ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 58, Вып. 1, 1994

УДК 539.3

© В.М. Александров, Д.А. Пожарский

О КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ В ВЕРШИНЕ КЛИНОВИДНОГО ШТАМПА, ВЫХОДЯЩЕЙ НА РЕБРО УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО КЛИНА

При помощи асимптотического метода, примененного ранее для аналогичной задачи [1], изучается поведение контактных напряжений в новой особой точке, являющейся пересечением вершины клиновидного штампа с ребром упругого пространственного клина. Трение в области контакта предполагается отсутствующим. При достаточно малых углах раствора штампа и не слишком малых углах раствора упругого клина в окрестности особой точки $r = 0$ наиболее характерным в разложении контактных давлений оказалось наличие осциллирующего члена вида $r^{-3/2}\cos(\theta \ln r)$, где θ зависит главным образом от угла раствора штампа. В случае же, когда углы раствора штампа и упругого клина имеют один порядок малости, показана возможность возникновения членов вида $r^{-\omega_1-3/2-i\omega_2}, 0<\omega_1<1/2$, которые при $\omega_2 \neq 0$ могут приводить к более сильным осцилляциям контактных давлений в окрестности вершины штампа.

1. Задачи о действии на упругое полупространство абсолютно жесткого штампа, имеющего в плане форму клина, рассматривались в [1–7]. В этих работах основное внимание уделялось определению особенностей контактных давлений в вершине клина. Наиболее сложные случаи, связанные с учетом трения или сцепления между клиновидным штампом произвольного угла раствора и полупространством, исследованы в [4]. В задачах со смешанными граничными условиями представляет интерес выделение особенностей напряжений в угловых точках еще более сложного типа [8].

Задача о вдавливании штампа, занимающего в плане область Ω, в одну грань упругого пространственного клина угла раствора $\alpha(0 < \alpha < 2\pi)$, на другой грани которого выполняется одно из следующих граничных условий (отсутствие напряжений, скользящая или жесткая заделка; r, φ, z – цилиндрические координаты, ось z направлена по ребру клина):

$$
\begin{aligned}
&\text{а) } \sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \\
&\text{б) } u_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \qquad (1.1)\\
&\text{в) } u_r = u_\varphi = u_z = 0
\end{aligned}
$$

сводится к решению интегрального уравнения вида [9, 10]:

$$
\frac{1-\nu}{G}\frac{2}{\pi^3}\iint_\Omega q(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^\infty\int_0^\infty \operatorname{sh}\pi u W_m(u) K_{iu}(\mathrm{tr})\times
$$

$$\times\left[K_{iu}(tx)+\frac{1}{\operatorname{ch}\pi u/2}B_m^u\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{2}K_{iy}(tx)\right\}\right]\cos t(z-y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t=f(r,z),\quad (r,z)\in\Omega \tag{1.2}$$

а) $m=1$, б) $m=2$, в) $m=3$

$$W_1(u)=\frac{\operatorname{sh}2\alpha u+u\sin 2\alpha}{\operatorname{ch}2\alpha u-u^2(1-\cos 2\alpha)+1},\quad W_2(u)=\frac{\operatorname{ch}2\alpha u-\cos 2\alpha}{\operatorname{sh}2\alpha u+u\sin 2\alpha}$$

$$W_3(u)=\frac{\kappa\operatorname{sh}2\alpha u-u\sin 2\alpha}{\kappa\operatorname{ch}2\alpha u+u^2(1-\cos 2\alpha)+(1+\kappa^2)/2},\quad \kappa=3-4\nu$$

$$B_1^u=\frac{W_+(u)}{2W_1(u)}B_+^u-\frac{W_-(u)}{2W_1(u)},\quad W_\pm(u)=\pm\frac{\operatorname{ch}2\alpha u\mp\cos\alpha}{\operatorname{sh}2\alpha u\pm u\sin\alpha}$$

$$B_{\pm,2,3}^u=\sum_{n=1}^{\infty}(1-2\nu)^n(A_{\pm,2,3}^u)^n$$

$$A_{\pm,2,3}^u\{f(y)\}=\int_0^\infty L_{\pm,2,3}(u,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$L_{\pm,2,3}(u,y)=2\operatorname{ch}\frac{\pi u}{2}\operatorname{sh}\frac{\pi y}{2}W_{\pm,2,3}(y)\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}\pi t g_{\pm,2,3}(t)\,\mathrm{d}t}{(\operatorname{ch}\pi t+\operatorname{ch}\pi u)(\operatorname{ch}\pi t+\operatorname{ch}\pi y)}$$

