ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, Вып. 6, 1993

УДК 539.375

© 1993 г. Е.В. Лобанов

ТЕРМОДИНАМИКА ДИФФУЗНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Предлагается термодинамическая модель накопления диффузных повреждений в деформируемых твердых телах. Построена замкнутая система динамических уравнений термофрактомеханики. Получено решение нелинейного уравнения "диффузии" повреждений в виде плоской стационарной волны разрушений типа кинка. Показано, что скорость фронта волны пропорциональна инвариантам тензора деформаций (напряжений), коэффициенту "диффузии" и обратно пропорциональна силе сопротивления накоплению повреждений.

Одной из наиболее плодотворных идей при исследовании механизмов зарождения и роста микроразрушений в напряженных элементах конструкций явилось введение понятия скалярных, векторных и тензорных мер повреждений [1–5]. Вместе с тем в подавляющем большинстве исследований, посвященных изучению накопления микроразрушений в конструкциях, меры повреждений рассматриваются только как функции времени. Зависимость от пространственных координат не учитывается, а зарождение и рост повреждений рассматривается либо в фиксированной, наиболее напряженной точке, либо равномерно во всем объеме элемента конструкции [1–10]. При этом считается, что процесс накопления повреждений заканчивается образованием макротрещины вследствие слияния микродефектов или разрушением образца путем потери целостности. Возникновение и движение фронтов микроразрушений от внимания исследователей, как правило, ускользают. В тех же случаях, когда меры повреждений зависят от координатного вектора через номинальные напряжения, вид правых частей кинетических уравнений устанавливается из эмпирических соображений, не учитывающих пространственные градиенты поля рассеянных микроразрушений [7, 11, 12].

В основе "точечных" моделей накопления повреждений лежат обыкновенные дифференциальные уравнения $d\psi/dt=f(\psi,\sigma_{ab};\xi,t)$, в которых $\psi(\xi^a,t)$ – скалярная мера повреждений, а вектор ξ является просто параметром [2–12]. Континуальные модели, основанные на уравнениях того же типа, учитывают зависимость компонент тензора напряжений $\sigma_{ab}=\sigma_{ab}(\xi,t)$ от вектора ξ и времени t [2, 7, 10–12]. При этом уравнения накопления повреждений рассматриваются совместно с условиями совместности и уравнениями равновесия твердого тела. Естественным обобщением эволюционных уравнений на распределенные системы было бы введение в модель диффузионных процессов переноса, т.е. осуществление перехода к уравнениям в частных производных параболического типа $\partial\psi/\partial t=f(\psi,\sigma_{ab})+\nabla(D\nabla\psi)$. Однако недостатком такого подхода является отсутствие явной связи с уравнением сохранения энергии и уравнением баланса энтропии. Для построения континуальных моделей разрушения, учитывающих взаимодействие полей различной физической природы, необходимо использовать достаточно общие принципы, основанные на базовых вариационных уравнениях.

Одним из вариационных принципов, широко используемых в настоящее время для построения уравнений движения сплошных сред, является принцип стационарного действия. Однако оказывается, что для систем с неголономными связями при непотенциальных внешних нагрузках этот принцип не справедлив. Чтобы обойти эти трудности, Л.И. Седов в 1964 г. предложил вариационный принцип, обобщающий принцип стационарного действия на необратимые процессы и наличие неконсервативных сил [13, 14]. В основу этого принципа было положено обобщенное уравнение принципа виртуальных работ, тесно связанное с уравнениями первого и второго начал термодинамики.

В данной статье вариационный принцип Л.И. Седова применен для построения термодинамической модели необратимого роста рассеянных повреждений в деформируемых твердых телах. Вывод замкнутой системы динамических уравнений проведен в рамках континуального механизма зарождения и роста диффузных повреждений. Общая система уравнений включает уравнение сохранения энергии, уравнения баланса импульса, уравнение "диффузии" необратимых повреждений, а также определяющие уравнения термомеханики диффузных микроразрушений. Для замыкания системы уравнений использованы соотношения Онзагера между обобщенными термодинамическими силами и потоками.

1. Рассмотрим неоднородное анизотропное нелинейно-упругое твердое тело, находящееся в поле термомеханических сил. Воздействие этих сил на тело сопровождается возникновением и ростом микроповреждений, что может привести к скоплению дефектов, возникновению макротрещины и разрушению тела как целого. Если размеры микродефектов малы по сравнению с характерными размерами тела, а концентрация дефектов достаточно велика, то для описания микроразрушений на континуальном уровне можно ввести скалярную меру повреждений $\psi(\xi^a, t)$, как функцию лагранжевых координат ξ^a и времени t.

Для определения термодинамического состояния бездефектной сплошной среды с помощью массовой плотности внутренней энергии U необходимо задать семь скалярных определяющих параметров: шесть компонент тензора деформаций $\varepsilon_{ab}(\xi^c,t)$ и массовую плотность энтропии $s(\xi^a,t)$. В повреждающейся среде параметров ε_{ab}, s недостаточно. Для описания необратимого разрушения среды необходимо, чтобы плотность внутренней энергии U зависела также от меры повреждений $\psi(\xi^a,t)$. Другими словами, скалярный параметр ψ должен отражать изменение физико-механических свойств материала тела вследствие необратимых процессов зарождения и роста микроповреждений. Таким образом, плотность внутренней энергии деформируемого твердого тела в поврежденном состоянии должна быть представлена в виде $U = U(\varepsilon_{ab}, s, \psi, \nabla_a \psi)$. Градиентный член $\nabla_a \psi$ учитывает здесь пространственную неоднородность поля повреждений; латинские индексы первой половины алфавита $a, b, c, \ldots$ относятся к лагранжевой системе координат и принимают значения 1, 2, 3.

