УДК 532.5:532.135

© 1994 г. М.М. Хасанов

МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ВРЕМЕННЫХ ИЕРАРХИЙ В ПРОЦЕССАХ РЕЛАКСАЦИИ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД

Показано, что иерархия времен, определяющих сдвиговую и объемную релаксации в вязкоупругих средах, имеет фрактальную (масштабно-инвариантную) структуру. Отмечено, что наличие временной фрактальности облегчает моделирование вязкоупругих сред, приводя к универсальным релаксационным функциям достаточно простого вида. В частности, в средах с масштабно-инвариантным распределением релаксационных характеристик возможно проявление алгебраического закона релаксации, что приводит к реологическим моделям и уравнениям состояния, содержащим дробные производные.

Релаксационные явления в реофизически сложных средах связаны с медленным развитием процессов перегруппировки структурных единиц различного масштаба (в случае полимеров – это гибкие молекулы, их отдельные сегменты или же пачки, образованные этими молекулами). Такие процессы приводят к запаздыванию изменений деформации от изменения напряжения (гистерезис, упругое последействие, релаксация напряжения и т.д.) и могут быть описаны моделями упругих тел с внутренним трением и вязких тел, обладающих упругостью [1–5]. Механические модели вязкоупругих тел полезны для понимания качественных особенностей явлений релаксации, но их применение к количественному описанию реальных материалов требует построения очень сложных систем, состоящих из большого числа различных пружин и вязких элементов (что связано с наличием иерархии структурных единиц различного масштаба, приводящей к иерархии широко распределенных времен релаксации). Ясно, что сложные модели не могут оказаться эффективными – слишком велики трудности, связанные с определением многочисленных релаксационных параметров по экспериментальным данным, а также с решением задач моделирования движения сред с широким спектром времен релаксации.

Ниже показано, что отмеченные затруднения могут быть преодолены за счет конкретизации структуры временных иерархий, определяющих релаксацию в реофизически сложных средах.

1. Релаксация напряжения в вязкоупругих средах. Рассмотрим обобщенное тело Максвелла, механическая модель которого представляет собой совокупность параллельно соединенных звеньев, состоящих из последовательно связанных пружин и вязкого элемента. Реология такого тела определяется известными соотношениями

$$\sigma = \sum_{n=1} \sigma_n, \quad \varepsilon = \varepsilon_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(2)}$$

где ε – деформация тела, σ – напряжение, $\sigma_n = E_n\varepsilon_n^{(1)} = \eta_n D\varepsilon_n^{(2)}$ – напряжение, E_n и η_n – жесткость пружины и коэффициент вязкого сопротивления n-го элемента, $\varepsilon_n^{(1)}$ и $\varepsilon_n^{(2)}$ – удлинение n-й пружины и смещение n-го вязкого элемента, $D = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Пусть в момент времени $t = 0$ тело испытывает деформацию $\varepsilon = h(t)$, где $h(t)$ – функция Хевисайда. Релаксация напряжения при этом определяется функцией [1–5]

$$\Phi(t) = \sum_n E_n \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \tag{1.1}$$

где $\tau_n = \eta_n / E_n$ – время релаксации n-го элемента. Величина E_n (n = 1, 2, ...) определяет вклад n-го элемента в суммарное напряжение.

В последнее время было показано, что многоуровневые процессы релаксации во многих самых различных системах характеризуются масштабно-инвариантным (фрактальным) распределением характерных времен [6, 7]. Основываясь на этом, предположим, что величины E_n и τ_n определяются масштабными законами вида

$$E_n = E_0 / \lambda_1^n = E_0 \exp(-n\lambda), \quad \lambda = \ln \lambda_1 \tag{1.2}$$

$$\tau_n = \tau_0 \mu_1^n = \tau_0 \exp(n\mu), \quad \mu = \ln \mu_1 \tag{1.3}$$

или вместо (1.3)

$$\tau_n = \tau_0 n^{\nu} \tag{1.4}$$

Таким образом, при наличии временной масштабной инвариантности $\ln E$ должен линейно уменьшаться с увеличением n.

Существование такой зависимости подтверждается данными работы [5], в которой приведены значения E_n и τ_n для нескольких иерархических уровней образцов монодисперсного и полидисперсного полистиролов. По этим данным линейной является и зависимость от номера уровня логарифма времени релаксации, что может быть проявлением закона (1.3). Следует, однако, отметить, что для высоких иерархических уровней (а именно такие рассматриваются в [5]) закон (1.4) также приводит к приближенной линейной связи между n и τ_n, поэтому, пользуясь только упомянутыми данными [5], нельзя отдать предпочтение ни одной из рассмотренных выше возможных зависимостей для времен релаксации.

