УДК 539.3

© 1994 г. Л.А. Алексеева

# ФОРМУЛЫ СОМИЛЬЯНЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЛАСТОДИНАМИКИ В СЛУЧАЕ БЕГУЩИХ НАГРУЗОК

Строятся регулярные представления формул Сомильяны для решений уравнений эластодинамики в случае бегущих нагрузок. Предлагается прифронтовая регуляризация подынтегральных функций для сверхзвуковых скоростей.

Один из способов построения граничных интегральных уравнений краевых задач теории упругости основан на получении формул типа Сомильяны, выражающих перемещения внутри области через граничные значения напряжений и перемещений и тензоры фундаментальных решений. Последние для уравнений теории упругости изотропного тела в случае стационарных бегущих нагрузок были построены ранее [1].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается класс автомодельных решений

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3 - ct) \tag{1.1}$$

уравнений движения линейноупругой однородной среды [2]

$$\sigma_{ij,j} - \rho u_{i,tt} + G_i = 0 \tag{1.2}$$

$$\sigma_{ij} = G_{ijkl} u_{k,l} \tag{1.3}$$

где $\sigma_{ij}$, $u_j$, – лагранжевы декартовы компоненты перемещений и тензора напряжений, $C_{ijkl}$ – тензор упругих констант, который в изотропном случае имеет вид

$$G_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{1.4}$$

Если вектор $\{G_i\}$ обладает структурой (1.1), то естественно искать решение в аналогичном виде. Здесь символ после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате или по $t$, по повторяющимся индексам $i, j, k, l$ проводится суммирование от 1 до 3.

В подвижной системе координат $(x_1', x_2', x_3') = (x_1, x_2, x_3 - ct)$ уравнения (1.2) при учете (1.3), (1.4) запишем в виде

$$A_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)u_j = (c_1^2 - c_2^2)u_{j,ij} + c_2^2 \Delta u_i - c^2 u_{i,33} + G_i = 0 \tag{1.5}$$

где $c_1$, $c_2$ – скорости объемных и сдвиговых волн в упругой среде, $\Delta$ – оператор Лапласа в $R_3$. Далее штрихи у $x_j$ опускаем.

Пусть $S$ – некоторая замкнутая цилиндрическая поверхность, достаточно гладкая, образующая которой параллельна оси $x_3$ декартовой системы координат $(x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{n}$ =

$= (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор внешней нормали к $S$. Поверхность $S$ разделяет области $S^-$ и $S^+$ в $R_3$. Допустим, что $\mathbf{u}$ – решение уравнения (1.5), определенное в $S^- + S$, и известно

$$u_j(\mathbf{x}) = u_j^s(\mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = n_j(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S \tag{1.6}$$

Требуется найти $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в области $\mathbf{x} \in S^-$, т.е. построить аналог формулы Сомильяны в случае бегущих нагрузок.

**2. Фундаментальные решения.** Было показано [1], что обобщенное решение уравнения (1.5) $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(\mathbf{x})H_s^-(\mathbf{x})$ можно представить в виде

$$\rho u_i(\mathbf{x}) = U_{ij}^* * p_j(\mathbf{x})\delta_s(\mathbf{x}) + \lambda u_k = n_k = (\mathbf{x})\delta_s(\mathbf{x}) * U_{im,m}^* +$$

$$+\mu(u_j n_m + u_m n_j)\delta_s(\mathbf{x}) * U_{ij,m}^* + U_{ij}^* * G_j H_s^-(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

$$H_s^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in S^-, \\ ½, & \mathbf{x} \in S, \\ 0, & \mathbf{x} \in S^+ \end{cases}$$

где $\delta_S(\mathbf{x})$ – простой слой на $S$ [3], $H_S^-(\mathbf{x})$ – характеристическая функция множества $S^-$, $U_{ij}^*$ – тензор Грина уравнений движения (1.2), соответствующий сосредоточенной массовой силы $G_i = -\delta_{i[j]}\delta(\mathbf{x})$, ($\delta_{ij}$ – символ Кронекера, $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция)

$$U_{ij}^*(\mathbf{x}) = c_2^{-2}\delta_{ij} f_2(r, x_3) + c^{-2}(f_{1ij}(r, x_3) - f_{2ij}(r, x_3)) \tag{2.2}$$

