

УДК 539.3

© 1993 г. С.Ю. Еременко

МЕТОД РАВНОВЕСНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Для решения краевых задач теории упругости, термоупругости, динамической теории упругости, расчета кручения стержней, изгиба пластин предлагается применять метод равновесных граничных элементов, идея которого состоит в совместном использовании методов построения пучков функций, точно удовлетворяющих дифференциальным уравнениям равновесия, граничных вариационных уравнений механики и методик дискретной конечно-элементной аппроксимации. Вариационный способ построения разрешающих граничных уравнений обеспечивает симметричность систем линейных уравнений и удобство сопряжения с методом конечных элементов. За счет исключения объемных интегралов здесь также удастся понизить размерность задачи на единицу, однако, в отличие от метода граничных элементов нет необходимости в знании фундаментальных решений. Решение нескольких задач кручения стержней и изгиба пластин подтверждает высокую вычислительную эффективность метода.

Идея метода равновесных граничных элементов (МРГЭ) [1] заключается в совместном использовании принципов дискретной конечно-элементной аппроксимации [2], методик построения базисных систем функций, точно удовлетворяющих дифференциальным уравнениям равновесия в перемещениях [3–15], и граничных вариационных уравнений механики [8, 16–19]. Внутри тела все необходимые уравнения удовлетворяются тождественно, поэтому сетку конечных элементов нужно строить только на границе. Для определения перемещений граничных узлов составлены граничные вариационные уравнения, не содержащие объемных интегралов. Таким образом, как и в методе граничных элементов [4], удастся понизить размерность задачи на единицу, однако, в отличие от последнего, нет необходимости в использовании сингулярных фундаментальных решений. При этом вариационный способ построения обеспечивает симметричность разрешающих систем линейных уравнений и удобство сопряжения МРГЭ с методом конечных элементов [1].

В отличие от работ [16–19] ниже используются несингулярные базисные полиномиальные решения [3], облегчающие численную реализацию метода. Кроме того, используемые граничные вариационные уравнения можно получить из обобщенного вариационного принципа Ху–Васидзу [7], а функционал имеет размерность энергии (ранее использовались методы коллокаций или наименьших квадратов [3, 16]; "немеханические" функционалы [17]; сокращенный функционал только для учета силовых граничных условий [18, 19]). Наконец, во многих из указанных работ не приведены примеры практической реализации методик для решения краевых задач или их крайне мало [3, 5, 16–20]. В идейном плане данная статья наиболее близка к работе [21], в которой использованы и полиномиальные фундаментальные решения, и аналогичные "энергетические" вариационные уравнения, но применительно только к плоским задачам теории упругости.

Высокая вычислительная эффективность МРГЭ, связанная с небольшим порядком разрешающих симметричных систем линейных уравнений, подтверждается решением ряда тестовых задач.

Существование для многих классов задач известных представлений общих решений через гармонические или другие специальные функции, разработанность методик автоматизированного построения равновесных аппроксимаций, возможность оптимального выбора порядка и ширины ленты разрешающей системы уравнений и относительная простота реализации делают МРГЭ перспективным численным методом решения статических и динамических краевых задач теории упругости для кусочно-однородных тел, сравнимым по универсальности с методами конечных и граничных элементов и дополняющим их.

1. Краевая задача теории упругости. Пусть трехмерное однородное анизотропное тело занимает объем V , ограниченный поверхностью S . Под действием известных объемных сил F_i и заданных на части поверхности S_2 граничных усилий p_i^* в теле возникают напряжения σ_{ij} , которые вызывают деформации ϵ_{ij} и перемещения u_i . Внутри тела напряжения должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (1.1)$$

а на границе – силовым граничным условиям

$$p_i = \sigma_{ij} n_j = p_i^* \quad \text{на } S_2 \quad (1.2)$$

причем напряжения и деформации связаны соотношениями обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij} = d_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.3)$$