Выбрав законы (1.2) и (1.3) и преобразовав сумму (1.1) в интеграл, получим

$$\Phi(t) = E_0 \int_0^{\infty} \exp(-x\lambda) \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\exp(-x\mu)\right) dx$$

Для определения асимптотики этого интеграла при больших временах сделаем замену переменной $z = \exp(-x\mu)$ и по методу Лапласа получим

$$\Phi(t) \approx \frac{E_0}{\mu}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{-\lambda/\mu} \tag{1.5}$$

Если же времена релаксации задаются законом (1.4), то

$$\Phi(t) \approx \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/(\nu+1)}\right), \quad \tau = \frac{\tau_0 \lambda^{-\nu}}{\nu}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{-(\nu+1)}. \tag{1.6}$$

Таким образом, масштабная инвариантность процессов релаксации существенно упрощает их описание и позволяет использовать достаточно простые универсальные функции релаксации вида (1.5) и (1.6).

Отметим, что функция релаксации вида (1.5) с показателем степени, равным $-1/2$, может быть получена в рамках молекулярной теории вязкоупругости Рауса и Бикки [5]. Однако эта теория не в состоянии объяснить часто наблюдаемое на практике отклонение значения показателя степени от указанной величины и, тем более, происхождение функций релаксации вида (1.6).

Масштабная инвариантность распределения релаксационных параметров может послужить для объяснения принципа температурно-временной суперпозиции [5], который выражается связью

$$\Phi(k(T)t) = k_1(T)\Phi_0(t) \tag{1.7}$$

где T_0 – некоторая характеристическая температура, $\Phi(t)$ и $\Phi_0(t)$ – функции релаксации при температурах T и T_0, k, k_1 – коэффициенты, зависящие от температуры ($k(T_0) = k_1(T_0) = 1$). Действительно, если считать, что показатели λ, μ не зависят от температуры, то из (1.5) получим (1.7) при

$$k = \tau_0(T)/\tau_0(T_0), \quad k_1 = E_0(T)/E_0(T_0)$$

В качестве примера была рассмотрена кривая релаксации напряжения в образце монодисперсного полистирола [5]. Расчеты показали, что эта кривая вполне удовлетворительно описывается законом Кольрауша (1.6) при $1/(\nu + 1) = 0{,}50$.

2. Реологические модели в дробных производных. Рассмотрим теперь вязкоупругое тело, представляемое множеством последовательно соединенных тел Фойхта (звеньев, состоящих из параллельно соединенных пружины и вязкого элемента). Тогда связь между скоростью деформации и напряжением определяется соотношением [1, 3]

$$D\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta} + \int_0^t \psi(t-\xi)d\sigma(\xi), \quad \psi(t) = \sum_n \frac{1}{\eta_n}\exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \tag{2.1}$$

Как и выше, предположим наличие масштабной инвариантности распределения релаксационных параметров:

$$\eta_n = \eta_0 \exp(\lambda' n), \quad \tau_n = \tau_0 \exp(n\mu)$$

Тогда (см. 1.5))

$$\psi(t) \approx Lt^{-\gamma_1}, \quad L = \Gamma(\gamma_1)\tau_0^{\gamma_1}/(\eta_0\mu) \tag{2.2}$$

и (2.1) можно переписать в виде

$$D\varepsilon(t) = \eta^{-1}\sigma(t) + \alpha D^{-\gamma} D\sigma(t) \tag{2.3}$$

$$\gamma = 1-\gamma_1, \quad \gamma_1 = \lambda'/\mu, \quad \alpha = L\Gamma(\gamma)$$

$$D^{-\gamma} f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\xi)^{\gamma-1} f(\xi)d\xi$$

($D^{-\gamma}f(t)$ – дробная производная порядка $-\gamma$.)

Принимая $E_n = E_0\exp(-\lambda n)$, получим

$$\tau_n = \eta_0 E_0^{-1} \exp((\lambda' + \lambda)n)$$

откуда $0 < \gamma_1 < 1$, $0 < \gamma < 1$.