Здесь:

$$4\pi f_j(r, x_3) = \begin{cases} (m_j^2 r^2 + x_3^2)^{-½}, & c < c_j \\ -2\delta(x_3)\ln r, & c = c_j \\ 2H(-x_3 - m_j r)(x_3^2 - m_j^2 r^2)^{-½}, & c > c_j \end{cases}$$

$$4\pi f_{kij} = -\frac{1}{V_k^+}\left(\frac{x_3}{r}(\delta_{i3} r_{,j} + \delta_{j3} r_{,i}) - \frac{x_3^2}{r^2} r_{,i} r_{,j} - \delta_{i3}\delta_{j3}\right) + \frac{V_k^+}{r^2}(\delta_{ij}\text{э}_{[i]3} - r_{,i} r_{,j}), \quad c < c_k$$

$$2\pi f_{kij} = H(-x_3 - m_k r)\left(\frac{1}{V_k^-}\left(\frac{x_3}{r}(\delta_{i3} r_{,j} + \delta_{j3} r_{,i} - \frac{x_3^2}{r^2} r_{,i} r_{,j} - \delta_{i3}\delta_{j3}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{V_k^-}{r^2}(\delta_{ij}\text{э}_{[i]3} - r_{,i} r_{,j})\right), \quad c > c_k$$

$$2\pi f_{kij} = -\delta(x_3)\delta_{i3}\delta_{j3}\ln r - \frac{H(-x_3)}{r}(\delta_{i3} r_{,j} + \delta_{j3} r_{,i}) - \frac{H(-x_3)x_3}{r^2}(\delta_{ij}\text{э}_{[i]3} - 2r_{,i} r_{,j}), \quad c = c_k$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x_j}, \text{э}_{ij} = 1 - \delta_{ij}$$

$$m_k = \sqrt{|1 - M_k^2|}, \quad V_k^{\pm} = \sqrt{x_3^2 \pm m_k^2 r^2}$$

$H(x)$ – функция Хевисайда, $M_k = c/c_k$ – числа Маха (по индексам в квадратных скобках суммирования нет).

Удобно выделить объемную и сдвиговую составляющие тензора $U_{ij}^*$:

$$U_{ij}^* = U_{ij1}^* + U_{ij2}^* \tag{2.3}$$
$$U_{ij1}^* = c^{-2} f_{1ij}(r, x_3), \quad U_{ij2}^* = c_2^{-2} \delta_{ij} f_2(r, x_3) - c^{-2} f_{2ij}(r, x_3)$$

Используя закон Гука (1.3), (1.4), введем фундаментальные тензоры напряжений

$$S_{ijk}^* = \lambda U_{mk,m}^* \delta_{ij} + \mu (U_{ik,j}^* + U_{jk,i}^*) \tag{2.4}$$
$$\Gamma_{ik}^*(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = S_{ijk}^*(\mathbf{x}) n_j$$

Из (1.2) следует

$$S_{ijk,i}^* = \rho c^2 U_{ik,33}^* - \rho \delta_{jk} \delta(\mathbf{x})$$

откуда сверткой с $H_F^-(\mathbf{x}) \delta_{km}$ получим

$$S_{ijm}^* * \nu_i(\mathbf{x}) \delta_F(\mathbf{x}) = \rho c^2 (U_{jm}^* * \nu_3(\mathbf{x}) \delta_F(\mathbf{x}))_{,3} - \rho \delta_{jm} H_F^-(\mathbf{x}) \tag{2.5}$$

Здесь $F$ – произвольная достаточно гладкая поверхность в $R_3$, ограничивающая множество $F^-$, $\nu(\mathbf{x})$ – внешняя единичная нормаль к $F$.

Удобно ввести сопряженный тензор

$$T_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \Gamma_{ji}^*(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \tag{2.6}$$

который позволяет записать соотношение (2.5) в интегральном виде

$$\int_F T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \nu(\mathbf{y})) ds(\mathbf{y}) = \rho \delta_{ij} H_F^-(\mathbf{x}) - \rho c^2 \frac{\partial}{\partial x_3} \int_F U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nu_3(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \tag{2.7}$$

Здесь и далее

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_{ij}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{n}) = T_{ij}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{n}) \tag{2,8}$$

Если $F$ – цилиндрическая поверхность типа $S$, на которой $\nu_3 = 0$, равенство приобретает классический вид

$$\int_F T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \nu(\mathbf{y})) ds(\mathbf{y}) = \rho \delta_{ij} H_F^-(\mathbf{x})$$

подобный формуле Гауса для потенциала двойного слоя [3]. Точно такому же соотношению удовлетворяет статический аналог тензора $T_{ij}$ [4].

