УДК 539.3

© 1994 г. С.М. Мхитарян

# О ВДАВЛИВАНИИ ПОЛОСОВОГО ШТАМПА В ДЕФОРМИРУЮЩЕЕСЯ ПО СТЕПЕННОМУ ЗАКОНУ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В постановке нелинейной теории установившейся ползучести рассматривается контактная задача о вдавливании полосового в плане штампа в полупространство при степенной зависимости между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций [1, 2]. В рамках обобщенного принципа суперпозиции перемещений [1, 2] задача формулируется в виде того же интегрального уравнения, что и аналогичная задача из [3]. В отличие от [3] строится замкнутое решение этого уравнения, что достигается применением спектрального соотношения для интегрального оператора, порожденного на конечном интервале симметричным разностным ядром в виде функции Макдональда.

Такое спектральное соотношение, содержащее сфероидальные волновые функции, которые являются обобщением функций Матье, методами типа теории потенциала в другом виде установлено в [4], где, однако, собственные значения в явном виде не получены и не указаны полные условия нормировки собственных функций. Между тем вычисление собственных значений в явном виде наталкивается на аналитические трудности. Поэтому вопрос получения упомянутого спектрального соотношения в конструктивном виде методом, развитым в [5], вновь обсуждается ниже. Методами теории обобщенного потенциала [3, 6, 7], связанными с уравнением Эйлера–Пуассона–Дарбу и, в конечном счете, отличными от применяемых в [4], это соотношение устанавливается полностью. Устанавливается также родственное с ним соотношение, справедливое на дополнительных полубесконечных интервалах. Они оба могут быть применены к решению многих смешанных задач теории упругости и математической физики.

Обширный класс подобных спектральных соотношений для ортогональных полиномов и многочисленные их приложения к смешанным задачам теории упругости приведены в [8, 9].

1. Пусть штамп, имеющий в плане форму полосы $\omega = \{z = 0, -\infty < x < \infty, -a < y < a\}$, под действием определенных моментов и вертикальных распределенных по всей его длине сил $p_0(x, y)$, обладающих конечной равнодействующей $P$, перемещается только поступательно в вертикальном направлении и вдавливается в полупространство $z < 0$, отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$. Будем полагать, что материал полупространства несжимаем и подчиняется степенной зависимости $\sigma_i = K\varepsilon_i^k$ $(0 < h \leqslant 1)$, где $\sigma_i$ и $\varepsilon_i$ – интенсивности напряжений и скоростей деформаций, а $K$ и $h$ – физические постоянные [1, 2].

Исходя из известных результатов [10], согласно обобщенному принципу суперпозиции перемещений, для вертикальных перемещений $u_z(x, y)$ ($u_z(x, y)$ фактически будут скоростями, а не перемещениями; однако для единообразия в дальнейшем будем употреблять термин "перемещения") граничных точек полупространства за счет нормаль-

ных неизвестных контактных напряжений $p(x, y)$, действующих в области $\omega$, будем иметь

$$u_z(x,y) = -A\left\{\iint\limits_{\omega} \frac{p(\xi,\eta)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1-h/2}}\right\}^{\gamma} \tag{1.1}$$

$$A = c(h)K^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{h}$$

где $c(h)$ – определенная постоянная [10], причем $c(^2/_3) = 0$, $c(1) = 1/(4\pi)$ и $c(h) > 0$ при $2/3 < h \leqslant 1$. Последнее ограничение на $h$ в дальнейшем будем считать соблюденным.

Теперь, приняв во внимание известное условие контакта

$$-w(x,y) = \delta - f(x,y) \quad ((x,y,0) \in \omega)$$

где $\delta$ – осадка штампа, а $f(x, y)$ – функция, характеризующая его основание, при помощи (1.1) придем к следующему интегральному уравнению относительно $p(x, y)$:

$$\iint\limits_{\omega} \frac{p(\xi,\eta)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1-h/2}} = \left[\frac{\delta - f(x,y)}{A}\right]^h \tag{1.2}$$

$$\iint\limits_{\omega} p(\xi,\eta)d\xi d\eta = P \quad (P < \infty)$$

Сравнение асимптотик левых и правых частей в (1.2) при $x^2 + y^2 \to \infty$ дает соотношение

$$f(x,y) \approx \delta - AP^{\gamma}(x^2+y^2)^{1/2-\gamma} \quad (x^2+y^2 \to \infty)$$

откуда фактически определяется $\delta$.