Таким образом, наличие временной масштабной инвариантности приводит к необходимости использования реологических моделей в дробных производных. Отметим, что подобные модели вводились (исходя из других соображений) и ранее (например, [3, 4, 8]). Полученный здесь результат имеет также связи с работой [9], в которой показано, что временная самоподобность процессов приводит к уравнениям в дробных производных. Подчеркнем, что реологический закон с дробными производными получен для модели, включающей лишь различные пружины и вязкие элементы, в отличие от [4], где постулировалось существование самостоятельного типа деформации – высокоэластичной деформации, которая не может быть сведена к сумме упругости и вязкого трения.

3. Процессы релаксации при объемной деформации. Рассмотрим теперь процессы релаксации при объемной деформации. В ряде экспериментов [10, 11] было замечено, что если сосуд заполнить структурированной жидкостью (например, нефтью с асфальтено-смолистыми примесями), а затем создать в сосуде избыточное давление и герметически закрыть его, то давление в сосуде медленно падает до некоторого стационарного значения. Релаксационные процессы такого рода связаны с перегруппировкой макромолекул и сгустков, образованных ими. При быстром сжатии такая система претерпевает мгновенную упругую деформацию, величина которой определяется коэффициентом объемной упругости среды в начальном состоянии. Затем происходит медленная перегруппировка структурных единиц различной сложности, что за счет уплотнения среды приводит к уменьшению ее объема и, как следствие, к уменьшению давления. Считая структурные единицы вязкоупругими элементами, можно получить

$$-\frac{\delta V(t)}{V_0}=\beta_0\delta p(t)+\int_0^t \psi_1(t-\xi)D\delta p(\xi)d\xi \tag{3.1}$$

$$\psi_1(t)=\beta'\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{E_n}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)\right]$$

где – δV – уменьшение объема среды при увеличении давления на величину δp, V_0 – начальный объем, $\psi_1(t)$ – функция релаксации, β' – величина, определяющая изменение объема за счет смещения структурных элементов.

Продифференцировав равенство (3.1) по времени, получим уравнение состояния вязкоупругой среды в виде (ρ_0 – плотность среды)

$$\frac{1}{\rho_0}D\rho=\beta_0 Dp+\int_0^t \psi(t-\xi)Dp(\xi)d\xi,$$

$$\left(\frac{1}{\rho_0}D\rho=\frac{1}{V_0}D\delta V\right),\quad \psi(t)=\beta'\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\eta_n}\exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)$$

Вновь приняв масштабные законы вида (1.2), (1.3) и сохранив прежние обозначения, получим аналогично (2.3)

$$\rho_0^{-1}D\rho(t)=\beta_0(Dp+\beta_1 D^{-\gamma}Dp),\quad \beta_1=\beta'\Gamma(\gamma_1)\tau_0^{\gamma_1}/(\mu\beta_0\eta_0) \tag{3.2}$$

Таким образом, уравнение состояния вязкоупругих сред также может содержать дробные производные (степени производных в (2.3) и (3.2) могут различаться, но пока сохраним для них одно и то же обозначение).

В качестве примера рассмотрим данные следующего опыта, проведенного Г.М. Панаховым. Термостатируемый контейнер высокого давления заполняли структурированной нефтью, содержащей примеси в виде парафинов и смол. После заполнения контейнер тщательно вакуумировали, а затем мгновенно повышали давление путем быстрого нагнетания в контейнер небольшой порции нефти из бомбы PVT. После этого контейнер закрывали и регистрировали падение давления во времени. Результаты одного из таких опытов, в ходе которого давление в закрытом контейнере упало от 5 до 4,64 МПа, приведены ниже:

$t\times10^{-2}$, с	0	1,5	3	6	15	30	60
P, МПа	5,00	4,91	4,85	4,78	4,72	4,68	4,65

Предположим, что релаксация давления в контейнере описывается уравнением (3.2). Для идентификации этой модели воспользуемся операционным методом [12, 13]. Поскольку плотность нефти в процессе релаксации давления не меняется, то

$$\delta\rho(t)=\rho_0\beta_0\delta p(0)h(t)$$

Положив

$$\delta p(t)=\delta p(0)[h(t)-1]+\delta p_1(t)$$

и осуществив преобразование Лапласа, получим из (3.2)

$$\ln\left(\frac{1}{sU}-1\right)=\ln\beta_1-\gamma\ln s,\quad U=\frac{1}{\delta p(0)}\int_0^\infty \exp(-st)\delta p_1(t)dt \tag{3.3}$$

где $p_1(t)$ – измеряемое в опыте давление. Таким образом, если объемная релаксация действительно описывается моделью (3.2), то кривая изменения давления должна спрямиться в координатах $Y=\ln(1(sU)-1)$, $\ln s$. Для проверки этого факта задавали различные значения s из интервала $[5/T;\ 20/T]$ (T – время снятия экспериментальной кривой; в данном случае $T=6000$ с.) и вычисляли изображение функции $\delta p_1(t)$ по формуле

$$U(s)=\frac{\delta p(0)}{s}+\frac{1}{s^2}\sum_i\left[\frac{\delta p_1(t_{i+1})-\delta p_1(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\left(e^{-st_i}-e^{-st_{i+1}}\right)\right]$$

Результаты вычислений свидетельствуют, что кривая релаксации действительно спрямляется в указанных координатах. По углу наклона прямой найдено $\gamma=0{,}78$.