Покажем, что тензор $T_{ij}^*$ является фундаментальным решением уравнения (1.5).

Из (2.4), (2.6) следует

$$T_{ji}^* = \Gamma_{ij}^* = K_{il}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{n}\right) U_{lj}^*(\mathbf{x}) \tag{2.9}$$
$$K_{il}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{n}\right) = \lambda n_i \frac{\partial}{\partial x_l} + \mu n_j \left(\delta_{il} \frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_{jl} \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

Следовательно,

$$A_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) T_{jk}^* = A_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \Gamma_{kj}^* = A_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) K_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{n}\right) U_{lj}^* =$$
$$= K_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{n}\right) \delta_{il} \delta(\mathbf{x}) = K_{ki}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{n}\right) \delta(\mathbf{x}) \tag{2.10}$$

Здесь использовано свойство симметрии тензора Грина (см. (2.2))

$$U^*_{ij}(\mathbf{x}) = U^*_{ji}(\mathbf{x})$$

Из (2.2), (2.6), (2.9) следует

$$T^*_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{n}) = \frac{\mu}{c_2}\left((2M_1^2 - M_2^2)n_j f_{1,i} + M_2^2\left(\delta_{ij}\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{n}} + n_i f_{2,j}\right) - 2\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(f_{2ij} - f_{1ij})\right) \tag{2.11}$$

Воспользуемся введенными тензорами для интегральной записи (2.1). Аналогично $U_{ijk}$ будем выделять объемную и сдвиговую составляющую тензора $T_{ij}$: $T_{ij} = T_{ij1} + T_{ij2}$, которые легко выписать, используя (2.11).

**3. Дозвуковые нагрузки** ($c < c_2$). В этом случае [1] тензор $U^*_{ij}$ имеет устранимые особенности на оси $x_3$, кроме точки $\mathbf{x} = 0$, поскольку при $r \to 0$, $x_3 \neq 0$

$$V_1 - V_2 \sim \frac{r^2(m_1^2 - m_2^2)}{2|x_3|}, \quad V_1^{-1} - V_2^{-1} \sim \frac{r^2(m_1^2 - m_2^2)}{2|x_3|^2} \tag{3.1}$$

Из (2.3) следует: на любом луче, проходящем через точку $\mathbf{x} = 0$, при $R \to 0$ $\quad (R = \sqrt{r^2 + x_3^2})$

$$U^*_{ij}(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{R}\psi_{ij}(\theta,\varphi) \tag{3.2}$$

где $\psi_{ij}$ – ограниченная функция от $\theta$, $\varphi$: $\cos\varphi = x_1/r$, $\sin\varphi = x_2/r$, $\theta = \arccos(x_3/R)$.

Аналогичную асимптотику имеет $U^*_{ij}(\mathbf{x})$ при $R \to \infty$. Следовательно, $1/R^2$ – тип особенности тензора $T^*_{ij}$.

Эти свойства тензоров $U^*_{ij}(\mathbf{x})$ и $T^*_{ij}(\mathbf{x})$ позволяют записать свертку (2.1) в интегральном виде с учетом введенных обозначений (2.4), (2.6), (2.8)

$$\rho u_i H_s^-(\mathbf{x}) = \int_S (U_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y})p_j(\mathbf{y}) - T_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{n}(\mathbf{y}))u_j(\mathbf{y}))ds(\mathbf{y}) \tag{3.3}$$

Для $\mathbf{x} \in S$ подынтегральные функции не имеют особенностей и интегралы сходятся, если для $\mathbf{y} \in S$, $\exists\varepsilon > 0$:

$$p_j(\mathbf{y}) = O(\|\mathbf{y}\|)^{-\varepsilon},\ u_j(\mathbf{y}) = O(1) \quad \text{при } \|\mathbf{y}\| \to \infty \tag{3.4}$$

($p_j(\mathbf{y})$, $u_j(\mathbf{y})$ – локально-интегрируемые функции).

