

УДК 539.3

© 1994 г. Е.В. Коваленко

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ШЕРОХОВАТЫХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ СМАЗКИ

Изучается осесимметричная задача о передаче давления от жесткого круглого в плане штампа на линейно-деформируемое основание через тонкий пористо-упругий слой (покрытие), сцепленный с ним. Физико-механические свойства покрытия описываются уравнениями модели Био, а движение вязкой сжимаемой жидкости в порах подчиняется закону фильтрации Дарси. Задача сведена к решению интегрального уравнения второго рода, содержащего операторы Фредгольма по координате и Вольтерры по времени. Для его решения использован алгоритм разделения переменных в сочетании с асимптотическими методами большого и малого времени в случае задачи с заданной областью контакта и пошаговый метод, когда граница площадки контакта заранее неизвестна. Получены аналитические формулы для основных характеристик контактного взаимодействия.

Обычно в области контакта смазанных шероховатых поверхностей взаимодействующих тел пустоты между микровыступами заполнены смазкой. При сжатии таких тел микровыступы деформируются, а смазка сжимается, частично выдавливаясь из микровпадин. Поскольку перечисленные процессы локализуются в тонких приповерхностных слоях контактирующих тел, то естественно моделировать их, например, как упругие или жесткие тела, армированные по границе тонким пористо-упругим покрытием, поры которого заполнены смазкой. Такое покрытие, наделенное своими физико-механическими свойствами, будет имитировать работу шероховатой поверхности. Идея данного подхода в случае контактирования шероховатых поверхностей при отсутствии смазки была высказана И.Я. Штаерманом [1]. Несколько другая модель, учитывающая наличие смазки, предложена в [2, 3].

1. Приведем вначале основные уравнения, описывающие реологические свойства пористо-упругих сред, в цилиндрической системе координат (r, φ, z) [4]

$$G\Delta u + (G + \lambda_c) \text{grad } \varepsilon - \alpha M \text{grad } \zeta = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{kM_c}{\eta} \Delta \zeta, \quad M_c = \frac{MG}{\beta(2G + \lambda_c)}, \quad \beta = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad (1.2)$$

$$\tau_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}(\lambda_c \varepsilon - \alpha M \zeta), \quad \lambda_c = (1 - 2\beta)G\beta^{-1} + \alpha^2 M$$

$$p = -\alpha M \varepsilon + M \zeta, \quad \varepsilon = \text{div } u, \quad \zeta = -\text{div } w$$

$$w = f(U - u), \quad u = \{u_r, u_\varphi, u_z\}$$

Здесь u, U – векторы перемещений точек упругого скелета и жидкости, p – гидростатическое давление жидкости в порах, τ_{ij} – компоненты тензора напряжений в пористой среде; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций в упругом скелете (индексы i и j

пробегают значения 1, 2, 3, при этом 1 соответствует r , 2 — φ , 3 — z), k — коэффициент проницаемости среды с пористостью f , η — коэффициент вязкости жидкого компонента, G , ν , α и M — механические характеристики пористо-упругой среды, физический смысл которых и методы определения даны в [5], причем $f \leq \alpha \leq 1$.

Рассмотрим вспомогательную задачу о действии распределенной по области $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ нормальной нагрузки — $\sigma(r, \varphi)H(t)$ ($H(t)$ — функция Хевисайда) на верхнюю границу тонкого слоя $0 \leq z \leq h$, $\lambda = ha^{-1} \ll 1$, жестко сцепленного с недеформируемым основанием, изготовленного из пористо-упругого материала (1.1), (1.2). Примем, что поверхность слоя $z = h$ вполне проницаема, а его основание — абсолютно непроницаемо. Тогда граничные условия поставленной задачи имеют вид

$$z = h: \tau_{zz} = -\sigma(r, \varphi)H(a-r)H(t), \quad \tau_{rz} = \tau_{\varphi z} = 0 \quad (1.3)$$

$$p = \sigma(r, \varphi)H(a-r)H(t)$$

$$z = 0: u_r = u_\varphi = u_z = 0, \quad p_{,z} = 0$$

слой свободен от напряжений на бесконечности.

