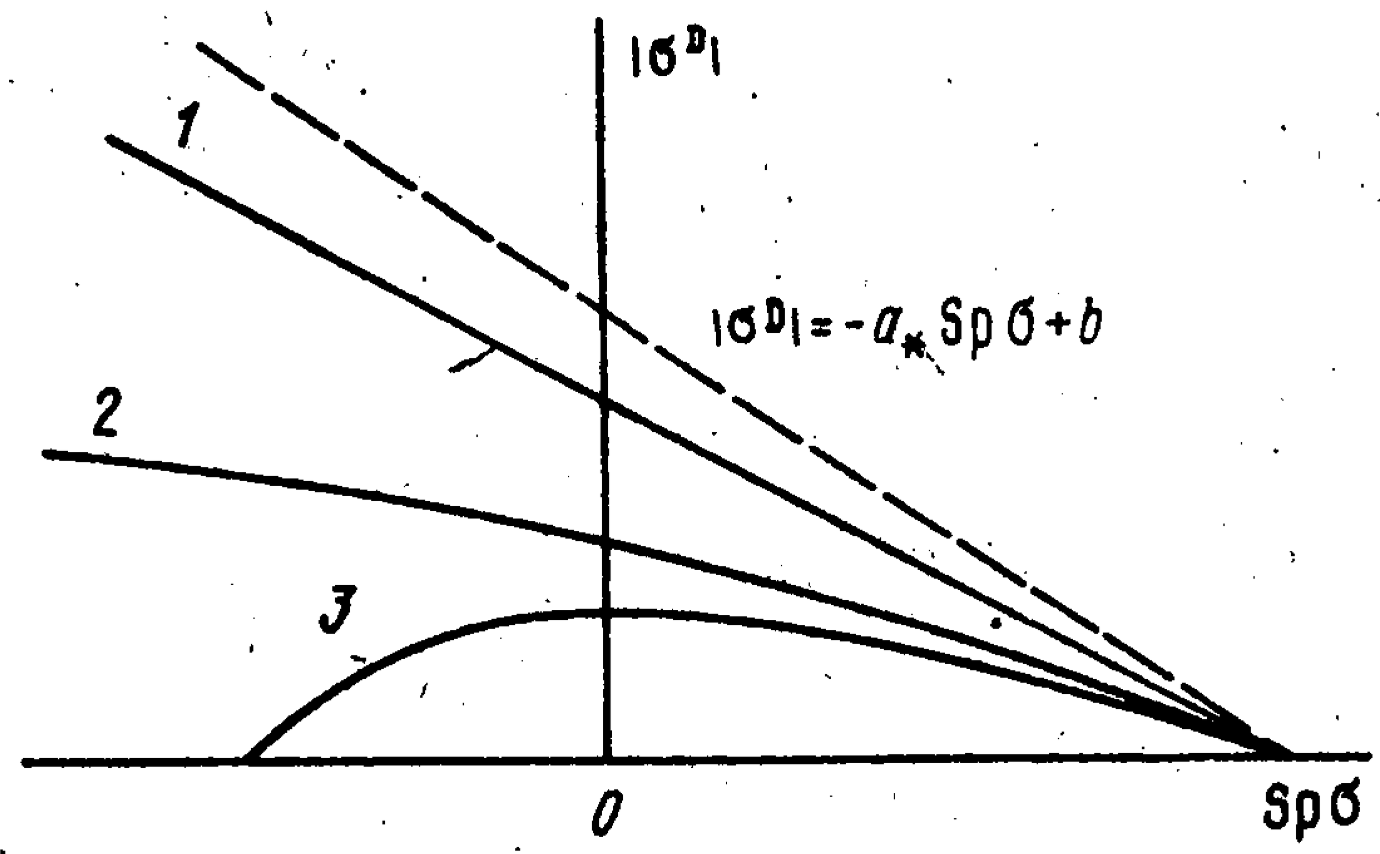
где $U \geqslant U_* = \beta b/2\sqrt{2}\,\mu r_2$, $\beta = r_2^2 - r_1^2$, и предполагая, что внешние силы f и g равны нулю. Для построения точного решения этой задачи воспользуемся утверждением 1, где функция w^0 удовлетворяет условиям

$$w^0 = w_1^0 = (0, \upsilon, 0) \ \text{при} \ r = r_1, \quad w^0 = w_2^0 = (0, U, 0) \ \text{при} \ r = r_2 \tag{3.4}$$

$$\upsilon = r_1 r_2^{-1}[U - U_*] > 0$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Нетрудно проверить, что в этом случае решение задачи существует (1.24) и определяется следующим образом:

$$u_r^* = u_z^* = 0, \quad u_\theta^* = C_1 r + C_2 r^{-1} \tag{3.5}$$

$$\sigma_{zz}^* = \sigma_{rz}^* = \sigma_{\theta z}^* = \sigma_{rr}^* = \sigma_{\theta\theta}^* = 0, \quad \sigma_{r\theta}^* = -2\mu C_2 r^{-2} \tag{3.6}$$

$$C_1 = \beta^{-1}(Ur_2 - \upsilon r_1), \quad C_2^{-1} = \beta^{-1} r_1 r_2 (\upsilon r_2 - U r_1)$$