а деформации и перемещения – формулами Коши

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (1.4)$$

После подстановки (1.4) и (1.3) в (1.1) получаются уравнения равновесия в перемещениях

$$M_{ij} u_j + F_i = \frac{1}{2} d_{ijkl} (u_{k,lj} + u_{l,ki}) + F_i = 0 \quad (1.5)$$

где M_{ij} – известный дифференциальный оператор второго порядка. Среди бесконечного числа решений этих уравнений истинными являются те, которые на части границы S_1 совпадают с заданными перемещениями u_i^* :

$$u_i = u_i^* \quad \text{на } S_1 \quad (1.6)$$

В формулах (1.1)–(1.6) используется правило суммирования по повторяющимся индексам, n_j – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности, d_{ijkl} – симметричный тензор упругих констант анизотропного материала ($i, j, k, l = 1, 2, 3$).

2. Равновесная аппроксимация общего вида. Для точного удовлетворения дифференциальных уравнений равновесия (1.5) представим перемещения следующим рядом с неопределенными коэффициентами c_i :

$$u_i = u_{0i} + c_1 u_{1i} + \dots + c_n u_{ni} \quad (2.1)$$

где u_{0i} – некоторое частное решение неоднородного уравнения (1.5)

$$M_{ij} u_{0j} + F_i = 0 \quad (2.2)$$

а функции u_{ki} удовлетворяют соответствующим однородным уравнениям:

$$M_{ij} u_{kj} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

При любом выборе коэффициентов c_i аппроксимация (2.1) будет равновесной, т.е. определяемые с ее помощью перемещения будут тождественно удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия.

3. Вариационно-граничные уравнения. Для приближенного решения краевой задачи осталось выбрать коэффициенты c_i так, чтобы наилучшим образом выполнялись кинематические (1.6) и силовые (1.2) граничные условия.

Для этого можно использовать различные методики. Например, для нахождения c_i предлагалось [3] применить метод коллокаций, рассматривая краевые условия (1.2) и (1.6) в каждой из n выбранных граничных точек. Однако, во-первых, выполнение граничных условий в нескольких точках не гарантирует их выполнения между ними. Во-вторых, метод коллокаций приводит к несимметричным системам линейных уравнений. В-третьих, обусловленность разрешающей системы линейных уравнений существенно зависит от выбора точек коллокации, а принцип оптимального их выбора в общем случае не ясен.

Относительно метода наименьших квадратов для определения коэффициентов равновесных разложений было показано [5], что для получения надежных решений приходится обеспечивать не только "среднеквадратичную" сходимость приближенных функций к точным, но и их производных, что существенно усложняет методику. К тому же обусловленность разрешающих систем линейных уравнений метода наименьших квадратов асимптотически гораздо хуже, чем для метода коллокаций [16].

Наиболее перспективными представляются вариационные подходы, вытекающие из известных граничных вариационных уравнений механики [1, 7, 8, 18, 19, 21]. Во-первых, они позволяют придать механическую интерпретацию каждому уравнению. Во-вторых, для каждой задачи удастся в явном виде построить энергетический функционал, что позволяет использовать богатый арсенал вариационного исчисления. В-третьих, вариационные методики, как правило, приводят к симметричным системам линейных уравнений, что очень желательно с вычислительной точки зрения.

Для построения вариационных уравнений МРГЭ запишем функционал Лагранжа [6], добавив к нему с помощью множителей Лагранжа [7] слагаемое, учитывающее невязку граничных перемещений на части поверхности S_1 :

$$\Pi(u_i) = \int_V \{ \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} - u_i F_i \} dV - \int_{S_2} u_i p_i^* dS - \int_{S_1} p_i (u_i - u_i^*) dS \quad (3.1)$$

Первое слагаемое в объемном интеграле проинтегрируем по частям, предварительно с помощью (1.4) выразив деформации через перемещения:

$$\Pi(u_i) = - \int_V \{ \frac{1}{2} u_i \sigma_{ij,j} + u_i F_i \} dV + \int_S \frac{1}{2} u_i p_i dS - \int_{S_2} u_i p_i^* dS - \int_{S_1} p_i (u_i - u_i^*) dS \quad (3.2)$$