$$g_\pm(t)=\begin{Bmatrix}\operatorname{cth}\alpha t/2\\ \operatorname{th}\alpha t/2\end{Bmatrix}\frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{ch}\alpha t\mp\cos 2\alpha},\quad g_2(t)=\frac{\operatorname{cth}\alpha t\sin^2 2\alpha}{\operatorname{ch}\alpha t\mp\cos 4\alpha} \tag{1.3}$$

$$g_3(t)=-\frac{\operatorname{th}\alpha t\sin^2 2\alpha}{\operatorname{ch}2\alpha t+\cos 4\alpha}+\sin^2\alpha\{f_1(t)[2f_2(t)-ft_3(t)]-$$

$$-f_4(t)[2f_3(t)+tf_2(t)]\}/f_5(t)-2(1-\nu)\sin\alpha\{f_1(t)(\sin 3\alpha-$$

$$-\sin\theta\operatorname{ch}2\alpha t)-f_4(t)\cos\alpha\operatorname{sh}2\alpha t\}/f_5(t)$$

$$f_1(t)=\kappa\operatorname{sh}2\alpha t\cos 2\alpha-t\sin 2\alpha,\ f_2(t)=\cos 2\alpha+\sin^2 2\alpha-\operatorname{ch}2\alpha t$$

$$f_3(t)=\sin 2\alpha\operatorname{th}\alpha t(1+\cos 2\alpha),\ f_4(t)=\sin 2\alpha(\kappa\operatorname{ch}2\alpha t-1)$$

$$f_5(t)=[f_1^2(t)+f_4^2(t)](\operatorname{sh}^2\alpha t+\cos^2 2\alpha)$$

Здесь $f(r, z)$ – функция, определяемая формой основания штампа и степенью его внедрения в клин, $q(r, z)$ – контактные напряжения под штампом, G и ν – соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала клина.

Как показано в [9], функциональные ряды Неймана B_m^u ($m = 1, 2, 3$) в формулах (1.2), (1.3) сходятся равномерно в пространстве непрерывных ограниченных на полуоси функций $C_M(0, \infty)$ при всех практически значимых коэффициентах Пуассона $\nu > \nu_*(\alpha)$, т.е. значения $\nu_*(\alpha)$ обычно близки к нулю.

Пусть область Ω – бесконечный клин угла раствора 2β ($0 < \beta < \pi/2$), описываемый в полярных координатах ρ, ψ ($r = \rho\cos\psi$, $z = \rho\sin\psi$) неравенствами $0 \leqslant \rho < \infty$, $|\psi| \leqslant \beta$. Для исключения решений уравнения (1.2) с бесконечной энергией далее будем рассматривать лишь случай, когда к функциям $q_*(\rho, \psi) = (1-\nu)\,q(r, z)/G$ и $f_*(\rho, \psi) = f(r, z)$ применимо преобразование Меллина по переменной ρ и

$$\int_{-\beta}^{\beta}\mathrm{d}\psi\int_0^\infty\left|\begin{Bmatrix}q_*(\rho,\psi)\\ f_*(\rho,\psi)\end{Bmatrix}\right|\rho\,\mathrm{d}\rho<\infty \tag{1.4}$$

Применяя теперь к обеим частям уравнения (1.2), записанного в полярных координатах ρ, ψ, интегральное преобразование Меллина по ρ, получим [11]:

$$\int_{-1}^{1} q_s(\xi) K_s\left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f_s(x), \quad |x| \leq 1 \tag{1.5}$$