Полученные результаты могут быть использованы для вывода уравнений движения релаксирующих сред. Прежде всего рассмотрим движение структурированной релаксирующей жидкости в трубе радиуса R. Реологическое уравнение среды запишем в виде (ср. с (2.3))

$$-\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\sigma}{\eta}+\alpha D^{-\gamma}\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \tag{3.4}$$

где $\upsilon(r,t)$ – составляющая скорости вдоль оси трубы, σ – касательное напряжение, η – вязкость среды. Осредняя равенство (3.4) по сечению трубы, в рамках квазистационарного приближения [14] можно получить следующее уравнение движения:

$$\rho_0\left(\frac{\partial w}{\partial t}+2aw\right)=-\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\alpha D^{-\gamma}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial t}\right),\quad 2a=\frac{8\eta}{\rho_0 R^2} \tag{3.5}$$

где w – средняя по сечению скорость, $\partial p/\partial x$ – градиент давления вдоль оси трубы.

Уравнение неразрывности

$$\partial\rho/\partial t=-\rho_0\partial w/\partial x$$

при учете (3.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\beta_1 D^{-\gamma'}\frac{\partial p}{\partial t}=-\rho_0 c_0^2\frac{\partial w}{\partial x},\quad c_0=(\beta_0\rho_0)^{-1/2} \tag{3.6}$$

где c_0 – "мгновенная" скорость звука в среде. Исключая из (3.5) и (3.6) скорость, получим уравнение движения релаксирующей жидкости в виде

$$(D+2a)(Dp+\beta_1 D^{-\gamma'}Dp)=c_0^2(1+\alpha D^{-\gamma}D)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \tag{3.7}$$

Уравнения фильтрации, как известно, можно получить, пренебрегая в (3.7) инерционным членом $\partial w/\partial t$ и полагая $1/(2a)=k/\eta$, где теперь w – скорость фильтрации, k – проницаемость пористой среды. Следуя известной методике (например, [15]), в этом случае получим следующий аналог (3.7):

$$Dp + \beta_1 D^{-\gamma'} Dp = \kappa(1+\alpha D^{-\gamma} D)\operatorname{div}(\operatorname{grad} p), \quad \kappa = k/(\eta m \beta_0)$$

где κ – коэффициент пьезопроводности, m – пористость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лодж А.* Эластичные жидкости. М.: Наука, 1969. 463 с.
2. *Уилкинсон У.Л.* Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964. 216 с.
3. *Бленд Д.* Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 199 с.
4. *Слонимский Г.Л.* О законе деформации высокоэластичных полимерных тел // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. № 2. С. 343–346.
5. *Тобольский А.* Свойства и структура полимеров. М.: Химия, 1964. 332 с.
6. *Шлезингер М., Клафтер Дж.* Природа временных иерархий, определяющих релаксацию в неупорядоченных системах // Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 553–560.
7. *Блюмен А., Клафтер Дж., Цумофен Г.* Реакции в фрактальных моделях неупорядоченных систем // Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 561–574.
8. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
9. *Нигматуллин Р.Р.* Особенности релаксации системы с "остаточной" памятью // ФТТ. 1985. Т. 27 № 5. С. 1583–1585.
10. *Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х.* Механика физических процессов. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
11. *Мирзаджанзаде А.Х., Аметов И.М.* Прогнозирование промысловой эффективности методов теплового воздействия на нефтяные пласты. М.: Недра, 1983. 205 с.
12. *Баренблатт Г.И., Борисов Ю.П., Каменецкий С.Г., Крылов А.П.* Об определении параметров нефтеносного пласта по данным о восстановлении давления в остановленных скважинах // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1957. № 11. С. 84–91.
13. *Химмельблау Д.* Анализ процессов статистическими методами. М.: Мир, 1973. 957 с.
14. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра. 1975. 396 с.
15. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.

Уфа

Поступила в редакцию
15. XII. 1992