При формулировке начального условия учтем наличие воздуха в порах (уравнения модели Био (1.1), (1.2) это не учитывают). Тогда в начальный момент времени приложенную нагрузку воспринимает только упругая матрица, в то время как поры освобождаются от воздуха, попавшего в них вместе с жидкостью, что соответствует реальным условиям работы покрытий. Этот факт можно записать следующим образом:

$$t = 0: \quad p = 0 \quad (\zeta = \alpha \varepsilon) \quad (1.4)$$

Решая упругую задачу для слоя малой толщины $\lambda \ll 1$ (метод решения аналогичен изложенному ниже) с граничными условиями

$$z = h: \quad \tau_{zz} = -\sigma(r, \varphi)H(a-r), \quad \tau_{rz} = \tau_{r\varphi} = 0$$

$$z = 0: \quad u_r = u_\varphi = u_z = 0$$

$$\tau_{zz}, \tau_{rz}, \tau_{r\varphi} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

получим

$$\varepsilon(r, \varphi, z, 0) = -\beta G^{-1} \sigma(r, \varphi) + O(\lambda)$$

откуда, с учетом (1.4), найдем

$$t = 0: \quad \zeta = -\alpha \beta G^{-1} \sigma(r, \varphi) + O(\lambda) \quad (1.5)$$

Для решения краевой задачи (1.1)–(1.3), (1.5) введем безразмерные переменные $r = a\rho$, $z = hx$ ($0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq x \leq 1$) и будем искать неизвестные функции, входящие в указанные выражения, в виде следующих асимптотических рядов:

$$\{u_r, u_\varphi, u_z, \zeta\} = \sum_{n=0}^l \{\Phi_n, \Psi_n, \Gamma_n, \Lambda_n\} \lambda^n + O(\lambda^{l+1}) \quad (1.6)$$

Внося (1.6) в (1.1)–(1.3), (1.5) и ограничиваясь удержанием в полученных соотношениях членов нулевого порядка, найдем:

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial x^2} - \frac{\alpha M h}{2G + \lambda_c} \frac{\partial \Lambda_0}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_0}{\partial x^2} - m \frac{\partial \Lambda_0}{\partial t} = 0 \quad \left(m = \frac{h^2 \eta}{k M_c} \right)$$

$$x=0: \quad \Phi_0 = \Psi_0 = \Gamma_0 = \Lambda_{0,x} = 0 \quad (1.8)$$

$$x=1: \quad \Phi_{0,x} = \Psi_{0,x} = 0, \quad M(-\alpha\Gamma_{0,x} + h\Lambda_0) = h\sigma H(1-\rho)H(t)$$

$$\Gamma_{0,x} = -(1-\alpha)\beta G^{-1}h\sigma H(1-\rho)H(t)$$

$$t=0: \quad \Lambda_0 = -\alpha\beta G^{-1}\sigma \quad (1.9)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (1.7) с граничными условиями (1.8) и начальным условием (1.9) можно построить при помощи интегрального преобразования Лапласа–Карсона по времени. Не останавливаясь на подробностях, приведем выражения для соответствующих трансформант при $x=1$

$$\Phi_0^L = \Psi_0^L = 0, \quad \Gamma_0^L = -\frac{\beta h}{G} \left(1 - \alpha \frac{\text{th} \sqrt{ms}}{\sqrt{ms}} \right) \sigma \quad (1.10)$$

Из равенств (1.6), (1.10) заключаем, что относительно тонкий пористо-упругий слой работает на сжатие подобно вязкоупругому основанию Фусса–Винклера с операторным коэффициентом постели, вид которого определяется обращением второй формулы (1.10) ($\theta_2(t, \tau)$ – тета-функция)

$$u_z(r, \varphi, h, t) = -\frac{\beta h}{G} \left[1 - \frac{\alpha}{m_0} \int_0^t \theta_2 \left(0, \frac{t-\tau}{m} \right) d\tau \right] \sigma(r, \varphi) + O(\lambda) \quad (0 \leq r \leq a, t \geq 0) \quad (1.11)$$

а перемещения u_r и u_φ точек слоя с точностью до членов $O(\lambda)$ всюду в нем равны нулю.

Решение для мгновенной распределенной нагрузки $\tau_{zz} = -\sigma(r, \varphi)\delta(t)$ ($0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$), действующей на верхнюю границу слоя, получается дифференцированием по t равенства (1.11)

$$\dot{u}_z(r, \varphi, h, t) = -\frac{\beta h}{G} \left[\delta(t) - \frac{\alpha}{m} \theta_2 \left(0, \frac{t}{m} \right) \right] \sigma(r, \varphi) \quad (1.12)$$

Заметим, что соотношения, аналогичные (1.11), (1.12) для случая плоской задачи найдены более сложным путем в [6].