Далее в интегральном уравнении (1.2) перейдем к безразмерным переменным, заменив $x$, $y$; $\xi$, $\eta$ соответственно на $ax$, $ay$; $a\xi$, $a\eta$. В результате будем иметь уравнение

$$\iint\limits_{\omega_0} \frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\mu+1/2}} = g(x,y) \tag{1.3}$$

$$\omega_0 = \{z = 0, \ -\infty < x < \infty, \ -1 < y < 1\}$$

$$\varphi(x,y) = A^h p(ax,ay), \quad g(x,y) = [\delta_0 - f_0(x,y)]^h$$

$$\delta_0 = \delta / a, \quad f_0(x,y) = f(ax,ay)/a, \quad \mu = (1-h)/2$$

Таким образом, решение поставленной контактной задачи сводится к решению интегрального уравнения (1.3). Обобщенные перемещения $w(x, y)$ граничных точек полупространства вне полосового штампа согласно (1.1) определяются формулой

$$w(x,y) = \iint\limits_{\omega_0} \frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\mu+1/2}}, \quad (x,y) \in \Pi \setminus \omega_0 \tag{1.4}$$

где

$$\Pi = \{z = 0, \ -\infty < x, y < \infty\}, \quad w(x,y) = [-a^{-1}u_z(x,y)]^h$$

При помощи интегрального преобразования Фурье по переменной $x$ и известной формулы [11] (с. 443, 3.773.6) уравнение (1.3) можно свести к следующему эквива-

лентному одномерному интегральному уравнению:

$$\int_{-1}^{1}\frac{K_\mu(|s||y-\eta|)}{|y-\eta|^\mu}\varphi_s(\eta)d\eta = f_s(y) \tag{1.5}$$

$$\varphi_s(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)e^{isx}dx,\quad g_s(y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)e^{isx}dx$$

$$f_s(y)=F_s(\mu)g_s(y),\quad F_s(\mu)=\pi^{-1/2}2^{\mu-1}\Gamma(\mu+1/2)|s|^{-\mu}$$

где $K_\mu(y)$ – функция Макдональда. При этом соотношение (1.4) примет вид

$$w_s(y)=\int_{-1}^{1}\frac{K_\mu(|s||y-\eta|)}{|y-\eta|^\mu}\psi_s(\eta)d\eta,\quad |y|>1 \tag{1.6}$$

$$\psi_s(y)=\frac{\varphi_s(y)}{F_s(\mu)},\quad w_s(y)=\int_{-\infty}^{\infty}w(x,y)e^{isx}dx$$

**2.** Решение интегрального уравнения (1.3) или же эквивалентного ему уравнения (1.5) построим методами теории обобщенного потенциала. С этой целью введем в рассмотрение обобщенный потенциал

$$U(x,y,z)=\iint_{\omega_0}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{\mu+1/2}}(|\mu|<1/2) \tag{2.1}$$

Тогда на основании известных результатов [3, 6, 7] можно показать, что интегральное уравнение (1.3) эквивалентно следующей краевой задаче для внешней к $\omega_0$ области:

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}+\frac{2\mu}{z}\frac{\partial U}{\partial z}=0\quad((x,y,z)\,\overline{\in}\,\omega_0) \tag{2.2}$$

$$U(x,y,z)|_{z=0}=g(x,y)\quad((x,y,0)\in\omega_0)$$

$$U(x,y,z)\approx Qr^{-1-2\mu}\quad(r\to\infty,\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad Q=PA^h/\tilde{a}^2)$$

Уравнение из (2.2) называется дифференциальным уравнением Эйлера–Пуассона–Дарбу, некоторые свойства которого освещены в [12].

После того как построено решение краевой задачи (2.2), плотность источников – решение уравнения (1.3), определится по формуле [6]

$$-2\pi\varphi(x,y)=\operatorname{sgn}z\lim_{z\to0}|z|^{2\mu}\frac{\partial U}{\partial z}((x,y,0)\in\omega_0) \tag{2.3}$$

При помощи преобразования Фурье по переменной $x$ краевую задачу (2.2) можно свести к следующей эквивалентности краевой задаче:

$$\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}+\frac{2\mu}{z}\frac{\partial V}{\partial z}-s^2V=0\quad((y,z)\,\overline{\in}\,L) \tag{2.4}$$

$$V(y,z,s)|_{z=0}=g_s(y)\quad((y,0)\in L)$$

$$V(y,z,s)\to0\quad(y^2+z^2\to\infty)$$

для всей плоскости $yz$ с разрезом по отрезку $L = \{z = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$, причем согласно (2.1)

$$V(y,z,s) = U_s(y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x,y,z)e^{isx}dx = \tag{2.5}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,|s|^{\mu}}{2^{\mu-1}\Gamma(\mu+1/2)} \int_{-1}^{1} \frac{K_{\mu}(|s|\sqrt{(y-\eta)^2+z^2})}{[(y-\eta)^2+z^2]^{\mu/2}} \varphi_s(\eta)d\eta$$

При этом формула (2.3) приобретает вид

$$-2\pi\varphi_s(y) = \operatorname{sgn} z \lim_{z\to 0} |z|^{2\mu} \frac{\partial V}{\partial z}((y,0) \in L) \tag{2.6}$$

В конечном итоге получим, что интегральное уравнение (1.5) в свою очередь эквивалентно краевой задаче (2.4), причем их решения связаны между собой соотношением (2.6).