$$K_s(t,p) = \frac{\pi}{2\cos\pi s} P_{s-\frac{1}{2}}(-\cos(t-p)) + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \operatorname{sh}\pi u (W_m(u) - \operatorname{dh}\pi u) \times$$
$$\times [R_+(-s,u,t) R_+(s,u,p) + R_-(-s,u,t) R_-(s,u,p)] \mathrm{du} +$$
$$+ \int_0^{\infty} \operatorname{sh}\frac{\pi u}{2} W_m(u) \Big[R_+(s,u,p) B_m^u \left\{ \operatorname{ch}\frac{\pi y}{2} R_+(-s,u,t) \right\} +$$
$$+ R_-(s,u,p) B_m^u \left\{ \operatorname{ch}\frac{\pi y}{2} R_-(-s,u,t) \right\} \Big] \mathrm{du} \quad (|\operatorname{Re} s| < 1/2) \tag{1.6}$$
$$R_{\pm}(s,u,t) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2} + s + iu\right) \begin{Bmatrix} \operatorname{cosec}[\pi(1/2 + s - iu)/2] \\ \sec[\pi(1/2 + s - iu)/2] \end{Bmatrix} \times$$
$$\times [P_{s-1/2}^{-iu}(\sin t) \pm P_{s-1/2}^{-iu}(-\sin t)]$$
$$x = \psi/\beta, \quad \lambda = 1/\beta, \; q_s(x) = q_s^*(\psi), \; f_s(x) = f_s^*(\psi)/\beta$$
$$\frac{1}{2\pi r}\int_{\Gamma} q_s^*(\psi) \rho^{-s-3/2} \mathrm{ds} = q_*(\rho,\psi), \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f_s^*(\psi)\rho^{-s-1/2} \mathrm{ds} = f_*(\rho,\psi)$$

Здесь Γ – прямая в плоскости комплексного переменного s, параллельная мнимой оси, $\Gamma(s)$ – гамма-функция, $P_s^{\mu}(x)$ – сферические функции [12].

При выводе формулы (1.6) для $K_s(t, p)$ учтено значение интеграла, соответствующего случаю полупространства ($m = 1$, $\alpha = \pi$) [3]

$$\int_0^{\infty} \operatorname{ch}\pi u [R_+(-s,u,t) R_+(s,u,p) + R_-(-s,u,p)] \mathrm{du} =$$
$$= \frac{\pi}{\cos\pi s} P_{s-1/2}(-\cos(t-p)), \quad |\operatorname{Re} s| < 1/2$$

Лемма. Ядро интегрального уравнения (1.5) вида (1.6) является симметричным, т.е. $K^s(t, p) = K_s(p, t)$.

Доказательство леммы получается с учетом равенства [12]

$$P_{s-1/2}^{\mu}(x) = P_{-s-1/2}^{\mu}(x)$$

при помощи перестановок интегралов и замен переменных интегрирования в каждом члене ряда Неймана B_m^u, входящего в выражение для функции $K_s(t, p)$.

Для ядра (1.6) интегрального уравнения (1.5) имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$K_s\left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n}} \left\{ \left(a_n(s) + b_n(s) \ln\left|\frac{\xi - x}{\lambda}\right| \right) (\xi - x)^{2n} + f_{2n}^s(\xi, x) \right\} \tag{1.8}$$

где $f_{2n}^s(\xi, x)$ – полиномы степени $2n$, удовлетворяющие условиям $f_{2n}^s(f\xi, tx) = t^{2n} f_{2n}^s(\xi, x)$, $f_{2n}^s(\xi, x) = f_{2n}^s(x, \xi)$.

Формула (1.8) получается путем разложения интегральных членов в выражении

(1.6) для функции $K_s(t, p)$ в ряд Маклорена, а первого слагаемого вида (1.7) в ряд (1.9) из статьи [3]. Можно показать, что ряд (1.8) сходится равномерно по $|\xi|$, $|x| \leqslant 1$ при $\lambda > \max(1/(2\alpha), 2/\pi)$, т.е. при малых α должно выполняться неравенство $\alpha > \beta/2$.

Несколько первых членов ряда (1.8) имеют вид:

$$a_0(s) = -C - \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{2}+s) - \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{2}-s) + \ln 2$$

$$a_1(s) = \tfrac{1}{8}(\tfrac{1}{4}-s^2)[2\psi(2) - \psi(\tfrac{3}{2}+s) - \psi(\tfrac{3}{2}-s) + 2\ln 2] + 373/9000$$

$$b_0(s) = -1, \quad b_1(s) = -\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}-s^2)$$

$$f_0^s(\xi, x) = d_0(s) = \int_0^\infty F(u,s)du \quad (|\operatorname{Re} s| < \tfrac{1}{2})$$

$$F(u,s) = \frac{1}{4\pi^2}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{s}{2}+i\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{s}{2}-i\frac{u}{2}\right)\times$$