Определяющие параметры $\varepsilon_{ab}(\xi^c,t)$, $s(\xi^a,t)$ и $\psi(\xi^a,t)$, однако, не образуют систему независимых функций. Например, компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{ab}(\xi^c,t)$ связаны уравнениями совместности, а плотность энтропии $s(\xi^a,t)$, плотность потока энтропии $s^a(\xi^b,t)$ и локальная скорость изменения энтропии $\sigma(\xi^a,t)$ удовлетворяют уравнению баланса

$$\rho\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla_a s^a = \sigma \tag{1.1}$$

где $\rho(\xi^a, t)$ – собственная плотность массы покоя тела, ∇_a – ковариантная производная в пространстве с метрическим тензором $g_{ab}(\xi^c,t)$. С помощью параметрических представлений для величин s, s^a, σ:

$$s=-\frac{1}{\rho}\nabla_a\left(\frac{\eta^a}{\sqrt{g}}\right)+\frac{1}{\rho\sqrt{g}}\eta,\quad s^a=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\eta^a}{\partial t},\quad \sigma=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\eta}{\partial t} \tag{1.2}$$

уравнение баланса энтропии (1.1) удовлетворяется тождественно, а параметры производства и переноса энтропии $\eta(\xi^a,t)$, $\eta^a(\xi^b,t)$ являются независимыми. Используя закон движения деформируемого тела в виде $x^k=x^k(\xi^a,t)$, где x^k – пространственные координаты эйлеровой системы отсчета, можно перейти от зависимых соотношений $\varepsilon_{ab}(\xi^c,t)$ к независимым функциям $x^k(\xi^a,t)$. Независимость системы определяющих параметров $x^k(\xi^a,t)$, $\eta(\xi^a,t)$, $\eta^a(\xi^b,t)$ и $\psi(\xi^a,t)$ при выводе динамических законов из вариационного принципа является решающим обстоятельством.

2. Построение модели диффузного разрушения твердого тела проведем на основе вариационного уравнения [13, 14]:

$$\delta I+\delta W^*+\delta W=0 \tag{2.1}$$

Здесь I – действие, определенное для любых возможных процессов и движений, δW^* – неголономный функционал, учитывающий необратимые термодинамические процессы и неконсервативные силы, δW – скалярный функционал, учитывающий энергообмен на граничных поверхностях тела, а также в начальный и конечный моменты времени движения. Вид функционала δW устанавливается из уравнения (2.1) после задания функционалов I и δW^*, фиксирующих термодинамическую модель повреждающегося твердого тела.

Представим действие I и функционал δW^* в виде, аналогичном предложенному ранее [15]:

$$I=\int_{t_0}^{t_1}\int_V\left\{\frac{1}{2}\upsilon_a\upsilon^a-U(\varepsilon_{ab},s,\psi,\nabla_a\psi)\right\}\rho\sqrt{g}\,d^3\xi\,dt \tag{2.2}$$

$$\delta W^*=\int_{t_0}^{t_1}\int_V\left\{\left(T\delta\eta+H_a\delta\eta^a\right)\frac{1}{\sqrt{g}}+Q^a\delta x_a+\Psi\delta\psi\right\}\sqrt{g}\,d^3\xi\,dt \tag{2.3}$$

где $\upsilon_a(\xi^b,t)$ – компоненты вектора скорости точек тела, $g(\xi^a,t)$ – определитель метрического тензора, $T(\xi^a,t)$ – термодинамическая температура, $Q^a(\xi^b,t)$ – компоненты вектора внешних объемных сил, V – область, связанная с материальными частицами повреждающегося твердого тела, $H_a(\xi^b,t)$ и $\Psi(\xi^a,t)$ – обобщенные термодинамические силы, соответствующие необратимым процессам теплопроводности и микроразрушения.

Подставим выражения (2.2), (2.3) в вариационное уравнение (2.1) и вычислим лагранжеву вариацию действия I. В итоге получим

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_V\left\{\left(T-\frac{\partial U}{\partial s}\right)\frac{\delta\eta}{\sqrt{g}}+\left[H_a-\nabla_a\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right]\frac{\delta\eta^a}{\sqrt{g}}+\left(\Psi-\rho\frac{\delta U}{\delta\psi}\right)\delta\psi+\right.$$

$$\left.+\left[\nabla_b\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ab}}\right)+Q^a-\rho\left(\frac{\partial\upsilon^a}{\partial t}+\upsilon^b\nabla_b\upsilon^a\right)\right]\delta x_a\right\}\sqrt{g}\,d^3\xi\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_V\left\{\frac{\partial U}{\partial s}\frac{\delta\eta^b}{\sqrt{g}}-\rho\frac{\partial U}{\partial\nabla_b\psi}\delta\psi-\sigma^{ab}\delta x_a\right\}n_b dSdt+$$

$$+\left[\int_V \rho\upsilon^a\delta x_a\sqrt{g}d^3\xi\right]_{t_0}^{t_1}+\delta W=0 \qquad (2.4)$$

Здесь n_b – компоненты вектора внешней нормали к поверхности S, ограничивающей область V, занятую телом; $\delta U/\delta\psi=\partial U/\partial\psi-\rho^{-1}\nabla_a(\rho\partial U/\partial\nabla_a\psi)$ – вариационная производная.

Приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях определяющих параметров в (2.4), получим систему динамических уравнений термомеханики диффузного разрушения

$$\rho(\partial\upsilon^a/\partial t+\upsilon^b\nabla_b\upsilon^a)=\nabla_b\sigma^{ab}+Q^a,\ \ \rho\delta U/\delta\psi=\Psi \qquad (2.5)$$

$$T=\partial U/\partial s,\ \ \sigma^{ab}=\rho\partial U/\partial\varepsilon_{ab},\ \ H_a=\nabla_a T \qquad (2.6)$$

Первое уравнение (2.5) является уравнением баланса импульса. Второе уравнение (2.5) управляет процессами накопления повреждений в напряженном теле. Система уравнений (2.6) – определяющие уравнения термомеханики повреждающегося тела: первое уравнение определяет абсолютную температуру, второе – тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа, третье – закон теплопроводности Фурье.

Задавая функционал δW на границе четырехмерной области $V\times[t_0,t_1]$ равенством

$$\delta W=-\int_{t_0}^{t_1}\int_S\left\{T_0\frac{\delta\eta^a}{\sqrt{g}}n_a+\rho J_o\delta\psi-p^a\delta x_a\right\}dS-$$

$$-\left[\int_V\rho\upsilon_0^a\delta x_a\sqrt{g}d^3\xi\right]_{t_0}^{t_1} \qquad (2.7)$$

из вариационного уравнения (2.4) можно также найти альтернативные граничные условия при $\xi^a\in S$:

$$(T-T_0)n_a\frac{\delta\eta^a}{\sqrt{g}}=0,\ \ \rho\left(\frac{\partial U}{\partial\nabla_a\psi}n_a+J_0\right)\delta\psi=0,\ \ (\sigma^{ab}n_b-p^a)\delta x_a=0 \qquad (2.8)$$

и предельные (или начальные) условия при $t=t_0$, $t=t_1$:

$$\rho(\upsilon^a-\upsilon_0^a)\delta x_a=0 \qquad (2.9)$$

Динамическое условие $T=T_0$ в первом уравнении (2.8) задает температуру на границе тела, а кинематичекое условие $n_a\delta\eta^a/\sqrt{g}=0$ с помощью формул (1.2) определяет поток энтропии s^a или тепла $q^a=Ts^a$ через граничную поверхность с нормалью n_a. В случае конвективного теплообмена с внешней средой кинематическое граничное условие может быть представлено в форме $q^a n_a=k(T-T_0)$, где k – коэффициент теплоотдачи.

Кинематическое условие $\delta\psi=0$ задает граничное значение меры повреждений $\psi=\psi_0$; динамическое условие, определяемое вторым уравнением (2.8), означает непрерывность потока повреждений $J^a=-\partial U/\partial\nabla_a\psi$ через контактную поверхность твердых тел. Если $J_0 = 0$, то условие $J^a n_a = -(\partial U / \partial \nabla_a \psi) n_a = 0$ означает отсутствие потока повреждений через граничную поверхность S.

Динамические $\sigma^{ab} n_b = p^a$ и кинематические δx_a условия, соответствующие последнему равенству (2.8), выражают обычные граничные условия в напряжениях и перемещениях, используемые в механике деформируемого твердого тела [8]. Условия (2.9) задают пространственные распределения координат и импульсов материальных частиц тела в начальный момент времени.

3. В лагранжевой системе отсчета в проекциях на оси деформируемого базиса общая система неизвестных содержит компоненты вектора перемещений точек тела $u^a(\xi^b, t)$; компоненты вектора скорости $\upsilon^a(\xi^b, t)$, связанные с перемещениями u^a соотношениями

$$\upsilon^a = \partial u^a / \partial t + \upsilon^b \nabla_b u^a \tag{3.1}$$

собственную плотность тела $\rho(\xi^a, t)$, массовую плотность энтропии $s(\xi^a, t)$ и скалярную меру повреждений $\psi(\xi^a, t)$, т.е. всего девять скалярных величин. Однако система динамических уравнений (1.1), (2.5), (2.6), (3.1) незамкнута и должна быть дополнена уравнением локального баланса массы

$$\rho\sqrt{g} = \rho_0\sqrt{g_0} = f(\xi^a) \tag{3.2}$$

соотношениями Коши–Альманси

$$\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2}\left(\nabla_a u_b + \nabla_b u_a - \nabla_a u_c \nabla_b u^c\right) \tag{3.3}$$

а также уравнениями, определяющими термодинамические силы $H_a(\xi^b, t)$ и $\Psi(\xi^a, t)$.

Применим вариационное уравнение (2.1) для построения уравнения сохранения внутренней энергии $U(\xi^a, t)$ и диссипативной функции $\sigma(\xi^a, t)$. Заменим в (2.1) произвольную лагранжеву вариацию $\delta\mu^A$ определяющих параметров μ^A на вариацию $\delta^0\mu^A = (\partial\mu^A / \partial t)\delta\tau$, являющуюся аналогом дифференциала Ли в ньютоновском пространстве с абсолютным временем. Тогда уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1}\int_V \frac{\partial L}{\partial t}\,\delta\tau\rho\sqrt{g}\,d^3\xi dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_V \left\{\left(T\frac{\partial\eta}{\partial t} + H_a\frac{\partial\eta^a}{\partial t}\right)\frac{1}{\sqrt{g}} +\right.\\
&\left. + Q^a\upsilon_a + \Psi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\}\delta\tau\sqrt{g}\,d^3\xi dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_V \nabla_b\left[\frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial\eta^b}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{g}} -\right.\\
&\left. -\rho\frac{\partial U}{\partial\nabla_b\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \sigma^{ab}\upsilon_a + \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon_a\upsilon^a\right)\right]\delta\tau\sqrt{g}\,d^3\xi dt = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Используя далее соотношения (1.2), (2.5), (2.6) и учитывая, что равенство (3.4) должно выполняться при любых значениях области $V[t_0, t_1]$ и произвольной постоянной $\delta\tau$, получим энергетическое уравнение в локальной форме