Решение краевой задачи (2.4) построим методом разделения переменных. Положим

$$V(y,z,s) = |z|^{-\mu}\, W(y,z,s) \tag{2.7}$$

и введем эллиптические координаты [13]

$$w = y + iz = \operatorname{ch}\zeta, \quad \zeta = u + i\upsilon, \quad u \geqslant 0, \ -\pi < \upsilon \leqslant \pi \tag{2.8}$$

$$y = \operatorname{ch} u \cos\upsilon, \quad z = \operatorname{sh} u \sin\upsilon \tag{2.9}$$

При помощи конформного отображения (2.8) комплексная плоскость $w$ с разрезом $L$ отображается на полуполосу $\Pi_+ = \{u \geqslant 0, -\pi < \upsilon \leqslant \pi\}$, причем линии $u = 0$ соответствует дважды покрываемый отрезок $L$ плоскости $w$.

Учитывая (2.9), положим

$$W(y,z,s) = W(\operatorname{ch} u \cos\upsilon, \operatorname{sh} u \sin\upsilon, s) = W_0(u,\upsilon) = F(u)G(\upsilon) \tag{2.10}$$

На основании известных результатов [13] после некоторых элементарных преобразований уравнение в частных производных из (2.4) сведем к следующим двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$F'' - [\alpha + 2q\operatorname{ch} 2u - \mu(1-\mu)\operatorname{sh}^{-2} u]F = 0, \quad 0 \leqslant u < \infty \tag{2.11}$$

$$G'' + [\alpha + 2q\cos 2\upsilon + \mu(1-\mu)\sin^{-2}\upsilon]G = 0, \quad -\pi < \upsilon \leqslant \pi \ \ (q = s^2/4) \tag{2.12}$$

где $\alpha$ – параметр разделения. Видно, что если формально положить $\upsilon = iu$, то уравнение (2.12) переходит в уравнение (2.11). Поэтому можно ограничиться одним из них, например, уравнением (2.12). Это уравнение должно рассматриваться при условии периодичности

$$G(\upsilon) = G(\upsilon + 2\pi) \tag{2.13}$$

Подстановкой $G(\upsilon) = \sqrt{|\sin\upsilon|}H(\upsilon)$ уравнение (2.12) преобразуется в дифференциальное уравнение для сфероидальных волновых функций [13] (с. 170)

$$\frac{d^2H}{d\upsilon^2} + \operatorname{ctg}\upsilon\frac{dH}{d\upsilon} + [\lambda + 4\theta\sin^2\upsilon - \kappa^2\sin^{-2}\upsilon]H = 0 \tag{2.14}$$

$$\lambda = \alpha - 1/4 + 2q, \quad \theta = -q = -s^2/4, \quad \kappa = 1/2 - \mu$$

Уравнение (2.14) и его решения обстоятельно рассмотрены в [14], а также [15]. Двумя линейно независимыми решениями (2.14) являются сфероидальные волновые

функции:

$$P^{\kappa}s_{\nu}(\cos\upsilon,\theta)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^r a^{\kappa}_{\nu,r}(\theta)P^{\kappa}_{\nu+2r}(\cos\upsilon) \tag{2.15}$$

$$Q^{\kappa}s_{\nu}(\cos\upsilon,\theta)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^r a^{\kappa}_{\nu,r}(\theta)Q^{\kappa}_{\nu+2r}(\cos\upsilon)\quad(0<\upsilon<\pi)$$

где $\nu$ – характеристический показатель уравнения (2.14), причем $\lambda=\lambda^{\kappa}_{\nu}(\theta)$ и $\lambda^{\kappa}_{\nu}(0)=$ $=\nu(\nu+1)$, $P^{\kappa}_{\nu}(x)$ и $Q^{\kappa}_{\nu}(x)$ – функции Лежандра первого и второго рода соответственно, а коэффициенты $a^{\kappa}_{\nu,r}(\theta)$ определяются из трехчленных рекуррентных соотношений ([13], с. 171, (9)). Эти коэффициенты выбираются так, чтобы

$$a^{\kappa}_{\nu,0}(\theta)=a^{\kappa}_{-\nu-1,0}(\theta)=a^{-\kappa}_{\nu,0}(\theta),\quad a^{\kappa}_{\nu,0}(0)=1$$