2. Предположим теперь, что тонкое пористо-упругое покрытие жестко сцеплено с линейно-деформируемым основанием [7], имеющим упругие характеристики G_0, ν_0 , причем параметр $n = GG_0^{-1}$ мал. Если при этом

$$n = O(\lambda^\gamma) \quad (\lambda \rightarrow 0, \gamma > 0)$$

то [8] физико-механические свойства покрытия по-прежнему можно моделировать набором вязкоупругих пружинок. Тогда вертикальное перемещение точек верхней границы обобщенного линейного комбинированного основания от действия нормальной нагрузки $-\sigma(r, \varphi)\delta(t)$ представится в форме $\dot{u}_z + \dot{v}_z$, где \dot{u}_z имеет вид (1.12), а \dot{v}_z записывается следующим образом [7]:

$$\dot{v}_z(r, \varphi, 0, t) = -\frac{\delta(t)}{2\pi\kappa} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma(\rho, \psi) k \left(\frac{R}{b} \right) d\rho d\psi \quad (2.1)$$

$$R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \psi)}, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

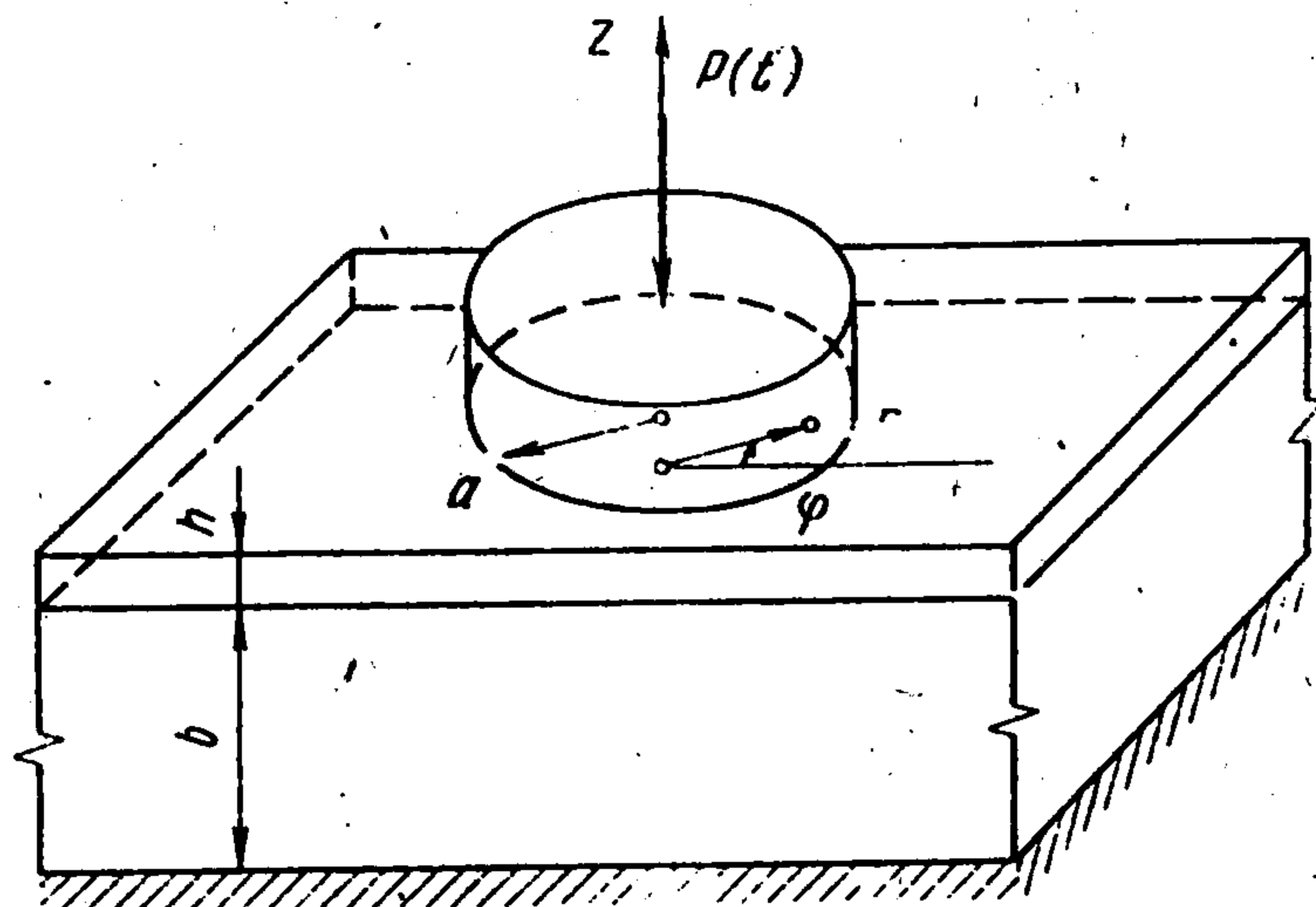
$$k \left(\frac{R}{b} \right) = \frac{1}{b} \int_0^\infty u K(u) J_0 \left(u \frac{R}{b} \right) du, \quad \kappa = \frac{G_0}{1 - \nu_0}$$