Формула по виду идентична формуле Сомильяны статической теории упругости [2]. Она справедлива также и для $\mathbf{x} \in S$, если учесть определение $H_s^-(\mathbf{x})$ в (2.1). Однако интеграл, содержащий $T_{ij}$, в этом случае сингулярный, и брать его следует в смысле главного значения. Доказательство этого факта основано на свойствах антисимметрии тензора $T_{ij}$ по $\mathbf{x}$ и аналогично подобному в статической теории упругости [5].

Для $\mathbf{x} \in S$ формула дает сингулярные ГИУ для решения основных краевых задач теории упругости в случае дозвуковых бегущих нагрузок.

**4. Сверхзвуковые нагрузки** ($c < c_1$). Компоненты тензора Грина в этом случае имеют слабую особенность на конических фронтах $x_3 = -m_j r$ порядка $(x_3 + m_j r)^{-1/2}$. Поэтому первый интеграл в (3.3), содержащий $U^*_{ij}$, существует. Однако второй интеграл уже является формальным, так как особенности тензора $T^*_{ij}$ более высокого порядка (как $(x_3+m_jr)^{-3/2}$) не интегрируемы на $S$ для любых $\mathbf{x}$. Следовательно, формулой (3.3) в сверхзвуковом случае пользоваться нельзя.

Вернемся к формуле (2.1), вынеся операцию дифференцирования за знак свертки:

$$\rho u_i(\mathbf{x}) = U^*_{ij} * p_j(\mathbf{x})\delta_S(\mathbf{x}) + (\lambda u_k n_k(\mathbf{x})\delta_S(\mathbf{x}) * U^*_{im})_{,m} +$$

$$+\mu((u_j n_m + u_m n_j)\delta_S(\mathbf{x}) * U^*_{ij})_{,m} + U^*_{ij} * G_j H^-_S(\mathbf{x}) \qquad (4.1)$$

В более краткой записи при учете (1.4) имеем

$$\rho u_i(\mathbf{x}) = U^*_{ij} * p_j(\mathbf{x})\delta_S(\mathbf{x}) + C_{jmkl}(u_k r_l(\mathbf{x})\delta_S(\mathbf{x}) * U^*_{ij})_{,m} + U^*_{ij} * G_j H^-_S(\mathbf{x}) \qquad (4.2)$$

Теперь формулу можно записать в интегральном виде

$$\rho u_i H^-_S(\mathbf{x}) = \int\limits_S U_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}) p_i(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) + C_{jmkl} \frac{\partial}{\partial x_m} \int\limits_S U_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y})\, u_k(\mathbf{y}) n_l(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \qquad (4.3)$$

где все интегралы существуют; здесь $G_j = 0$.

Пусть носитель бегущей нагрузки $\mathbf{p}(\mathbf{y})$ сосредоточен на множестве $\mathbf{y} \in S$, $y_3 < 0$, т.е.

$$p_j(\mathbf{y}) = 0 \quad (j = 1,2,3) \text{ при } y_3 > 0 \qquad (4.4)$$

что соответствует физическому представлению о действующих нагрузках, которые, как правило, финитны.

Очевидно, что перемещения удовлетворяют такому же условию, так, как нагрузка опережает распространение возмущений в среде.

Обозначим $\mathbf{z_x} = (x_1, x_2)$ $\mathbf{z_y} = (y_1; y_2)$, $r = \| \mathbf{z_x} - \mathbf{z_y} \|$, $K_q(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}: y_3 = x_3 + m_q r\}$ – волновые фронты тензора $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ с вершиной в точке $\mathbf{x}$; внутренность этих конусов– носитель $U_{ij}$.

Поскольку перед $q - m$ фронтом $U_{ijq} = 0$ и справедливо соотношение (1.4), равенство (4.3) принимает вид

$$\rho u_i H^-_S(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^{2} \int\limits_D H(-m_q r - x_3) ds(\mathbf{z_y}) \int\limits_{x_3+m_q r}^{0} U_{ijq}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \times$$

$$\times p_j(\mathbf{y}) dy_3 + C_{jmkl} \frac{\partial}{\partial x_m} \int\limits_D H(-m_q r - x_3) ds(\mathbf{z_y}) \int\limits_{x_3+m_q r} U_{ijq}(\mathbf{x},\mathbf{y}) u_k(\mathbf{y}) n_l(\mathbf{z_y}) dy_3 \qquad (4.5)$$

Здесь интеграл по цилиндрической поверхности $S$ представлен в виде двухкратного интеграла вдоль образующей и перпендикулярной ей направляющей $D$ цилиндра $S$, $ds(\mathbf{z_y})$ – дифференциал длины дуги на $D$.