Далее учтем равновесность аппроксимаций для перемещений и связи (1.3), (1.4). Это приведет к известному функционалу граничных условий [8]:

$$\Pi(u_i) = - \int_V \frac{1}{2} u_i F_i dV + \int_{S_2} u_i (\frac{1}{2} p_i - p_i^*) dS - \int_{S_1} p_i (\frac{1}{2} u_i - u_i^*) dS \quad (3.3)$$

Учитывая, что для точного решения краевой задачи функционал (3.3) должен принимать стационарное значение, приходим к следующему вариационному уравнению [1, 7, 8]:

$$\delta \Pi(u_i) = \int_{S_2} \delta u_i (p_i - p_i^*) dS - \int_{S_1} \delta p_i (u_i - u_i^*) dS = 0 \quad (3.4)$$

где δu_i , δp_i – виртуальные перемещения и усилия на границе тела.

Вариационное уравнение (3.4) не содержит объемных интегралов, в чем со-

стоит его принципиальное отличие от наиболее часто используемых в численных методах механики вариационных уравнений для функционалов Лагранжа, Рейснера, Кастильяно и др.

4. Равновесные суперэлементы, их базисные функции, матрицы жесткости. Каждую из однородных подобластей тела будем отождествлять с одним суперэлементом, который в общем случае имеет произвольную форму и переменное число граничных узлов. Пусть для некоторого суперэлемента построена равновесная аппроксимация (2.1). Выберем на границе суперэлемента $m = n/3$ узлов и подставим координаты каждого из них в формулу (2.1). В результате получим систему n линейных уравнений относительно n коэффициентов c_i , из которой удастся выразить c_i через перемещения граничных узлов. Далее подставим найденные c_i в (2.1) и предположим, что частное решение u_{0i} может быть точно воспроизведено линейной комбинацией функций u_{ki} . В результате получим окончательные представления для перемещений:

$$u_i = N_{ir} \{u\}_r \quad (4.1)$$

где $\{u\}_r$ – перемещения граничных узлов суперэлемента ($r = 1, \dots, n$), N_{ir} – базисные функции суперэлемента.

Отметим отличие базисных функций равновесного суперэлемента от обычных базисных функций, используемых в методе конечных элементов [2]. Во-первых, каждая тройка базисных функций N_{1r}, N_{2r}, N_{3r} тождественно удовлетворяет однородным дифференциальным уравнениям равновесия в перемещениях. Во-вторых, различные компоненты перемещений аппроксимируются различными базисными функциями. В-третьих, некоторая компонента перемещений определяется не только узловыми значениями этой компоненты, но и узловыми значениями других компонент.

После того как построены аппроксимации для перемещений, по следующим из (1.2)–(1.4) формулам могут быть построены аппроксимации для деформаций, напряжений, усилий и их вариаций:

$$\begin{aligned} \epsilon_{kl} &= \frac{1}{2}(N_{kr,l} + N_{lr,k}) = B_{klr} \{u\}_r \\ \sigma_{ij} &= d_{ijkl} B_{klr} \{u\}_r = S_{ijr} \{u\}_r \\ p_i &= n_j S_{ijr} \{u\}_r = L_{ir} \{u\}_r \\ \delta u_i &= N_{ir} \{\delta u\}_r, \quad \delta p_i = L_{ir} \{\delta u\}_r \end{aligned} \quad (4.2)$$

После подстановки необходимых аппроксимаций в вариационное уравнение (3.4) и учета произвольности узловых значений виртуальных перемещений приходим к системе линейных уравнений равновесия суперэлемента

$$\begin{aligned} K_{pr} \{u\}_r &= \{Q\}_p \\ K_{pr} &= \int_{S_2} N_{ip} L_{ir} dS - \int_{S_1} L_{ip} N_{ir} dS \\ \{Q\}_p &= \int_{S_2} N_{ip} p_i^* dS - \int_{S_1} L_{ip} u_i^* dS \end{aligned} \quad (4.3)$$

с матрицей жесткости K и вектором нагрузок $\{Q\}$.