В равенствах (2.1) b – характерный параметр линейно-деформируемого основания, а $K(u)$ – его ядро, конкретный вид которого приведен в [7]. Ниже рассмотрим случай, когда $\Lambda = ba^{-1} \gg \lambda$ и

$$K(u) > 0 \quad (0 \leq u < \infty)$$

$$K(u) \sim u^{-\gamma_1} (u \rightarrow \infty, \gamma_1 > 1/2), \quad (2.2)$$

$$K(u) \sim u^{\gamma_2} (u \rightarrow 0, \gamma_2 \geq -1)$$



Фиг. 1

Кроме того, здесь и далее будем считать, что в силу малости относительной толщины покрытия все граничные условия можно снести на поверхность линейно-деформируемого основания $z = 0$.

Переходя к изучению соответствующей осесимметричной контактной задачи (фиг. 1) и вычисляя внешнюю квадратуру в первой формуле (2.1), приходим к исследованию интегрального уравнения относительно неизвестного контактного давления $\tau_{rr} = -\sigma(r, t)$:

$$\frac{\beta h}{G} \left[\sigma(r, t) - \frac{\alpha}{m} \int_{t_*}^t \sigma(r, \tau) \theta_2 \left(0, \frac{t-\tau}{m} \right) d\tau \right] + \frac{1}{\kappa} \int_0^a \sigma(\rho, t) \rho k \left(\frac{\rho}{b}, \frac{r}{b} \right) d\rho = \gamma(t) - g(r) \quad (2.3)$$

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq t_* \leq t \leq T < \infty$$

$$k \left(\frac{\rho}{b}, \frac{r}{b} \right) = \frac{1}{b} \int_0^\infty u K(u) J_0 \left(u \frac{\rho}{b} \right) J_0 \left(u \frac{r}{b} \right) du \quad (2.4)$$

где t_* – время достижения границей $r = a$ области контакта произвольной точки $r_* = a(t_*)$, причем $\sigma(r_*, t) = 0$ при $t \leq t_*$, когда $\dot{a}(t) > 0$; $t_* \equiv 0$, если $\dot{a}(t) \equiv 0$. Случай $\dot{a}(t) < 0$ исключим из рассмотрения.

Для замыкания постановки исследуемой задачи к уравнению (2.3), (2.4) необходимо добавить условие квазистатики

$$P(t) = 2\pi \int_0^a \rho \sigma(\rho, t) d\rho \quad (2.5)$$

и соотношение

$$\sigma(r, t) = 0 \quad (r \geq a(t)) \quad (2.6)$$

служащее для нахождения неизвестной области контакта штампа с комбинированным линейно-деформируемым основанием при $\dot{a}(t) > 0$.

Отметим, что при заданной форме основания штампа $g(r)$ на практике могут встретиться четыре основных варианта [9] задач (2.3)–(2.6): 1) задаются функции $\gamma(t)$ и $a(t) = a = \text{const}$ – находятся $\sigma(r, t)$ и $P(t)$; 2) задаются функции $P(t)$ и $a(t) = a = \text{const}$ – находятся $\sigma(r, t)$ и $\gamma(t)$; 3) известно жесткое перемещение штампа $\gamma(t)$ – определяются $\sigma(r, t)$, $P(t)$ и $a(t)$; 4) известна сила $P(t)$ – находятся $\sigma(r, t)$, $\gamma(t)$ и $a(t)$.