Отметим, что $\sigma^* \in K \cap M$. Условие (1.25) с учетом осесимметричности u^* и σ^* записывается в виде

$$\Psi(S(\nu, \overset{0}{w}_1)) = \sigma_{r\theta}^*(r_1)\upsilon, \quad \nu = (-1, 0, 0) \tag{3.7}$$

При помощи утверждения 3 с учетом (3.1), получим

$$\Psi(S(\nu, \overset{0}{w}_1)) = b|\upsilon|/\sqrt{2} \tag{3.8}$$

Поскольку $\upsilon > 0$ и $C_2 = -r_1^2 b/2\sqrt{2}\,\mu$, то из (3.6)–(3.8) следует, что (1.25) выполнено.

Следовательно, u^*, σ^* определяемые (3.5) и (3.6), являются решением задачи с краевыми условиями (3.2), (3.3), причем величина разрыва перемещений при $r = r_1$ равна υ. Отметим, что $\varepsilon(u^*)$ – единственный тензор, удовлетворяющий соотношениям (1.3)–(1.5) при $\sigma = \sigma^*$, поэтому никаких других решений данная задача не имеет.

Таким образом, приходим к выводу, что для любого закона текучести (0.4) удовлетворяющего условию (3.1) (см. фиг. 2), задача о закручивании толстостенного цилиндра с условиями (3.2)–(3.4) имеет разрыв типа скольжения при $r = r_1$.

2°. Пусть $\Omega = \{(r, \Theta, \varphi) | \, r_1 < r < r_2, 0 \leqslant \Theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$, $u = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$, где (r, Θ, φ) – сферические координаты.

Рассмотрим упругопластическую задачу в области Ω в предположении, что материал подчиняется условию текучести (0.3), а объемные силы f отсутствуют. Граничные условия зададим следующим образом

$$u = (0, 0, 0) \text{ при } r = r_1, \quad u = (U, 0, 0) \text{ при } r = r_2 \tag{3.9}$$

где $U = Cr_2$, $C = b/9aK_0$, $a \leqslant a^*$.

Используя (2.1), нетрудно показать, что условие (1.20) выполнено в том случае, если u^* и σ^* имеют вид

$$u^* = (u_r^*, 0, 0), \quad u_r^* = Cr, \quad \sigma_r^* = \sigma_\theta^* = \sigma_\varphi^* = b/3a \tag{3.10}$$

$$\sigma_{r\varphi}^* = \sigma_{r\theta}^* = \sigma_{\varphi\theta}^* = 0$$

При этом

$$\bar{J}(u^*) = \Phi(\sigma^*) = \frac{2\pi b}{3a} C(r_2^3 + r_1^3), \quad \sigma^* \in Q \cap M \tag{3.11}$$

В соответствии с (1.20) это означает, что σ^* и u^* являются решениями вариационных задач P^* и P^+. Заметим, что $\overset{*}{u}_r = Cr_1$ при $r = r_1$ и, следовательно, инфимум расширенного функционала достигается на разрывной функции.

Рассмотрим теперь ту же самую задачу, выбрав только в качестве условия текучести вместо (0.3) критерий (0.4), в котором функция h задана так, что

$$h(t) \geqslant a_* t, \quad h(b/a) = b \tag{3.12}$$

Соответствующие кривые $|\sigma^D| = b - h(\mathrm{Sp}\sigma)$ обозначены на фиг. 3 цифрами 1–3. Покажем, что u^*, σ^*, определенные согласно (3.10), также являются решением данной задачи. Для этого воспользуемся замечанием к утверждению 1, положим

$$F_1(\sigma) = |\sigma^D| + a_*\mathrm{Sp}\sigma - b, \quad F_2(\sigma) = |\sigma^D| + h(\mathrm{Sp}\sigma) - b$$

Поскольку $|\sigma^{*D}| + h(\mathrm{Sp}\,\sigma^*) = h\left(\dfrac{b}{a}\right) = b$, то $\sigma^* \in Q_2$. Кроме того, из (2.2) и первой части утверждения 1 следует, что (1.29) выполнено. Таким образом u^* и σ^* удовлетворяют (3.11) и инфимум $\bar{J}(u)$ здесь также достигается на разрывной функции.