$$\times[\operatorname{sh}\pi u(W_m(u) - \operatorname{cth}\pi u)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{s}{2}+i\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{s}{2}-i\frac{u}{2}\right)+ \qquad (1.9)$$

$$+2\operatorname{sh}\frac{\pi u}{2}W_m(u)B_m^u\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi u}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{s}{2}+i\frac{y}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{s}{2}-i\frac{y}{2}\right)\right\}\Bigg]$$

$$f_2^s(\xi, x) = d_2^1(s)(\xi^2 + x^2) + d_2^2(s)\xi x$$

$$d_2^1(s) = \int_0^\infty\left(\frac{1}{4} - s^2 + u^2\right)F(u,s)du \quad (|\operatorname{Re} s| < \tfrac{1}{2})$$

$$d_2^2(s) = -\int_0^\infty \frac{\Gamma(\tfrac{1}{2}+s+iu)(\tfrac{1}{2}+s+iu)}{\cos\pi[(\tfrac{1}{2}+s-iu)/2]}P_{\frac{1}{2}+s}^{-iu}(0)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\operatorname{sh}\pi u(W_m(u) - \operatorname{cth}\pi u)\frac{\Gamma(\tfrac{1}{2}-s+iu)(\tfrac{1}{2}-s+iu)}{\cos\pi[(\tfrac{1}{2}-s-iu)/2]}P_{\frac{1}{2}-s}^{-iu}(0)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sh}\frac{\pi u}{2}W_m(u)B_m^u\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{2}\frac{\Gamma(\tfrac{1}{2}-s+iy)(\tfrac{1}{2}-s+iy)}{\cos\pi[(\tfrac{1}{2}-s-iy)/2]}P_{\frac{1}{2}-s}^{-iy}(0)\right\}\right]\mathrm{du}$$

где C – постоянная Эйлера, $\psi(s)$ – пси-функция [12].

Асимптотическое при малых β решение интегрального уравнения (1.5) с ядром (1.8) можно получить методом "больших λ" [3]. Далее для определенности ограничимся случаем

$$f_*(\rho, \psi) = f\rho^\mu e^{-\gamma\rho}(\mu \geqslant \delta - 1, \delta > 0, \mu > 0) \qquad (1.10)$$

При $\mu = 0$, $\gamma \to 0$ такой штамп вырождается в плоский. Используя известный интеграл [12], из (1.10) находим

$$f_r^*(\psi) = f\gamma^{-(s+\frac{1}{2}+\mu)}\Gamma(s+\tfrac{1}{2}+\mu), \quad \operatorname{Re} s > -\tfrac{1}{2} - \mu \qquad (1.11)$$

Пусть β настолько мало, что можо пренебречь членами порядка λ^{-2} и выше. Тогда решение задачи можно представить в форме

$$q_*(\rho, \psi) = \frac{f\gamma^{-\mu+1}}{2\pi i\sqrt{\beta^2 - \psi^2}}\int_\Gamma \frac{(\rho\gamma)^{-s-\frac{3}{2}}\Gamma(s+\tfrac{1}{2}+\mu)}{g(s)}\mathrm{ds} \qquad (1.12)$$

$$g(s) = \ln 4\lambda - C - \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{2}+s) - \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{2}-s) + d_0(s) \qquad (1.13)$$

По формуле (1.12) при помощи теории вычетов можно получить приближенное решение задачи при малых β, если только известны нули функции $g(s)$ (1.13). Положение прямой Γ выбирается из условия (1.4) и сходимости интеграла

$$q_s^*(\psi) = \int_0^\infty q_*(\rho\psi)\rho^{s+1/2}\,d\rho \tag{1.14}$$

2. Изучим в полосе $|\operatorname{Re} s| \leqslant 3/2$ нули функции $g(s)$, заданной по формуле (1.13), учитывая, что как следует из доказанной выше леммы, она принимает действительные значения на действительной и мнимой осях, и $g(-s) = g(s)$. Были найдены [3] расположенные в этой же полосе нули фукнции $g_0(s) = g(s) - d_0(s)$. Функция $d_0(s)$, заданная при $|\operatorname{Re} s| < 1/2$ интегралом (1.9), должна рассматриваться при $|\operatorname{Re} s| \geqslant 1/2$ как аналитическое продолжение этого интеграла. На действительной оси при $s = 1/2$ функция $g(s)$ имеет простой полюс, вычет в котором равен $-V_m (m = 1, 2, 3)$, где

$$V_m = \frac{1}{2} + A_m(1 + \overset{0}{B}_m\{1\}) - \frac{1}{\pi},\ A_m = \lim_{u\to 0} uW_m(u) \tag{2.1}$$