3. Рассмотрим случай постоянной во времени области контакта. Перейдем в интегральном уравнении (2.3) и условии (2.5) к безразмерным переменным

$$r = ar', \quad \rho = a\rho', \quad t = t'm, \quad \tau = \tau'm \quad (3.1)$$

и введем обозначения

$$\begin{aligned} q(r', t') &= \sigma(r, t) \kappa^{-1}, \quad N(t') = P(t) (a^2 \kappa)^{-1} \\ \gamma'(t') &= \gamma(t) a^{-1}, \quad g'(r') = g(r) a^{-1}, \quad \mu = \beta \lambda [n(1 - \nu_0)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

(штрих ниже опустим). Получим (I – гождественный оператор)

$$\mu(I - V_0^t)q + F_0^1 q = f \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq T < \infty) \quad (3.3)$$

$$N(t) = 2\pi \int_0^1 q(\rho, t) \rho d\rho \quad (3.4)$$

$$V_s^t \varphi = \alpha \int_s^t \varphi(\tau) \theta_2(0, t - \tau) d\tau, \quad F_0^a \varphi = \frac{1}{\Lambda_0} \int_0^a \varphi(\rho) \rho k \left(\frac{\rho}{\Lambda}, \frac{r}{\Lambda} \right) d\rho \quad (3.5)$$

Пусть задана непрерывная функция $f(r, t) = \gamma(t) - g(r)$, причем $\gamma(t) \in C(0, T)$ и является оригиналом [10], а $g(r) \in C(\Omega)$, где Ω – круг единичного радиуса. Методом работы [11] построим систему собственных функций $\{\varphi_i(r)\}$ ($i \geq 1$) и соответствующую им последовательность собственных чисел $\{\alpha_i\}$ оператора F_0^1 вида (3.5). В силу соотношений (2.2), (2.4) эта система ортонормирована и полна в пространстве квадратично суммируемых функций $L_2(\Omega)$, а все $\alpha_i \geq 0$, причем $\alpha_i \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$). Будем искать решение интегрального уравнения (3.3) в форме [9]

$$q(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(t) \varphi_i(r) \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.3), после очевидных преобразований запишем

$$\left(I - \frac{\mu}{\mu + \alpha_i} V_0^t \right) \psi_i = f_i \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.7)$$

$$f_i(t) = \frac{e_i \gamma(t) - g_i}{\mu + \alpha_i}, \quad e_i = \int_0^1 r \varphi_i(r) dr, \quad g_i = \int_0^1 g(r) r \varphi_i(r) dr$$

Применяя к уравнению (3.7) интегральное преобразование Лапласа–Карсона по времени и используя теорему о свертке [10], найдем

$$\psi_i(t) = f_i(t) + \lambda_i \int_0^t f_i(\tau) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} + \lambda_i \exp[\lambda_i^2(t-\tau)] \operatorname{erfc}(-\lambda_i \sqrt{t-\tau}) \right] d\tau \quad (0 \leq t < T^*) \quad (3.8)$$

$$\psi_i(t) = f_i(t) + 2\lambda_i \int_0^t f_i(\tau) \exp \left[- \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\lambda_i \right) (t-\tau) \right] d\tau \quad (3.9)$$

$$(T_* < t \leq T, \quad \lambda_i = \mu \alpha (\mu + \alpha_i)^{-1})$$

Показано [6], что соотношения (3.8), (3.9) хорошо стыкуются между собой при $t \in (T_*, T^*)$ и, таким образом, в совокупности доставляют решение интегральному уравнению (3.7) во всем диапазоне изменения времени t .

Внося далее (3.6) в (3.4), определим силу, приложенную к штампу

$$N(t) = 2\pi \sum_{i=1}^{\infty} e_i \psi_i(t) \quad (3.10)$$

которая обеспечивает заданную осадку основания $\gamma(t)$, и окончательно построим решение поставленной задачи согласно формулам (3.6), (3.8)–(3.10).

Если сила $N(t)$, приложенная к штампу известна (функция $N(t) \in C(0, T)$ и является оригиналом), то решение задачи строится по известной схеме [9, 12].

Математическое обоснование найденных в этом разделе решений в случае известной заранее области контакта можно провести по схеме, приведенной в [11].