Тогда [13]

$$a^{\kappa}_{\nu,r}(\theta)=a^{\kappa}_{-\nu-1,-r}(\theta)=\frac{\Gamma(\nu-\kappa+2r+1)}{\Gamma(\nu-\kappa+1)}\cdot\frac{\Gamma(\nu+\kappa+1)}{\Gamma(\nu+\kappa+2r+1)}a^{-\kappa}_{\nu,r}(\theta) \tag{2.16}$$

Чтобы определить $\nu$ и выделить одно из решений (2.15), заметим, что согласно второму соотношению краевой задачи (2.4), где на разрезе вдоль $L$ вследствие (2.9) необходимо положить $y=\cos\upsilon$, искомый потенциал должен быть четной функцией $\upsilon$. Это условие вместе с условием периодичности (2.13) и уравнением (2.14) составляют граничную задачу Штурма–Лиувилля. При помощи последнего и известных тригонометрических разложений функций $P^{\kappa}_{\nu}(\cos\upsilon)$ и $Q^{\kappa}_{\nu}(\cos\upsilon)$ ([16], с. 147) непосредственно находим

$$\nu=n-\kappa\quad(n=0,1,2,\ldots) \tag{2.17}$$

причем надо брать первое решение (2.15). Но в разбираемом случае, как вытекает из (2.16) и (2.17),

$$a^{\kappa}_{\nu,r}(\theta)=0\quad\text{при}\quad r\leqslant-[n/2]-1$$

Следовательно, первый ряд (2.15) на некотором члене слева обрывается. С учетом последнего и известной зависимости между функциями Лежандра первого рода и полиномами Гегенбауэра $C^{\mu}_{n}(x)$ ([16], с. 177, (4)), окончательно находим

$$G^{\kappa}_{n}(\upsilon)=\sqrt{\sin\upsilon}Ps^{\kappa}_{n-\kappa}(\cos\upsilon,\theta)=\frac{2^{\kappa}(\sin\upsilon)^{1/2-\kappa}\Gamma(1-2\kappa)}{\Gamma(1-\kappa)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r-m}(2r)!}{\Gamma(2r+1-2\kappa)}\times \tag{2.18}$$

$$\times a^{\kappa}_{2m-\kappa,r-m}(\theta)C^{1/2-\kappa}_{2r}(\cos\upsilon)\quad(n=2m)$$

$$G^{\kappa}_{n}(\upsilon)=\sqrt{\sin\upsilon}Ps^{\kappa}_{n-\kappa}(\cos\upsilon,\theta)=\frac{2^{\kappa}(\sin\upsilon)^{1/2-\kappa}\Gamma(1-2\kappa)}{\Gamma(1-\kappa)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r-m}(2r+1)!}{\Gamma(2r+2-2\kappa)}\times$$

$$\times a^{\kappa}_{2m+1-\kappa,r-m}(\theta)C^{1/2-\kappa}_{2r+1}(\cos\upsilon)\quad(n=2m+1)$$

$$(\kappa=1/2-\mu,\quad m=0,1,2,\ldots,0<\upsilon<\pi)$$

Функции $G^{\mu}_{n}(\upsilon)$ на интервал $-\pi<\upsilon<0$ продолжаются четно.

Поскольку коэффициенты $a^{\kappa}_{\nu,r}(\theta)$ удовлетворяют трехчленным однородным рекуррентным соотношениям, то они оттуда определяются с точностью до постоянного множителя. Чтобы фиксировать этот множитель, функции $G^{\mu}_{n}(\upsilon)$ нормируем следующим образом [14] (эта нормировка при $n = 0$ отличается от принятой в [14]):

$$\int_0^{\pi}[G^{\kappa}_n(\upsilon)]^2 d\upsilon = h_n, \quad h_n = \begin{cases} n!/[\Gamma(n+1-2\kappa)(n+1/2-\kappa)] \\ n = 1,2,\ldots \\ 1/\Gamma(2-2\kappa), \ n=0 \end{cases}$$

Воспользовавшись условием ортогональности полиномов Гегенбауэра, это соотношение можем записать в виде

$$\sum_{r=0}^{\infty}\gamma^{\kappa}_{nr}[a^{\kappa}_{n-\kappa,r-[n/2]}(\theta)]^2 = h_n \tag{2.19}$$

$$\gamma^{\kappa}{}_{nr} = \begin{cases} f(2r), \ n=2m \\ \qquad\qquad\qquad (m=0,1,2,\ldots) \\ f(2r+1), \ n=2m+1 \end{cases}$$

$$f(x) = (x)![\Gamma(x+1-2\kappa)\Gamma(x+1/2-\kappa)]^{-1}$$

При помощи (2.19) фиксируется лишь значение абсолютной величины упомянутого множителя. Чтобы фиксировать также его знак, положим $a^{\kappa}_{\nu,0}(\theta) > 0$. Можем положить также

$$(-1)^{[n/2]}[G^{\kappa}_n(\upsilon)(\sin\upsilon)^{\kappa-1/2}]|_{\upsilon=0} > 0$$