$$\begin{aligned}
&-\rho\frac{\partial U}{\partial t} + \sigma^{ab}\nabla_b\upsilon_a - \nabla_a q^a + \nabla_a\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\nabla_a\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) +\\
&+ T\sigma + T^{-1}H_a q^a + \Psi\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Исключая затем σ из уравнений (1.1), (3.5), найдем

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t}-\sigma^{ab}\nabla_b\upsilon_a+\nabla_a q^a-\nabla_a\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\nabla_a\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-$$

$$-T\left(\rho\frac{\partial s}{\partial t}+\nabla_a s^a+T^{-2}H_a q^a+T^{-1}\Psi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0 \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) является логическим следствием базового вариационного уравнения (2.1) и содержит в синтезированном виде первое и второе начала термодинамики. В приведенной записи первая строка этого уравнения выражает уравнение баланса внутренней энергии, вторая – уравнение баланса энтропии. Можно показать, что одно уравнение вытекает из другого. Следовательно, для дальнейшего необходимо постулировать дополнительное условие: либо уравнение баланса внутренней энергии, либо уравнение баланса энтропии является тождеством в силу уравнений (2.5) и (2.6). В качестве тождественно выполняющегося естественно взять уравнение баланса внутренней энергии

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t}-\sigma^{ab}\nabla_b\upsilon_a+\nabla_a q^a-\nabla_a\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\nabla_a\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\equiv 0 \tag{3.7}$$

Тогда из (3.6) получим уравнение баланса энтропии

$$\rho\frac{\partial s}{\partial t}+\nabla_a s^a=\sigma,\quad \sigma\equiv -T^{-2}q^a\nabla_a T-T^{-1}\Psi\frac{\partial\psi}{\partial t}\geqslant 0 \tag{3.8}$$

в котором диссипативная функция $\sigma(\xi^a,t)$ определяет величину необратимого роста энтропии за счет процессов теплопроводности и микроразрушений.

При наличии связей между термодинамическими силами $H_a=\nabla_a T$, Ψ и потоками $q^a,\partial\psi/\partial t$ величину σ в соответствии с теорией Онзагера можно рассматривать как квадратичную форму относительно термодинамических потоков или сил. Тогда в соответствии с локальной формулировкой неравновесной термодинамики представим связь между термодинамическими потоками и силами в следующей упрощенной форме

$$q^a=-\lambda^{ab}\nabla_b T,\quad \Psi=-\Gamma\partial\psi/\partial t \tag{3.9}$$

Феноменологические коэффициенты λ^{ab} и Γ являются, вообще говоря, нелинейными тензорными функциями от определяющих параметров и их производных. При этом компоненты λ^{ab} формируют тензор коэффициентов теплопроводности в неповрежденном твердом теле, а первое уравнение (3.9) выражает закон теплопроводности Фурье. Параметр Γ назовем коэффициентом сопротивления накоплению повреждений; он имеет размерность объемной плотности действия [Дж · с/м^3]. Обобщенная термодинамическая сила Ψ равна работе, которую необходимо затратить на продвижение фронта микроразрушений в деформируемом твердом теле. Соотношения (3.9) замыкают общую систему уравнений термодинамики микроразрушений относительно девяти неизвестных величин u^a, υ^a, ρ, s, ψ.

4. Фиксирование конкретной модели повреждающегося твердого тела в равной степени можно проводить на основе внутренней энергии $U(\varepsilon_{ab},s,\psi,\nabla_a\psi)$, свободной энергии Гельмгольца $F(\varepsilon_{ab},T,\psi,\nabla_a\psi)$ или термодинамического потенциала Гиббса $\Phi(\sigma^{ab},T,\psi,\nabla_a\psi)$. Если, например, необходимо решать динамическую связанную задачу термофрактомеханики, то в положении термодинамического равновесия минимума достигает свободная энергия Гельмгольца. Если тело находится в квазистатическом термосиловом поле, то термодинамическое равновесие наступит, когда минимума достигнет термодинамический потенциал Гиббса. Связь между этими потенциалами устанавливается преобразованиями Лежандра

$$F = U - Ts, \quad \Phi = F - \sigma^{ab}\varepsilon_{ab} \tag{4.1}$$

причем определяющие уравнения термомеханики могут быть записаны следующим образом

$$\sigma^{ab} = \rho(\partial U / \partial\varepsilon_{ab})_{s,\psi} = \rho(\partial F / \partial\varepsilon_{ab})_{T,\psi}, \quad \varepsilon_{ab} = -(\partial\Phi / \partial\sigma^{ab})_{T,\psi}$$

$$T = (\partial U / \partial s)_{\varepsilon,\psi}, \quad s = -(\partial F / \partial T)_{\varepsilon,\psi} = -(\partial\Phi / \partial T)_{\sigma,\psi} \tag{4.2}$$