4. Рассмотрим теперь случай монотонно растущей области контакта $a(t)$. Перейдем в (2.3)–(2.6) к безразмерным переменным (3.1) и обозначениям (3.2), в которых за a следует принять $a_0 = a(0)$. Тогда уравнение (3.3) и формулы (2.6), (3.4) трансформируются в следующие:

$$\mu(\mathbf{I} - \mathbf{V}_{t_*}^t)q + \mathbf{F}_0^a q = f \quad (0 \leq r \leq a(t), 0 \leq t_* \leq t \leq T < \infty) \quad (4.1)$$

$$q(r, t) = 0 \quad (r \geq a(t)) \quad (4.2)$$

$$N(t) = 2\pi \int_0^{a(t)} q(\rho, t) \rho d\rho \quad (4.3)$$

где штрих у безразмерных величин $a'(t) = a(t)a_0^{-1}$, $t_* = t_* m^{-1}$ по-прежнему опущен.

Заметим, что строгое решение такой задачи сопряжено с большими вычислительными трудностями, поэтому ниже ограничимся построением более простого приближенного решения. Воспользуемся аналогом пошагового метода [13].

Разобьем отрезок изменения времени $[0, T]$ на M достаточно малых интервалов, на каждом из которых контактное давление $q(r, t)$ и величину радиуса площадки контакта $a(t)$ аппроксимируем кусочно-постоянными во времени функциями

$$t_{m-1} \leq t < t_m: \quad q(r, t) = q(r, t_{m-1}), a(t) = a(t_{m-1}) = a_{m-1}$$

$$m = 1, 2, \dots, M; \quad t_0 = 0; \quad t_M = T; \quad a_0 = 1$$

В результате вместо (4.1) приходим к последовательности упругих задач с увеличивающимися областями контакта

$$\mu q_0 + \mathbf{F}_0^1 q_0 = \gamma_0 - q \quad (q_0(r) = q(r, 0), \quad \gamma_0 = \gamma(0), \quad 0 \leq r \leq 1) \quad (4.4)$$

$$\mu q(r, t_m) + \mathbf{F}_0^{a_m} q(\rho, t_m) = f_m(r, t_m) \quad (0 \leq r \leq a_m) \quad (4.5)$$

$$f_m(r, t) = \gamma(t) + \mu \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{V}_{t_i}^{t_{i+1}} q(r, t_i) - g(r) \quad m = 1, 2, \dots, M-1$$

рост которых обусловлен поэтапным вхождением в процесс взаимодействия новых микрошероховатостей, заполненных смазкой. Иными словами, контактное давление и радиусы новых зон контакта последовательно вычисляются при помощи решений уравнений (4.4) и (4.5), удовлетворяющих условиям (4.2), (4.3)

$$q(r, t_m) = 0 \quad (r \geq a_m) \quad (4.6)$$

$$N(t_m) = 2\pi \int_0^{a_m} q(\rho, t_m) \rho d\rho \quad (m = 0, 1, \dots, M-1) \quad (4.7)$$

и полученных на предыдущих временных шагах.

Пусть $0 \leq t < t_1$. Преобразуем уравнение (4.4) следующим образом. Положим в нем вначале $r = 1$ и используем условие (4.6). Затем умножим обе части (4.4) на $2\pi r dr$, проинтегрируем в пределах от 0 до 1 и примем во внимание равенство (4.7) при $m = 0$.

Будем иметь

$$\int_0^1 q_0(\rho) \rho k \left(\frac{\rho}{\Lambda}, \frac{1}{\Lambda} \right) d\rho = \gamma_0 - g(1) \quad (4.8)$$

$$\mu N(0) + 2\pi \int_0^1 r F_0^1 q_0(\rho) dr = \pi \left[\gamma_0 - 2 \int_0^1 r g(r) dr \right]$$

Упростим выражения (4.8), заменив в них $q_0(r)$ его средним значением $N(0)\pi^{-1}$. Взяв квадратуры, с учетом (2.4) запишем

$$N(0) \int_0^\infty K(u) J_0 \left(\frac{u}{\Lambda} \right) J_1 \left(\frac{u}{\Lambda} \right) du = \pi [\gamma_0 - g(1)] \quad (4.9)$$

$$N(0) \left[\mu + 2\Lambda \int_0^\infty K(u) u^{-1} J_1^2 \left(\frac{u}{\Lambda} \right) du \right] = \pi \left[\gamma_0 - 2 \int_0^1 r g(r) dr \right]$$

Соотношения (4.9) служат для нахождения величины Λ и силы $N(0)$ при заданном осадке γ_0 , либо γ_0 при заданной $N(0)$. Заметим, что эффективный метод вычисления несобственных интегралов, входящих в формулы (4.9), от быстро осциллирующих функций изложен в [14].