Очевидно, $V_3 = 1/2 - 1/\pi \approx 0{,}182$. Ниже приведены значения $V_{1,2}$ в зависимости от $\alpha = \pi k/4$ при $\nu = 0{,}3$

k	1	2	3	4	5	6	7
$V1$	8,27	0,969	0,583	0,500	0,493	0,406	0,350
$V2$	0,649	0,818	0,462	0,182	0,296	0,394	0,283

Кроме того, при $\alpha \to 0$ $V_1 \to +\infty$, а $V_2 \to 1/2 - 1/\pi$.

При вычислении $V_{1,2}$ по формуле (2.1) вместо суммирования рядов Неймана $\overset{0}{B}_{1,2}\{1\}$ удобнее решать соответствующие интегральные уравнения Фредгольма второго рода [9] методом механических квадратур с использованием квадратурной формулы Гаусса. Это замечание относится и к другим расчетам, связанным с оператором $\overset{0}{B}_{1,2} (m = 1, 2, 3)$.

Из проведенных расчетов следует, что, как правило, на действительной оси $g(1/2 \pm 0) = \mp\infty$. Можно убедиться, что $g(3/2 - 0) = +\infty$. $g(i\infty) = -\infty$. При достаточно больших значениях λ, очевидно, $g(0) > 0$. Поэтому при фиксированном угле α и $\lambda > \lambda_*(\alpha)$ функция $g(s)$ имеет в полосе $|\operatorname{Re} s| \leqslant 3/2$ по два однократных нуля на мнимой и действительной осях вида $s_{1,2} = \pm i\theta$, $\theta = \theta(\alpha, \lambda) = O(\lambda)(\lambda \to \infty)$; $s_{3,4} = \pm(1/2 + \eta)$, $\eta = \eta(\alpha, \lambda) \in (0;1)$, причем при $\alpha \to 0$ $\lambda_*(\alpha) = O(e^{1/(4\alpha)})$. Из теоремы о нулях функции $g_0(s)$, доказанной в [3], и теоремы Руше можно заключить, что при фиксированном α и $\lambda \to \infty$ нули функции $n(s)$, лежащие на мнимой оси – единственные в полосе $|\operatorname{Re} s| < 1/2$. Например, при $\lambda = 5, \nu = 0{,}3, \alpha = \pi k/4 (k = 1, 2, \ldots, 7)$ для всех типов граничных условий (1.1) $(m = 1, 2, 3)$ $s_{1,2} \approx \pm i11{,}2$, что объясняется экспоненциальным убыванием функции $|\Gamma(z + iy)|$, входящей в выражение (1.9) для $d_0(s)$, при $|y| \to \infty$, $x, y \in R$. При малых α, сравнимых с $\beta = 0{,}2$ (λ, ν – те же), значения θ таковы:

α	0,1	0,2	0,4
$m=1$	19,3	13,0	11,3
$m=2$	0,0960	10,2	11,2
$m=3$	–	8,38	11,2

При фиксированном значении λ и $\alpha \to 1/(2\lambda) + 0$ уравнение $g(s) = 0$ может иметь в полосе $|\mathrm{Re}s| < 1/2$ дополнительный комплексные корни. Так, для упругого клина, одна грань которого жестко заделана ($m = 3$), при $\alpha = 0{,}166$, $\lambda = 5$, $\nu = 0{,}3$ функция $g(s)$ имеет 8 чисто мнимых нулей в интервале ($i2{,}1$; $i5{,}1$) и 3 действительных нуля в интервале (0; $1/2$). При $\alpha = 2\beta = 0{,}4$ ($\lambda = 5$, угол упругого клина равен углу штампа), $\nu = 0{,}3$, $m = 3$ два дополнительных действительных корня лежат в интервале (0,46; 0,5).