Для определенности рассмотрим свободную энергию Гельмгольца. Представим массовую плотность F в виде суммы $F = F_n + F_*$, где $F_n(\varepsilon_{ab}, T)$ – плотность свободной энергии твердого тела без повреждений, а $F_*(\varepsilon_{ab}, T, \psi, \nabla_a\psi)$ – разность свободных энергий тела в поврежденном и неповрежденном состояниях. В соответствии с уравнениями (2.5), (3.9) имеем $\rho\delta F / \delta\psi = -\Gamma\partial\psi / \partial t \leqslant 0$. Отсюда видно, что микроразрушения ведут к уменьшению свободной энергии тела, т.е. $F_* \leqslant 0$. Считая F_n и F_* голоморфными функциями скалярных (T, ψ) и тензорных ($\varepsilon_{ab}, \nabla_a\psi$) аргументов, разложим их в ряды Тейлора в окрестности начального состояния

$$\rho_0 F_n(\varepsilon_{ab}, T) = \rho_0 F_0 - \rho_o s_0\theta + \sigma_0^{ab} e_{ab} -$$

$$- \tfrac{1}{2}\rho_0 c_0 \theta^2 T_0^{-1} + \tfrac{1}{2} E_0^{abcd} e_{ab}(e_{cd} - 2\alpha_{cd}\theta) + \ldots \tag{4.3}$$

$$\rho_0 F_* = -A(\varepsilon_{ab}, T)(m+1)^{-1}\psi^{m+1} + B(m+n+1)^{-1}\psi^{m+n+1} + D^{ab}\nabla_a\psi\nabla_b\psi + \ldots \tag{4.4}$$

Здесь ρ_0 – плотность в начальный момент времени; F_0, s_0 и σ_0^{ab} – несущественные постоянные; $e_{ab} = \varepsilon_{ab} - \varepsilon_{ab}^0$, $\theta = T - T_0$; ε_{ab}^0 и T_0 – тензор деформаций и абсолютная температура тела в начальном состоянии; c_0 – теплоемкость сплошной среды при постоянной деформации; E_0^{abcd} и α_{ab} – тензор упругих постоянных и тензор коэффициентов линейного теплового расширения; D^{ab} – компоненты тензора коэффициентов "диффузии" повреждений.

Деформационную зависимость коэффициентов в (4.4) обсудим подробнее. Если связывать процесс зарождения и роста повреждений с тензором локальных микронапряжений, то в шестимерном пространстве деформаций этому тензору можно поставить в соответствие поверхность разрушения. При активном нагружении предельная поверхность в пространстве деформаций будет перемещаться и деформироваться, отслеживая процессы анизотропного упрочнения. Поэтому соотношения между напряжениями и деформациями должны существенно отличаться от линейно-упругих. В этой связи слагаемое, пропорциональное $A(\varepsilon_{ab}, T)$ в (4.4), должно содержать, как минимум, линейные инварианты тензора деформаций, а коэффициенты B, D^{ab} в первом приближении можно считать константами материала.

Покажем, что это так. Рассмотрим тело с однородным распределением дефектов в поле постоянных термоупругих напряжений. Тогда функция F_* не должна зависеть от пространственных координат ξ^a, и разложение свободной энергии может быть представлено в форме

$$\rho_0 F = \rho_0 F_n - A(\varepsilon_{ab}, T)(m+1)^{-1}\psi^{m+1} + B(m+n+1)^{-1}\psi^{m+n+1} \tag{4.5}$$

Дифференцируя это выражение по ψ, найдем значения меры повреждений, при которых свободная энергия тела экстремальна:

$$\psi_0 = 0, \ \psi_* = (A/B)^{1/n} \in [0,1) \tag{4.6}$$

Поскольку процесс накопления повреждений необратим, то скорость роста плотности повреждений есть неотрицательная величина. Значение $\psi = 0$ соответствует неповрежденному материалу; при $\psi = 1$ либо образуется макротрещина, либо материал разрушается путем потери целостности. Следовательно, при любых n коэффициенты A, B будут иметь одинаковые знаки. В точке $\psi = \psi_0$ свободная энергия имеет максимум $F(\psi_0) = F_n$; при $\psi = \psi_*$ свободная энергия достигает минимума

$$\rho_0 F(\psi_*) = \rho_0 F_n - nA[(m+1)(m+n+1)]^{-1}(A/B)^{(m+1)/n} \tag{4.7}$$

Отсюда видно, что при поврежденном состоянии материала коэффициенты A, B должны быть положительны, причем коэффициент A при $\varepsilon_{ab} = \varepsilon^0_{ab}$, $T = T_0$ должен равняться нулю, а коэффициент B можно считать постоянным.

С учетом сделанных замечаний запишем функцию $\rho_0 F_*$ в виде

$$\rho_0 F_* = -[A^{ab}(e_{ab} - \alpha_{ab}\theta) + \tfrac{1}{2}A^{abcd}(e_{ab} - \alpha_{ab}\theta)(e_{cd} - \alpha_{cd}\theta)] \times$$
$$\times (m+1)^{-1}\psi^{m+1} + B(m+n+1)\psi^{m+n+1} + D^{ab}\nabla_a\psi\nabla_b\psi + \ldots \tag{4.8}$$

где A^{ab}, A^{abcd} – компоненты тензоров поверхности разрушения в пространстве деформаций [16]. Подставляя массовую плотность свободной энергии в первое уравнение (4.2), получим выражение для компонент тензора напряжений

$$\sigma^{ab} = \frac{\rho}{\rho_0}\left\{\sigma_0^{ab} + \left[E_0^{abcd} - (m+1)^{-1}\psi^{m+1}A^{abcd}\right](e_{cd} - \alpha_{cd}\theta) - (m+1)^{-1}\psi^{m+1}A^{ab}\right\} \tag{4.9}$$

В силу принципа существования основного состояния при $\varepsilon_{ab} = \varepsilon^0_{ab}$, $T = T_0$ компоненты тензора σ_0^{ab} равны нулю. Плотность ρ при малых деформациях можно заменить значением ρ_0.