что даст

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r a^{\kappa}_{\nu,r-[n/2]}(\theta) > 0, \quad \nu = n-\kappa \tag{2.20}$$

В предельном случае $\mu \to 0$ можно показать, что последовательность $a^{\kappa}_{\nu,r}(\theta)$ не обрывается и трехчленные рекуррентные соотношения для их определения переходят в соответствующие соотношения для коэффициентов периодических функций Матье $ce_n(\upsilon, \theta)$ ([13], с. 155). При этом

$$G^{1/2}_n(\upsilon) = (-1)^{[n/2]}\sqrt{2/\pi}\,ce_n(\upsilon,\theta) \tag{2.21}$$

а условия нормировки (2.19) и (2.20) переходят в известные условия нормировки функций $ce_n(\upsilon, \theta)$ ([13], с. 156).

Перейдем теперь к уравнению (2.11). Единственное решение этого уравнения, ограниченное на полуоси $0 \leqslant u < \infty$ и исчезающее на бесконечности имеет вид [13–15]

$$F^{\kappa}_n(u) = \sqrt{\operatorname{sh} u}\,S^{\kappa(3)}_{n-\kappa}(\operatorname{ch} u,\theta) \quad (0 \leqslant u < \infty) \tag{2.22}$$

где $S^{\kappa(3)}_{\nu}(z,\theta)$ – сфероидальная волновая функция третьего рода. Для этой функции можно получить следующее представление:

$$S^{\kappa(3)}_{2m-\kappa}(\operatorname{ch} u,\theta) = l^{\kappa}_{2m}(\theta)\frac{\operatorname{th}^{-\kappa}(u)}{\sqrt{\operatorname{ch} u}}\times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r a^{\kappa}_{2m-\kappa,r-m}(\theta)K_{\mu+2r}(2\sqrt{q}\,\mathrm{ch}\,u) \quad (0 \leqslant u < \infty) \tag{2.23}$$

$$S^{\kappa(3)}_{2m+1-\kappa}(\mathrm{ch}\,u,\theta) = l^{\kappa}_{2m+1}(\theta)\frac{\mathrm{th}^{-\kappa}(u)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,u}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r a^{\kappa}_{2m+1-\kappa,r-m}(\theta)K_{\mu+2r+1}(2\sqrt{q}\,\mathrm{ch}\,u)$$

$$l^{\kappa}_{2m}(\theta) = \frac{e^{-i\pi(1-\kappa/2)}}{(\pi^2 q)^{1/4}}s^{\kappa}_{2m-\kappa}(\theta)$$

$$l^{\kappa}_{2m+1}(\theta) = \frac{e^{-i\pi(3-\kappa)/2}}{(\pi^2 q)^{1/4}}s^{\kappa}_{2m+1-\kappa}(\theta)$$

$$s^{\kappa}_{n-\kappa}(\theta) = \left[\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r-[n/2]}a^{\kappa}_{n-\kappa,r-[n/2]}(\theta)\right]^{-1}$$

Таким образом, согласно (2.7) и (2.10) краевая задача (2.4) обладает нормальным решением вида

$$V(y,z,s) = (\mathrm{sh}\,u\sin\upsilon)^{-\mu}F^{\kappa}_n(u)G^{\kappa}_n(\upsilon) \quad (0 \leqslant u < \infty, \quad 0 < \upsilon < \pi) \tag{2.24}$$

Функция $F^{\kappa}_n(u)$ выражаются формулами (2.22), (2.23), $G^{\kappa}_n(\upsilon)$ – формулами (2.18), а переменные $y$, $z$ и $u$, $\upsilon$ связаны зависимостями (2.9).

Чтобы в явном виде вычислить плотность источников, соответствующую потенциалу (2.24), воспользуемся известными формулами ([13], с. 173, (20) и с. 174, (28)), при помощи которых получим представление

$$S^{\kappa(3)}_{\nu}(\mathrm{ch}\,u,\theta) = ie^{i\pi\mu}(\pi\sin\pi\mu)^{-1}[e^{i\pi\mu}\tilde{K}^{\kappa}_{-\nu-1}(\theta)Qs^{\kappa}_{\nu}(\mathrm{ch}\,u,\theta)+$$

$$+\sin(2\pi\mu)e^{-2i\pi\mu}K^{\kappa}_{\nu}(\theta)Qs^{\kappa}_{-\nu-1}(\mathrm{ch}\,u,\theta)] \quad 0 \leqslant u < \infty \tag{2.25}$$