Определив из системы (4.9) необходимые параметры и подставив их в уравнение (4.4), получим решение последнего используя, например, собственные функции интегрального оператора F_0^1 (см. разд. 3). Контроль построенного решения можно осуществить проверкой условий (4.6), (4.7) с заданной для практики точностью. При выполнении их, переходим к следующему интервалу и т.д. В результате на m -м шаге будем иметь уравнение (4.5), решение которого должно быть подчинено условиям (аналоги соотношений (4.9) для $m \geq 1$)

$$N(t_m) \int_0^\infty K(u) J_0 \left(\frac{u}{\Lambda} a_m \right) J_1 \left(\frac{u}{\Lambda} a_m \right) du = \pi a_m [\gamma(t_m) - g(a_m)]$$

$$N(t_m) \left[\mu + 2\Lambda \int_0^\infty K(u) u^{-1} J_1^2 \left(\frac{u}{\Lambda} a_m \right) du \right] =$$

$$= \pi \left[a_m^2 \gamma(t_m) + \frac{\mu}{\pi} \sum_{i=0}^{m-1} N(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta_2(0, t_m - \tau) d\tau - 2 \int_0^{a_m} r g(r) dr \right]$$

Такая задача, как и выше, решается с использованием собственных функций оператора $F_0^{a_m}$, построить которые можно методом работы [11], взяв в качестве базиса последовательность полиномов Лежандра $P_i[1 - 2(ra_m^{-1})^2]$.

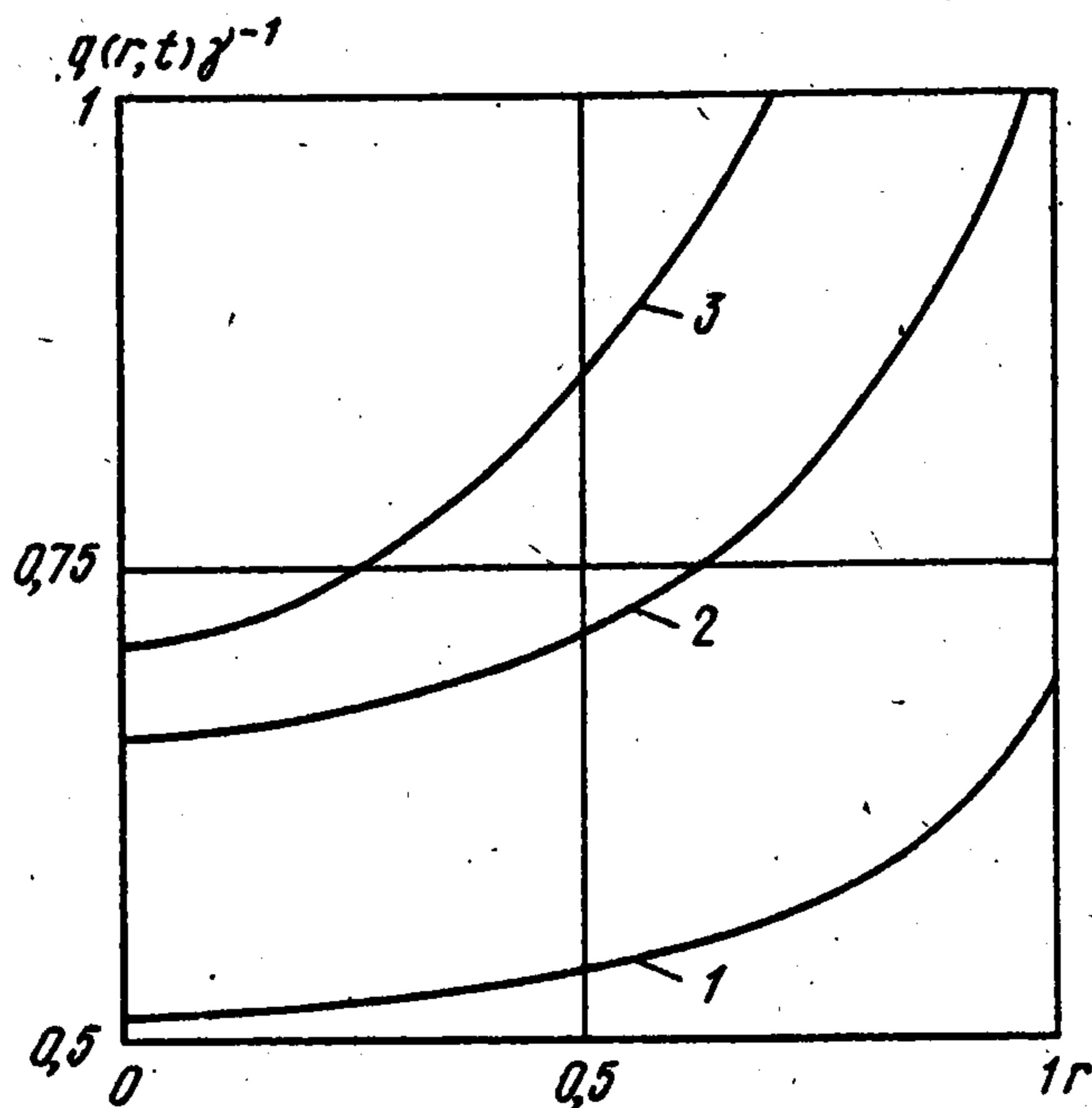
5. Для примера приведем числовой расчет механических характеристик контактной задачи о вдавливании кругового в плане штампа с плоским основанием в упругий слой (фиг. 1), нижняя грань которого жестко закреплена, а верхняя армирована тонким пористоупругим покрытием. Считаем, что область контакта неизменна, а заданная осадка штампа постоянна во времени. Такая задача в безразмерных переменных (3.1) и с учетом обозначений (3.2) сводится к интегральному уравнению (3.3), где