Представим компоненты тензора A^{ab} следующим образом:

$$A^{ab} = (m+1)\left[E_0^{abcd} - (m+1)^{-1}\psi^{m+1}A^{abcd}\right]C_{cd}$$

и введем обозначение

$$\varepsilon^*_{ab} = C_{ab}\psi^{m+1} \tag{4.10}$$

Тогда формулу (4.9) можно переписать в виде

$$\sigma^{ab} = \left[E_0^{abcd} - (m+1)^{-1}\psi^{m+1}A^{abcd}\right]\left(\varepsilon_{cd} - \varepsilon^0_{cd} - \alpha_{cd}\theta - \varepsilon^*_{cd}\right) \tag{4.11}$$

В равновесном состоянии имеем $\psi = [A(\varepsilon_{ab}, T)/B]^{1/n}$. Поэтому определяющие соотношения (4.11) отражают не только термоупругие свойства материала, но и неупругие, вызванные зарождением и ростом микроразрушений. Мерой неупругих деформаций за счет объемного порообразования может служить тензор с компонентами (4.10).

В изотропном твердом теле плотность свободной энергии определим выражением

$$\rho_0 F = \rho_0 F_0 - 9K_o\alpha\theta e - \tfrac{1}{2}\rho_0 c_0 \theta^2 T_0^{-1} + \tfrac{9}{2}K_0 e^2 +$$
$$+\tfrac{3}{2}G_0 e_i^2 - \left[9K_0 A_0(e-\alpha\theta) + \tfrac{3}{2}G_0 A_1 e_i^2\right](m+1)^{-1}\psi^{m+1} +$$
$$+B(m+n+1)^{-1}\psi^{m+n+1} + D(\nabla\psi)^2 \qquad (4.12)$$

Используя формулы типа (4.2), получим

$$\sigma = (\rho_0 / 3)\partial F / \partial e = 3K_0[e - \alpha\theta - A_o(m+1)^{-1}\psi^{m+1}]$$
$$\sigma_i = \rho_0 \partial F / \partial e_i = 3G_0[1 - A_1(m+1)^{-1}\psi^{m+1}]e_i \qquad (4.13)$$

Здесь K_0 и G_0 – изотермический объемный модуль и модуль сдвига в неповрежденном теле, $e = \tfrac{1}{3}g_{ab}e^{ab}$ – средняя объемная деформация, $e'_{ab} = e_{ab} - eg_{ab}$ – девиатор тензора деформаций, $e_i = (\tfrac{2}{3}e'_{ab}e^{ab'})^{1/2}$ – интенсивность деформаций сдвига, $\sigma = \tfrac{1}{3}g_{ab}\sigma^{ab}$ – среднее гидростатическое напряжение, $\sigma'_{ab} = \sigma_{ab} - \sigma g_{ab}$ – девиатор тензора напряжений, $\sigma_i = (\tfrac{3}{2}\sigma'_{ab}\sigma^{ab'})^{1/2}$ – интенсивность напряжений сдвига. Слагаемое $A_0(m+1)^{-1}\psi^{m+1}$ в первой формуле (4.13) определяет меру неупругой объемной деформации при всестороннем растяжении вследствие образования микропор. При этом деформация ε складывается из упругой $\varepsilon_e = \sigma/(3K_0)$, начальной $\varepsilon_0 = \tfrac{1}{3}g_{ab}\varepsilon_0^{ab}$, температурной $\varepsilon_t = \alpha\theta$ и неупругой $\varepsilon_* = A_0(m+1)^{-1}\psi^{m+1}$ составляющих. Слагаемое $A_1(m+1)^{-1}\psi^{m+1}$ во второй формуле (4.13) учитывает влияние повреждений на величину касательного модуля сдвига $G = G_0[1 - A_1(m+1)^{-1}\psi^{m+1}]$.

Массовая плотность энтропии s в случае анизотропного повреждающегося тела в неравновесном состоянии определяется соотношениями (4.2), (4.3), (4.8):

$$s = -(\partial F / \partial T)_{\varepsilon,\psi} = s_0 + c_0\theta T_0^{-1} + E_0^{abcd}e_{ab}\alpha_{cd}\rho_0^{-1} -$$
$$-[A^{ab}\alpha_{ab} + A^{abcd}(e_{ab} - \alpha_{ab}\theta)\alpha_{cd}](m+1)^{-1}\psi^{m+1}\rho_0^{-1} \geqslant s_0 \qquad (4.14)$$

Удельная теплоемкость при постоянной деформации в неравновесном процессе микроразрушений в приближении $|\theta / T_0| \ll 1$ подсчитывается по формуле

$$c = T(\partial s / \partial T)_{\varepsilon,\psi} = c_0 + A^{abcd}\alpha_{ab}\alpha_{cd}(m+1)^{-1}\psi^{m+1}T_0\rho_0^{-1} \geqslant c_0 \qquad (4.15)$$