$$\nu = n-\kappa, \quad \kappa = 1/2-\mu, \quad \theta = -q = -s^2/4$$

где $K^{\kappa}_{\nu}(\theta)$ – известный коэффициент связи между функциями $S^{\kappa(1)}_{\nu}(z,0)$ и $Q^{\kappa}_{s-\nu-1}(z,\theta)$ ([13], с. 175, (29) при $k = 0$), $\tilde{K}^{\kappa}_{-\nu-1}(\theta) = \lim\limits_{\nu+\kappa\to n} K^{\kappa}_{-\nu-1}(\theta)$, а функции $Qs^{\kappa}_{\nu}(\mathrm{ch}\,u,\theta)$ и $Qs^{\kappa}_{-\nu-1}(\mathrm{ch}\,u,\theta)$ выражаются второй формулой (2.15), если формально положить $\upsilon = iu$.

Теперь заметим, что в получении таким путем представлении $Qs^{\kappa}_{\nu}(\mathrm{ch}\,u,\theta)$ функции $Q^{\kappa}_{\nu+2r}(\mathrm{ch}\,2u)$ при $r \leqslant -[n/2]-1$ обращаются в бесконечность, в то время как соответствующие коэффициенты $a^{\kappa}_{\nu,r}(\theta) = 0$, и поэтому рассматриваемый ряд не обрывается. Последнее приводит к необходимости предельного перехода. Воспользовавшись формулой ([16], с. 140, (2))

$$Q^{\kappa}_{\nu}(z) = e^{2i\pi\kappa}\Gamma(\nu+\kappa+1)[\Gamma(\nu-\kappa+1)]^{-1}Q^{-\kappa}_{\nu}(z)$$

при помощи (2.16) в выражении $a^{\kappa}_{\nu,r}(\theta)Q^{\kappa}_{\nu+2r}(\mathrm{ch}\,u)$ совершим предельный переход $\nu+\kappa \to n$. В результате придем к представлению

$$Qs^{\kappa}_{\nu}(\mathrm{ch}\,u,\theta) = \frac{n!e^{-2i\pi\mu}}{\Gamma(n+2\mu)}\sum_{r=-\infty}^{-[n/2]-1}(-1)^{r+1}a^{\kappa}_{\nu,r}(\theta)Q^{-\kappa}_{\nu+2r}(\mathrm{ch}\,u)+ \tag{2.26}$$

$$+\sum_{r=-[n/2]}^{\infty}(-1)^r a_{\nu,r}^{\kappa}(\theta)Q_{\nu+2r}^{\kappa}(chu),\quad 0\leqslant u<\infty$$

$$\nu=n-\kappa,\quad \kappa=\tfrac{1}{2}-\mu,\quad n=0,1,2,\ldots$$

Для функции же $Qs_{-\nu-1}^{\kappa}(\operatorname{ch}u,\theta)$ будем иметь представление в виде следующего обрывающегося слева ряда:

$$Qs_{-\nu-1}^{\kappa}(\operatorname{ch}u,\theta)=\sum_{r=-[n/2]}^{\infty}(-1)^r a_{\nu,r}^{\kappa}(\theta)Q_{-\nu-1-2r}^{\kappa}(\operatorname{ch}u) \tag{2.27}$$

Входящие в (2.26) и (2.27) функции $Q_{\nu}^{\kappa}(z)$ для дальнейших целей удобно выразить формулой ([16], с. 134, (34))

$$Q_{\nu}^{\kappa}(z)=2^{-\nu-1}(z^2-1)^{-\kappa/2}e^{i\pi\kappa}\left[\Gamma(\kappa)(z+1)^{\nu+\kappa}F\left(-\nu,-\nu-\kappa;1-\kappa;\frac{z-1}{z+1}\right)+\right. \tag{2.28}$$

$$\left.+(z+1)^{\nu}(z-1)^{\kappa}\frac{\Gamma(\nu+\kappa+1)\Gamma(-\kappa)}{\Gamma(1+\nu-\kappa)}F\left(-\nu,-\nu+\kappa;1+\kappa;\frac{z-1}{z+1}\right)\right]$$

где $F(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Теперь исходя из (2.6), (2.9) и (2.24), получим

$$-2\pi\varphi_s(y)=(\sin\upsilon)^{\mu-1}G_n^{\kappa}(\upsilon)\lim_{u\to 0}\left\{(\operatorname{sh}u)^{2\mu}\frac{d}{du}\left[(\operatorname{sh}u)^{-\mu}F_n^{\kappa}(u)\right]\right\}\quad(0<\upsilon<\pi) \tag{2.29}$$