В том случае, если $a = a_* = 1/\sqrt{6}$, можно построить точное решение задачи о деформации шарового слоя с условием текучести (0.3) и краевыми условиями (3.9) при $U \leqslant U_2 = 2br_2/3\sqrt{6}\,K_0$. Если $U < U_1 = 2\beta b/\sqrt{6}\,r_2^2(3K_0 + 4\mu)$, $\beta = r_2^3 - r_1^3$, то решение является упругим

$$\overset{*}{u}_\varphi = \overset{*}{u}_\theta = 0, \quad \overset{*}{u}_r = \beta^{-1}Ur_2^2 r[1 - r_1^3/r^3]$$

Для того, чтобы построить решение при $U_1 < U < U_2$, используем утверждение 1, а функцию w^0 в (1.24) выберем так, чтобы

$$w^0 = \overset{0}{w}_1 \text{ при } r = r_1, \quad w^0 = \overset{0}{w}_2 \text{ при } r = r_2$$

$$\overset{0}{w}_1 = (\upsilon, 0, 0), \quad \overset{0}{w}_2 = (U, 0, 0)$$

где константа υ определяется из уравнения

$$\frac{v}{r_1}\left(2r_2^3 + r_1^3\frac{3K_0}{2\mu}\right) = \frac{3K_0 + 4\mu}{2\mu} r_2^2 U - \frac{b\beta}{\sqrt{6\mu}} \tag{3.13}$$

Отметим, что $\upsilon > 0$ при $U_1 < U < U_2$. В этом случае задача (1.24) имеет следующее решение

$$\overset{*}{u}_\varphi = \overset{*}{u}_\theta = 0, \quad \overset{*}{u}_r = C_1 r + C_2 r^{-2}, \quad \overset{*}{\sigma}_{r\theta} = \overset{*}{\sigma}_{r\varphi} = \overset{*}{\sigma}_{\theta\varphi} = 0 \tag{3.14}$$

$$\overset{*}{\sigma}_r = 3K_0C_1 - \frac{4\mu}{r^3}C_2, \quad \overset{*}{\sigma}_\theta = \overset{*}{\sigma}_\varphi = 3K_0C_1 + \frac{2\mu}{r^3}C_2$$

где

$$C_1 = (Ur_2^2 - \upsilon r_1^2)\beta^{-1}, \quad C_2 = r_2^2 r_1^2(\upsilon r_2 - Ur_1)\beta^{-1} \tag{3.15}$$

Условие (1.25) с учетом (2.2), (3.14) может быть записано в виде

$$3K_0C_1/2\mu - 2C_2/r_1^3 = b/\sqrt{6}\,\mu$$

Используя (3.13), (3.15), нетрудно проверить, что это равенство выполнено. Таким образом, u^*, σ^*, определенные формулами (3.14), (3.15), представляют собой решение задачи с краевым условием (3.9). Это решение при $U_1 < U < U_2$ имеет разрыв величины υ при $r = r_1$. Отметим, что поскольку

$$F(\sigma^*) = \frac{2\sqrt{6}\mu}{r^3}|C_2| + \frac{3\sqrt{6}K_0}{2}C_1 - b < 0 \quad \forall r \in (r_1, r_2]$$

то согласно (1.5) $\lambda_{ij} \equiv 0$ и, следовательно, $\varepsilon(u^*)$ единственный тензор, удовлетворяющий вместе с σ^* соотношениям (1.3) — (1.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Drucker D.C., Prager W.* Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quart. Appl. Math. 1952. V. 10. № 2. P. 157–165.
2. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
3. *Green R.J.* A plasticity theory for porous solids // Intern. J. Mech. Sci. 1972. V. 14. № 4. P. 215–224.
4. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
5. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966, 232 с.
6. *Drugan W.J., Rice J.R.* Restictions on quasi-statically moving surfaces of stroug discontinuity in elastic-plastic solids // in Mechanics of Material Behavior ed. G.J. Dvorak and R.T. Shield. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1984. P. 59–73.
7. *Репин С.И.* О вариационных постановках для разрывных полей перемещений в задачах деформационной теории пластичности без упрочнения // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1026–1034.
8. *Серегин Г.А.* О корректности вариационных проблем механики идеально-упруго-пластических сред // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 71–75.
9. *Серегин Г.А.* О постановках задач теории идеально-упругопластического тела // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 849–859.
10. *Anzelloti G., Giaquinta M.* Existence of the displacements field for an elasto-plastic body subject to Hencky's law and von Mises yield condition // Manuscripta Math. 1980. V. 32. № 1–2. P. 101–136.
11. *Temam R., Strang G.* Duality and relaxation in the variational problems of plasticity // J. Mechanique. 1980. V. 19. № 3. P. 493–527.
12. *Репин С.И.* Вариационно-разностный метод решения задач идеальной пластичности учитывающий возможность возникновения разрывов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 3. С. 449–453.
13. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
14. *Райс Дж.Р.* Локализация пластической деформации // Теоретическая и прикладная механика: Труды 14-го междунар. конгр. IUTAM / Под ред. Койтера В.Т. М.: Мир, 1979. С. 439–471.
15. *Szuwalski K., Zyczkowski M.* On the phenomenon of decohesion in perfect plasticity // Intern. J. Solids and Structures. 1973. V. 9. № 1. P. 85–98.
16. *Rudnicki J.W., Rice J.R.* Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // J. Mech. and Phys. Solids. 1975. V. 23. № 6. P. 371–394.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
17.I.1992