В начальном состоянии при $\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{ab}^0, T = T_0$ имеем $\psi = 0$ и, следовательно, $c = c_0$. При достижении термодинамического равновесия в однородном теле $\partial\psi / \partial t = 0$, $\nabla_a\psi = 0$, $\Psi = 0$ и $\psi = \psi_*$. При этом мера повреждений теряет свою независимость в ряду определяющих параметров и становится функцией деформации и температуры: $\psi = \psi_*(\varepsilon_{ab}, T)$. Равновесное значение теплоемкости в этом случае определяется полной производной

$$c_* = T(\partial s / \partial T)_{\varepsilon,\Psi} = T(\partial s / \partial T)_{\varepsilon,\psi} + T(\partial s / \partial\psi)_{\varepsilon,T}(\partial\psi / \partial T)_{\varepsilon,\Psi} =$$
$$= c_0 + T_0\rho_0^{-1}\psi_*^{m+1}\left\{(m+1)^{-1}A^{abcd}\alpha_{ab}\alpha_{cd} + (nB)^{-1}[A^{ab}\alpha_{ab} +\right.$$
$$\left.+A^{abcd}(\varepsilon_{ab} - \varepsilon_{ab}^0 - \alpha_{ab}\theta)\alpha_{cd}]^2\psi_*^{-n}\right\} \geqslant c \qquad (4.16)$$

Аналогичным образом вычисляются другие равновесные термодинамические коэффициенты

$$E_*^{abcd} = (\partial\sigma^{ab} / \partial\varepsilon_{cd})_{T,\Psi}, \quad \alpha^*_{ab} = -S^*_{abcd}(\partial\sigma^{cd} / \partial T)_{\varepsilon,\Psi}$$

где S^*_{abcd} – компоненты изотермического тензора податливости твердого тела в равновесном состоянии.

5. Для построения уравнения "диффузии" микроразрушений предположим, что коэффициент сопротивления накоплению повреждений во второй формуле (3.9) является нелинейной функцией меры повреждений: $\Gamma = \Gamma_0(1 - C\psi^l)$, где Γ_0, C и l – феноменологические константы. При $C > 0$, $l > 0$ параметр $\Gamma(\psi)$ учитывает влияние плотности накопленных микроразрушений на скорость повреждения оставшихся структурных элементов тела [6–9]. Подставляя плотность свободной энергии $F(\varepsilon_{ab}, T, \psi, \nabla_a\psi)$ и обобщенную термодинамическую силу сопротивления повреждениям $\Psi = -\Gamma\partial\psi / \partial t$ во второе уравнение (2.5), получим нелинейное параболическое уравнение распространения микроразрушений в деформируемом твердом теле

$$\Gamma_0(1 - C\psi^l)\partial\psi / \partial t = A(\varepsilon_{ab}, T)\psi^m - B\psi^{m+n} + \nabla_a(D^{ab}\nabla_b\psi) \qquad (5.1)$$

Если компоненты тензора "диффузии" D^{ab} равны нулю, то уравнение (5.1) описывает накопление повреждений равномерно в объеме тела. При дополнительном условии $B = 0$ имеем автомодельный процесс накопления повреждений с учетом перераспределения деформаций в неповрежденных структурных элементах. Если, кроме того, и $C = 0$, то получаем модель, в которой деформации в структурных элементах не зависят от уровня накопленных повреждений. Дополнительное предположение $m = 0$ приводит к линейному правилу суммирования повреждений [1–12].

В общем случае накопление повреждений одновременно во всех точках деформированного тела мало вероятно. Более реалистичным представляется следующий механизм накопления повреждений: возникновение микроразрушений в наиболее напряженных точках, рост плотности повреждений до термодинамически равновесной величины, эстафетное распространение повреждений по среде, слияние пространственных очагов микроразрушений, образование сплошной зоны повреждений во всем объеме деформируемого твердого тела. Очевидно, что скорость распространения фронта повреждений, так же как и равновесное значение меры повреждений, должна быть пропорциональна инвариантам тензора деформаций или напряжений.

Покажем, что уравнение (5.1) имеет решение в виде стационарной уединенной волны типа кинка. Пусть параметры $A(\varepsilon_{ab}, T)$, B, C, $D^{ab} = Dg^{ab}$ и Γ_0 – константы материала. Тогда стационарное решение уравнения (5.1) с граничными условиями $\psi = \psi_*$ при $\xi \to -\infty$ и $\psi = 0$ при $\xi \to +\infty$ будем искать в виде плоской волны $\psi(\xi, t) = \psi(\xi - Vt) \equiv \psi(x)$, где V – скорость распространения фронта повреждений. Подставляя искомое решение в (5.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-V\Gamma_0(1 - C\psi^l)d\psi / dx = A\psi^m - B\psi^{m+n} + Dd^2\psi / dx^2 \qquad (5.2)$$

Вводя новую переменную $\varphi = d\psi/dx$, понизим порядок этого уравнения и представим его решение в виде $\varphi = \varphi_0\psi(A - B\psi^n)$, где φ_0 – неизвестная постоянная. В результате имеем

$$V\Gamma_0 + D\varphi_0 A - V\Gamma_0 C\psi^l + \varphi_0^{-1}\psi^{m-1} - D\varphi_0 B(n+1)\psi^n = 0 \qquad (5.3)$$

Уравнение (5.3) будет удовлетворено при любых значениях $\psi \in [0, \psi_*]$, если потребовать выполнение условий $l = m - 1 = n > 0$ и

$$V\Gamma_0 = -D\varphi_0 A, \quad mD\varphi_0^2 B + V\Gamma_0 C\varphi_0 = 1 \tag{5.4}$$

Отсюда найдем параметры задачи V и φ_0:

$$V = \frac{A}{\Gamma_0}\sqrt{\frac{D}{N}} > 0, \quad \varphi_0 = -\frac{1}{\sqrt{DN}} < 0, \quad N = (n+1)B - AC > 0 \tag{5.5}$$

Очевидно, что с увеличением термомеханических деформаций коэффициент $A(\varepsilon_{ab}, T)$ и, следовательно, скорость фронта повреждений V возрастают. Естественно, что скорость фронта повреждений пропорциональна также коэффициенту "диффузии" ($V \sim \sqrt{D}$) и обратно пропорциональна силе сопротивления накоплению повреждений ($V \sim 1/\Gamma_0$).