Пусть контур Г в формуле (1.12) лежит в полосе $0 < \mathrm{Re}s < 1/2$ и пересекает действительную ось правее лежащего в этой полосе нуля функции $g(s)$ $s = \omega_1 + i\omega_2$ с наибольшей действительной частью ω_1 (если такие нули вообще имеются), а также правее значения $-(1/2 + \mu)$, если оно принадлежит интервалу (0; $1/2$). Тогда при помощи теории вычетов можно найти главные члены асимптотики функции $q_*(\rho, \psi)$ при $\rho \to 0$. Предположим вначале, что в полосе $|\mathrm{Re}s| < 1/2$ $g(s)$, лежащие на мнимой оси – единственные ($\lambda > \lambda_*(\alpha)$). Тогда, если $\delta - 1 \leqslant \mu < -1/2$, то главной особенностью функции $q_*(\rho, \psi)$ будет $\rho^{\mu-1}$, на втором месте будут осциллирующие особенности $\rho^{-3/2}\cos\theta(\ln\rho\gamma)$ и $\rho^{-3/2}\cos(\theta\ln\rho\gamma)$. Если $\mu \geqslant -1/2$, то осциллирующие особенности становятся главными.

Таким образом, в окрестности вершины клиновидного штампа, выходящей на ребро упругого клина, могут нарушаться условия контакта. Для упругого клина, одна грань которого свободна от напряжений ($m = 1$), частота этих осцилляций возрастает при $\alpha \to 1/(2\lambda) + 0$.

Пусть теперь в полосе $0 < \mathrm{Re}s < 1/2$ у уравнения $g(s) = 0$ появляется один дополнительный комплексный корень $s = \omega_1 + i\omega_2, \omega_2 \neq 0$ (α и β одного порядка малости; $g(s) \neq 0$ при $\mathrm{Re}s = 1/2$). В этом случае при $\delta - 1 \leqslant \mu < -(\omega_1 + 1/2)$ главной особенностью функции контактных напряжений будет $\rho^{\mu-1}$, на втором месте будут более сильные, чем раньше, осциллирующие особенности $\mu \geqslant -(\omega_1 + 1/2)$, то эти осциллирующие особенности выходят на первое место.

При помощи теоремы Руше можно показать, что описанная качественная картина не изменится, если в метод "больших λ", не пренебрегать членами порядка λ^{-2} и выше. Заметим что функции $a_1(s), d_2^1(s), d_2^2(s)$ (см. (1.9)) в отличие от $a_0(s)$ и $d_0(s)$ не имеют полюсов в точках $s = \pm 1/2$.

Аналогичным образом найдем, что при $\rho \to \infty$ функция $q_*(\rho,\psi) \sim O(\rho^{-2-\eta})$, где $\mathrm{Re}s = 1/2 + \eta$ – наименьшая действительная часть корней уровнения $g(s) = 0$ в полосе $1/2 < \mathrm{Re} < 3/2$.

Учитывая поведение функции $q_*(\rho,\psi)$ при $\rho \to 0$ и $\rho \to \infty$, убедимся, что соответствующий интеграл (1.4) сходится. Интеграл (1.14), очевидно, также сходится, если только прямая Г пересекает действительную ось немного левее точки $s = 1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В.М., Бабешко В.А.* О давлении на упругое полупространство штампа клиновидной формы в плане // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 88–93.
2. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.. Наука, 1980. 303 с.
3. *Рвачев В.Л., Проценко В.С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 235 с.
4. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.

5. *Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Один метод решения смешанных задач теории упругости для клиновидных областей // Изв. СКНЦ ВШ. Ест. науки. № 1. С. 21–24.
6. *Keer L.M., Parihar K.S.* A Note on the singularity at the corner of a wedge-shaped punch or a crack // SIAM J. Appl. Math. 1978. V. 34. № 2. P. 297–302.
7. *Parihar K.S., Keer L.M.* The singulatiry at apex of a Bonded Wedge-Shaped stamp // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1979. V. 46. No. 3. P. 577–580.
8. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Лапина О.Н.* Особенность напряжений в окрестности вершины упругого трехгранника // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 5. С. 1113–1116.
9. *Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И.* Обобщение задач Буссинеска и Черрути для случая упругого пространственного клина // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 1. С. 58–61.
10. *Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебвков М.И.* Внедрение штампа в форме эллиптического параболоида и упругий пространственный клин // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 286–295.
11. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 50 с.
12. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Москва, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
13.V.1993