Введем тензоры

$$W_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{z_y}) = W_{ij1}(\mathbf{x},\mathbf{z_y}) + W_{ij2}(\mathbf{x},\mathbf{z_y}) \qquad (4.6)$$

$$W_{ijq}(\mathbf{x},\mathbf{z_y}) = H(-x_3 - m_q r) \int\limits_{x_3+m_q r}^{0} U_{ijq}(\mathbf{x},\mathbf{y}) dy_3$$

Вычисляя, получим

$$2\pi c^2 W_{ij} = r^{-2}(H_1V_1^- - H_2V_2^-)(|x_3|(\delta_{ij}\delta_{[i]3} - r_{,i}r_{,j}) - \delta_{i3}r_{,j} - \delta_{j3}r_{,i}) - H_1 \ln\left(\frac{x_3+V_1^-}{m_1 r}\right)\times$$
$$\times\left(\delta_{i3}\delta_{j3} + \frac{1}{2}m_1^2\delta_{ij}э_{[i]3}\right) + H_2 \ln\left(\frac{x_3+V_1^-}{m_2 r}\right)\left(\delta_{i3}\delta_{j3} + m_2^2\delta_{ij}\left(1+\frac{1}{2}э_{[i]3}\right)\right) \quad (4.7)$$

$H_q = H(-m_q r - x_3)$

Из (4.6) следует, что

$$W_{ijq}(\mathbf{x},\mathbf{z}_\mathbf{y}) = 0 \quad \text{при} \quad x_3 > -m_q r \tag{4.8}$$

В частности,

$$W_{ijq}(\mathbf{x},\mathbf{z}_\mathbf{y}) = 0 \quad \text{при} \quad x_3 > 0 \tag{4.9}$$

Видно, что тензор $W_{ij}$ имеет лишь конечные разрывы на фронтах $S_q(\mathbf{x}) = \{\mathbf{z}_\mathbf{y} : m_q\|\mathbf{z}_\mathbf{x} - \mathbf{z}_\mathbf{y}\| + x_3 = 0\}$.

Обозначим $S_q^-(\mathbf{x}) = \{\mathbf{z}_\mathbf{y} : m_q\|\mathbf{z}_\mathbf{x} - \mathbf{z}_\mathbf{y}\| + x_3 < 0\}$ – носитель $W_{ijq}$. Поскольку при $r \to 0$, $x_3 \neq 0$

$$\frac{1}{r^2}(H_1V_1^- - H_2V_2^-) \sim \frac{m_2^2 - m_1^2}{2|x_3|}$$

то тензор $W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_\mathbf{y})$ не имеет сильных особенностей по $r$ и тип особенности при $r \to 0$, порядка $\ln r$.

Обозначим $d_q = (y_1, y_2, x_3 + m_q r)$ и проведем прифронтовую регуляризацию подынтегральных функций в соотношениях (4.5)

$$\rho u_i H_S^-(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^{2} \int_D H(-m_q r - x_3)ds(\mathbf{z}_\mathbf{y}) \int_{x_3+m_q r}^{0} U_{ijq}(\mathbf{x},\mathbf{y})p_j(\mathbf{y})dy_3 +$$
$$+C_{jmkl}\frac{\partial}{\partial x_m}\int_D H(-m_q r - x_3)n_l(\mathbf{z}_\mathbf{y})ds(\mathbf{z}_\mathbf{y}) \int_{x_3+m_q r}^{0} U_{ijq}(\mathbf{x},\mathbf{y})(u_k(\mathbf{y}) - u_k(\mathbf{d_q}))dy_3 +$$
$$+C_{jmkl}\frac{\partial}{\partial x_m}\int_D n_l(\mathbf{z}_\mathbf{y})W_{ijq}(\mathbf{x},\mathbf{z}_\mathbf{y})u_k(\mathbf{d_q})ds(\mathbf{z}_\mathbf{y}) \tag{4.10}$$

Поскольку при $y_3 \to x_3 + m_q r + 0$

$$\frac{u_k(\mathbf{y}) - u_k(\mathbf{d}_q)}{V_q^-(\mathbf{x},\mathbf{y})} \sim \left.\frac{\partial u_k}{\partial y_k}\right|_{\mathbf{y}=\mathbf{d}_q}\sqrt{\frac{y_3 - x_3 - m_q r}{y_3 - x_3 + m_q r}} \to 0$$

то выражение под знаком второго интеграла не имеет особенностей на фронтах $K_q(\mathbf{x})$. Заметим также, что $S_q$ совпадает с $D$, только если

$$-x_3 > m_q \max_{\mathbf{y}\in S}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Следовательно, если неравенство не выполняется, то на концах дуги интегрирования $S_q$ имеем $x_3 + m_q r = 0$. Однако в этих точках подынтегральные функции во втором и третьем интегралах (4.10), в силу их определения, равны нулю.