$$f(r, t) = \gamma = \text{const}$$

$$K(u) = \frac{2\kappa_0 \text{sh } 2u - 4u}{u(2\kappa_0 \text{ch } 2u + 4u^2 + 1 + \kappa_0^2)} \quad (\kappa_0 = 3 - 4\nu_0)$$

Положим далее $\nu_0 = 0,3$; $\Lambda = 6$, $\mu = 1$ и будем варьировать параметр α , характеризующий изменение объема пористой среды по отношению к дилатации упругого скелета при $p = 0$ (случай $\alpha = 1$ соответствует несжимаемости жидкости).

На фиг. 2 приведены графики распределения контактного давления $q(r, t)\gamma^{-1}$: кривая 1



Фиг. 2

соответствует $t = 0$ (сухой контакт), кривая 2 — $t = \infty$, $\alpha = 0,5$, кривая 3 — $t = \infty$, $\alpha = 0,99$. При этом значения величины $N(t)\gamma^{-1}$ подсчитывались согласно формуле (3.4) и равны 1,82; 2,57; 4,55. Видно, что присутствие смазки в контакте, а также ее свойства, в частности сжимаемость оказывает существенное влияние на свойства тонкого приповерхностного слоя, как бы упрочняя его, аналогично поверхностному упрочнению различными технологическими методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
2. Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. Некоторые особенности смазочного действия при сжатии упругих шероховатых тел. // Проблемы трения и изнашивания. Киев: Техніка, 1979. № 1. С. 88–93.
3. Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. Моделирование процесса контактирования в присутствии сжимаемой смазки. // Проблемы трения и изнашивания. Киев: Техніка, 1981. № 20. С. 14–19.
4. Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. № 4. P. 1482–1498.
5. Biot M.A., Willis D.G. The elastic coefficients of the theory of consolidation. // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. № 4. P. 594–601.
6. Коваленко Е.В. О расчете тонких пористых покрытий. // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 469–473.
7. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
8. Коваленко Е.В. Контактные задачи для тел с покрытиями (постановки и методы решения) // Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. № 1. С. 40–50.
9. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 с.
10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
11. Коваленко Е.В. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики // Изв. АН АрмССР. Механика. 1981. Т. 34. № 5. С. 14–26.
12. Коваленко Е.В. К вопросу решения контактных задач теории ползучести для комбинированных стареющих оснований // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1006–1014.
13. Гавриков М.В., Мазинг Р.И. Наследственно-стареющая модель изнашивания и ее применение к задачам с монотонно растущей зоной контакта. // Трение и износ. 1988. Т. 9. № 2. С. 274–279.
14. Манжиров А.В., Черныш В.А. Контактная задача для слоистого неоднородного стареющего цилиндра, подкрепленного жестким кольцом // ПМТФ. 1990. № 6. С. 101–109.