Далее, воспользовавшись формулами (2.5), (2.23) и (2.25)–(2.29), после некоторых преобразований придем к спектральному соотношению

$$\int_{-1}^{1}\frac{K_{\mu}(|s||y-u|)}{|y-u|^{\mu}}(1-u^2)^{-\kappa/2}Ps_{n-\kappa}^{\kappa}(u,\theta)du=\lambda_n(1-y^2)^{\kappa/2}Ps_{n-\kappa}^{\kappa}(y,\theta) \tag{2.30}$$

$$(|\mu|<\tfrac{1}{2},\quad |y|<1,\quad n=0,1,2,\ldots)$$

$$\lambda_n=(-1)^{[n/2]}\alpha_n\sin(\pi\mu)q^{(n+\mu)/2}|2s|^{-\mu}2^{1-n}A_n^{\kappa}(\theta)B_n^{\kappa}(\theta)[E_n^{\kappa}(\theta)]^{-1}$$

$$\alpha_n=\begin{cases}1, & n=2m\\ -1, & n=2m+1\end{cases}$$

$$A_n^{\kappa}(\theta)=\sum_{r=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^r a_{n-\kappa,-r}^{\kappa}(\theta)}{r!\Gamma(n+\mu+1-r)}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r a_{n-\kappa,r}^{\kappa}(\theta)}{r!\Gamma(1-n-\mu-r)}\right]^{-1}$$

$$B_n^{\kappa}(\theta)=(-1)^{[n/2]}\sum_{r=-[n/2]}^{\infty}(-1)^r a_{n-\kappa,r}^{\kappa}(\theta)K_{n+\mu+2r}(2\sqrt{q})$$

$$E_n^{\kappa}(\theta)=\frac{1}{n!}\sum_{r=-[n/2]}^{\infty}(-1)^r\frac{(n+2r)!}{\Gamma(n+2\mu+2r)}a_{n-\kappa,r}^{\kappa}(\theta)+\frac{1}{\Gamma(n+2\mu)}\sum_{r=-\infty}^{-[n/2]-1}(-1)^r a_{n-\kappa,r}^{-\kappa}(\theta)$$

Чтобы получить родственное с (2.30) соотношение, справедливое на лучах $|y| > 1$, заметим, что согласно (2.9) лучу $y > 1$ соответствует линия $\upsilon = 0$, а лучу $y < -1$ – линия $\upsilon = \pi$. Учитывая последнее, опять при помощи (2.5), (2.23) и (2.25)–(2.29) придем к соотношению

$$\int_{-1}^{1} \frac{K_\mu(|s||y-u|)}{|y-u|^\mu}(1-u^2)^{-\kappa/2} Ps_{n-\kappa}^{\kappa}(u,\theta)du = \nu_n \operatorname{sgn} y(y^2-1)^{\kappa/2} S_{n-\kappa}^{\kappa(3)}(|y|,\theta) \tag{2.31}$$

$(|\mu| < \frac{1}{2},\ |y| > 1,\quad n = 0,1,2,\ldots)$

$$\nu_n = (-1)^{1+[n/2]}\beta_n \sin(\pi\mu) q^{(n+\mu)/2} |2s|^{-\mu} 2^{1-n} A_n^{\kappa}(\theta)[E_n^{\kappa}(\theta)]^{-1}$$

$$\beta_n = \begin{cases} (\pi^2 q)^{1/4} e^{-i\pi\kappa/2}, & n = 2m \\ -(\pi^2 q)^{1/4} e^{i\pi(1-\kappa)/2}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

По принципу симметрии Шварца для аналитических функций соотношения (2.30) и (2.31) могут быть аналитически продолжены в полосу $|\operatorname{Re}\mu| < 1/2$.

В предельном случае $\mu \to 0$ спектральное соотношение (2.30) согласно (2.21) переходит в известное соотношение [17], а (2.31) принимает вид

$$\int_{-1}^{1} K_0(|s||y-u|)\operatorname{ce}_n(\arccos u, -q)(1-u^2)^{-1/2} du = \mu_n c_n(y) \operatorname{Fek}_n(\ln|y| + \sqrt{1-y^2}, -q)$$

$|y| > 1,\quad n = 0,1,2,\ldots$

$$\mu_n = -\pi \operatorname{ce}_n(0,-q) / \operatorname{Fe'k}_n(0,-q)$$

$$c_n(y) = \begin{cases} 1, & n = 2m \\ \operatorname{sgn} y, & n = 2m+1 \end{cases}$$

где $\operatorname{Fek}_n(z, \theta)$ – модифицированная функция Матье третьего рода [13].