Указанные свойства позволяют ввести операцию дифференцирования под знак интеграла. При этом второй интеграл допускает дифференцирование по всем $\mathbf{x}$, третий – лишь для $\mathbf{x} \notin S$.

Удобно ввести тензоры $H_{ijq}$, порожденные тензорами $W_{ijq}$, подобные $T_{ijq}$ (2.9):

$$H_{jkq}(\mathbf{x},\mathbf{z_y},\mathbf{n}) = C_{imkl}n_l \frac{\partial}{\partial x_m} W_{ijq}(\mathbf{x},\mathbf{z_y}) \tag{4.11}$$

Для изотропной среды они имеют такой же вид (2.11), где вместо $U^*_{lk}$ следует подставить $W_{lkq}$.

Выполняя дифференцирование, получим

$$\rho u_i H^-_S(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^{2} \int_D H(-m_q r - x_3)ds(\mathbf{z_y})\times$$

$$\times \int_{x_3+m_q r}^{0} (U_{ijq}(\mathbf{x},\mathbf{y})p_j(\mathbf{y}) - T_{ijq}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{n}(\mathbf{y}))(u_j(\mathbf{y}) - u_j(\mathbf{d}_q)))dy_3 +$$

$$+\int_D H_{ijq}(\mathbf{x},\mathbf{z_y},\mathbf{n}(\mathbf{z_y}))u_j(\mathbf{d}_q)ds(\mathbf{z_y}) \tag{4.12}$$

Формула является аналогом формулы Сомильяны для сверхзвуковых нагрузок. Она позволяет определять перемещения внутри области $S^+$ по заданным значениям перемещений и напряжений на ее границе $S$.

Для $x \in S$ последний интеграл сингулярный, контурный. Можно показать, что с учетом определения $H^-_S(x)$ (2.2) равенство сохранится, если последний интеграл брать в смысле главного значения. В этом случае равенство (4.11) дает ГИУ для решения первой или второй краевых задач эластодинамики для сверхзвуковых бегущих нагрузок.

**5. Трансзвуковые нагрузки** ($c_2 < c < c_1$). Приведенные выше рассуждения позволяют сразу записать регулярный интегральный аналог формулы Сомильяны для межзвуковых скоростей:

$$\rho u_i H^-_S(\mathbf{x}) = \int_D H(-m_2 r - x_3)ds(\mathbf{z_y}) \int_{x_3+m_q r}^{0} (U_{ij2}(\mathbf{x},\mathbf{y})p_j(\mathbf{y}) -$$

$$-T_{ij2}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{n}(\mathbf{y}))(u_j(\mathbf{y}) - u_j(\mathbf{d}_2)))dy_3 + \int_D H_{ij2}(\mathbf{x},\mathbf{z_y},\mathbf{n}(\mathbf{z_y}))u_j(\mathbf{d}_2)ds(\mathbf{z_y}) +$$

$$+\int_D ds(\mathbf{z_y}) \int_{-\infty}^{\infty}(U_{ij1}(\mathbf{x},\mathbf{y})p_j(\mathbf{y}) - T_{ij1}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{n}(\mathbf{y}))u_j(\mathbf{y}))dy_3$$

который также для $x \in S$ дает ГИУ для решения соответствующих краевых задач.

Для звуковых скоростей при $c = c_2$ формула Сомильяны имеет аналогичный вид. Для $c = c_1$ следует пользоваться формулой (4.12). В обоих случаях меняется только вид тензоров $U_{ij}$ и $T_{ij}$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Алексеева Л.А.* Фундаментальные решения в упругом пространстве в случае бегущих нагрузок // ПММ. Т. 55. Вып. 2. С. 298–308.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 512 с.
4. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 664 с.
5. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1976. 688 с.



Алма-Ата

Поступила в редакцию
6.II.1992