Соотношение $\varphi = d\psi / dx = \varphi_0 \psi (A - B\psi^n)$ является уравнением с разделяющимися переменными и легко интегрируется:

$$\int_{\psi_1}^{\psi} \frac{d\psi}{\psi(A - B\psi^n)} = \frac{1}{nA} \ln\left|\frac{\psi^n(\psi_*^n - \psi_1^n)}{\psi_1^n(\psi_*^n - \psi^n)}\right| = \int_0^x \varphi_0 dx = \varphi_0 x \tag{5.6}$$

После преобразований получаем решение нелинейного уравнения (5.1) в виде плоской стационарной волны типа кинка

$$\psi(\xi, t) = \psi_* \left\{1 + \left[(\psi_* / \psi_1)^n - 1\right] \exp[-nA\varphi_0(\xi - Vt)]\right\}^{-1} \tag{5.7}$$

Поскольку $\varphi_0 < 0$, то это решение удовлетворяет поставленным граничным условиям при $\xi \to \pm\infty$. Волна повреждений движется в положительном направлении оси ξ, сменяя состояние среды $\psi = 0$ на состояние $\psi = \psi_*$. Распространение уединенной волны обеспечивается динамическим равновесием между нелинейным процессом накопления повреждений и "диффузией" повреждений в деформированном теле. В каждой точке объема среды запасена свободная энергия и набегающая волна повреждений служит сигналом к ее высвобождению. При этом величина высвободившейся энергии в точности равна энергии, необходимой для поддержания движения волны.

Из формул (5.5), (5.7) видно, что при больших номинальных деформациях скорость и крутизна фронта волны увеличиваются. В пределе $A(\varepsilon_{ab}, T) \to B$, $\psi_* \to 1$ происходит формирование ударной волны, распространяющейся со скоростью

$$V_* = [DB / (n + 1 - C)]^{1/2} / \Gamma_0 < V_0 \tag{5.8}$$

где V_0 – минимальная скорость волны сдвига в твердом теле. Отсюда следует, что феноменологическая константа C должна быть ограничена неравенствами

$$0 \leq C < n + 1 - DB(V_0\Gamma_0)^{-2} \tag{5.9}$$

Заметим также, что при выполнении вышеуказанных ограничений на коэффициенты уравнения (5.1) решение (5.7) единственно и устойчиво в классе монотонных функций [17].

Таким образом, термодинамический анализ накопления диффузных повреждений в твердых телах позволяет сделать следующие выводы. Процессы зарождения и роста микроповреждений при любых режимах нагружения уменьшают свободную энергию деформируемого твердого тела. Кинетические уравнения накопления повреждений, полученные с помощью вариационного принципа, могут содержать лишь целочисленные степени меры повреждений, абсолютной температуры и инвариантов тензора деформаций (напряжений). Учет зависимости свободной энергии от меры диффузных повреждений позволяет определить величину неупругой деформации за счет образования микропор и микротрещин, оценить влияние повреждений на изменения касательных модулей, энтропии и теплоемкости. Показано, что процессы распространения повреждений в деформируемых твердых телах могут иметь волновой характер, причем скорость движения фронта повреждений зависит от номинальных деформаций, вязкости микроразрушений и коэффициента "диффузии" повреждений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Palmgren A.* Die Lebensdauer von Kugellagern // VDJ Z. 1924. B. 68. N 14. S. 339–341.
2. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
3. *Болотин В.В.* Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. 279 с.
4. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. *Ильюшин А.А.* Об одной теории длительной прочности // Инж. ж. МТТ. 1967. № 3. С. 21–35.
6. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 447 с.
7. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.
8. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
9. *Махутов Н.А., Работнов Ю.Н., Серенсен С.В., Пригоровский Н.Н.* Развитие исследований по механике деформирования и разрушения // Машиноведение. 1977. № 5.С. 66–85.
10. *Шестериков С.А., Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов // Итоги науки и техники. Механика деформ. твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1980. Т. 13. С. 3–104.
11. *Хульт Я.* Поврежденность и распространение трещин // Механика деформируемых твердых тел. Направления развития. М.: Мир, 1983. С. 230–256.
12. *Hutchinson J.W.* Micro–Mechanics of Damage in Deformation and Fracture. Lyngby: Techn. Univ. Denmark, 1987. 96 p.
13. *Седов Л.И.* Об основных моделях в механике. М.: Изд-во МГУ, 1992. 151 с.
14. *Седов Л.И., Цыпкин А.Г.* Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма. М.: Наука, 1989. 272 с.
15. *Лобанов Е.В.* К теории надежности упругопластических сверхпроводящих оболочек // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 4. С. 135–150.
16. *Ву Э.М.* Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред // Композиционные материалы. Т:2. Механика композиционных материалов. М.: Мир, 1978. С. 401–491.
17. *Молотков И.А., Вакуленко С.А.* Сосредоточенные нелинейные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 240 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.XII.1992