**3.** Приступив к решению интегрального уравнения (1.5) рассматриваемой контактной задачи, положим

$$\varphi_s(y) = (1-y^2)^{-\kappa/2} \sum_{n=0}^{\infty} X_n Ps_{n-\kappa}^{\kappa}(y,\theta) \qquad (|y| < 1) \tag{3.1}$$

где коэффициенты $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ неизвестны. Затем (3.1) подставим в (1.5), поменяем порядок суммирования и интегрирования и воспользуемся спектральным соотношением (2.30). В результате будем иметь

$$(1-y^2)^{\kappa/2} \sum_{n=0}^{\infty} X_n \lambda_n Ps_{n-\kappa}^{\kappa}(y,\theta) = f_s(y) \quad (|y| < 1)$$

Отсюда приняв во внимание условие ортогональности сфероидальных волновых функций

$$\int_{-1}^{1} Ps_{n-\kappa}^{\kappa}(y,\theta) Ps_{m-\kappa}^{\kappa}(y,\theta)dy = \begin{cases} h_n, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

получим

$$X_n = \frac{f_n}{\lambda_n h_n}, \quad f_n = \int_{-1}^{1} f_s(y)(1-y^2)^{-\kappa/2} Ps_{n-\kappa}^{\kappa}(y,\theta)dy \tag{3.2}$$

Итак, решение обсуждаемого уравнения (1.5) выражается формулами (3.1)–(3.2).

Чтобы определить образ Фурье приведенных перемещений вне полосового штампа, функцию $\varphi_s(y)$ из (3.1) подставим в (1.6) и учтем соотношение (2.31). Тогда

$$w_s(y) = \operatorname{sgn} y(y^2-1)^{\kappa/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu_n f_n}{\lambda_n h_n} S_{n-\kappa}^{\kappa(3)}(|y|,\theta) \quad (|y|>1)$$

Для частной конфигурации полосового штампа $g(x, y) = \cos sx$ ($s > 0$) интегральное уравнение (1.5) принимает вид

$$\int_{-1}^{1} \frac{K_\mu(s|y-\eta|)}{|y-\eta|^\mu} \varphi_s(\eta) d\eta = d_s$$

$$d_s = \pi^{-1/2} 2^{\mu-1} \Gamma(\mu + 1/2) s^{-\mu}$$

Поскольку решение этого уравнения является четной функцией, то в (3.1) коэффициенты $X_{2m+1} = 0$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$). Оставшиеся коэффициенты $X_{2m}$ определяются по формуле (3.2), где следуется положить $n = 2m$. Используя представление (2.18), получим

$$f_{2m} = (-1)^m \frac{\sqrt{\pi} 2^\kappa d_s}{\Gamma(3/2-\kappa)} a_{2m-\kappa,-m}^{\kappa}(\theta) \quad (m = 0,1,2,\ldots)$$

Отметим, что в предельном случае $\mu \to 0$ изложенные здесь результаты для полосового штампа переходят в известные [18].

Автор благодарит Г.Я. Попова, любезно указавшему на работу [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н.Х.* Плоская контактная задача теории ползучести // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 901–924.
2. *Арутюнян Н.Х., Манукян М.М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 5. С. 813–820.
3. *Рвачев В.Л., Проценко В.С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 235 с.
4. *Belward J.A.* On the relationship of some Fredholm integral equations of the first kind to a family of boundary-value problems. Integral equations and forces convection. // J. Math. Analys. and Appl. 1974. V. 48. № 1. P. 184–199.
5. *Мхитарян С.М.* Об одном спектральном соотношении в сфероидальных волновых функциях и его приложении к контактным задачам // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 845–853.
6. *Раков А.Х., Рвачев В.Л.* Контактная задача теории упругости для полупространства, модуль упругости которого есть степенная функция глубины // Докл. АН УССР. 1961. Т. 3. № 3. С. 286–290.
7. *Ростовцев Н.А.* О некоторых решениях интегрального уравнения теории линейно-деформируемого основания // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 111–127.
8. *Попов Г.Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев; Одесса: Вища шк., 1982. 167 с.
9. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.

10. *Кузнецов А.И.* Вдавливание жестких штампов в полупространство при степенном упрочнении и при нелинейной ползучести материала // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 3. С. 481–491.
11. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
12. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981. 342 с.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 299 с.
14. *Meixner J., Schäfke F.W.* Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen mit Anwendungen auf Physikalische und technische probleme. Berlin; Götingen; Heidelberg: Springer-Verlag, 1954. 417 S.
15. *Meixner J.* Klassifikation, Bezeichnung und Eigenschaften der Sphäroidfunktionen // Math. Nachr. 1951. Bd. 5. H. 1. S. 1–18.
16. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 294 с.
17. *Александров В.М., Кованленко Е.В., Мхитарян С.М.* Об одном методе получения спектральных соотношений для интегральных операторов смешанных задач механики сплошных сред // ПММ. Т. 46. Вып. 6. С. 1023–1031.
18. *Рвачев В.Л.* Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 248–254.

Ереван

Поступила в редакцию
13.VII.1992