Объединение подобных систем уравнений по описанной в [1] методике для всех равновесных суперэлементов приводит к общей системе линейных уравнений для всего тела. После ее решения по формулам (4.1), (4.2) можно вычислить перемещения, деформации и напряжения в любой точке тела.

Заметим, что матрица жесткости симметрична. Это легко доказать, учитывая равновесность аппроксимаций перемещений и используя известное вариационное

соотношение [7]

$$\int_S \delta u_i p_i dS = \int_S \delta p_i u_i dS \quad (4.4)$$

5. Гранично-элементная модель тела. Для вычисления матрицы жесткости и вектора нагрузок поверхность суперэлемента разбивается на множество граничных элементов (ГЭ) простой формы. Все ГЭ разделяются на два класса – ГЭ, принадлежащие части поверхности S_1 , где заданы перемещения (1.6), и ГЭ части поверхности S_2 , где заданы усилия (1.2). Для ГЭ каждого класса соответствующие компоненты матрицы жесткости и вектора нагрузок вычисляются численным интегрированием по квадратурным формулам. Далее производится объединение матриц элементов так же, как и в методе конечных элементов.

Заметим, что для объемных сил сложного вида не всегда удается построить частное решение u_{0i} неоднородного уравнения (2.2). В этом случае следует использовать равновесную аппроксимацию (2.1) без u_{0i} . Тогда в разрешающем уравнении (4.3) появится дополнительный вектор объемных нагрузок:

$$\{Q_F\}_p = \int_V N_{ip} F_i dV \quad (5.1)$$

Для его вычисления приходится разбивать объем суперэлемента на множество конечных элементов и проводить на каждом из них аппроксимацию и интегрирование по известным методикам [1, 2].

6. Задачи кручения стержней. В краевых задачах Сен-Венана о кручении стержней сложного профиля из решения дифференциального уравнения

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = -2 \quad (6.1)$$

необходимо найти функцию напряжений $\varphi(x, y)$, равную нулю на контуре C поперечного сечения стержня:

$$\varphi = 0 \text{ на } C \quad (6.2)$$

Равновесная аппроксимация типа (2.1) может быть записана в виде

$$\varphi(x, y) = -(x^2 + y^2) / 2 + c_1 H_1 + \dots + c_n H_n \quad (6.3)$$

где H_i – гармонические полиномы, удовлетворяющие двумерному уравнению Лапласа, например степенные полиномы вида [3]

$$\begin{aligned} H_1 &= 1, \quad H_2 = x, \quad H_3 = y, \quad H_4 = x^2 - y^2, \quad H_5 = 2xy \\ H_6 &= x^3 - 3xy^2, \quad H_7 = 3x^2y - y^3, \quad H_8 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \\ H_9 &= 4x^3y - 4xy^3, \dots \end{aligned} \quad (6.4)$$

Разрешающая система линейных уравнений для нахождения коэффициентов аппроксимации имеет вид

$$\int_C \frac{\partial H_i}{\partial n} H_j dC \cdot c_j = \int_C \frac{\partial H_i}{\partial n} \frac{x^2 + y^2}{2} dC \quad (6.5)$$

причем для определения коэффициента c_1 удобно использовать метод наименьших квадратов [1].

ГЭ являются криволинейные отрезки.

7. Задачи изгиба тонких изотропных пластин. Прогиб пластины жесткости D под действием нагрузки p определяется из известного уравнения Софи

Жермен [9]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{p}{D} = 0 \quad (7.1)$$

Равновесная аппроксимация задается суммой частного решения w_0 , которое обычно построить несложно, и бигармонической функции w_1 , которая с помощью формулы Альманси [3] может быть выражена через две гармонические функции φ_1 и φ_2

$$w_1 = \varphi_1 + (x^2 + y^2)\varphi_2 \quad (7.2)$$

каждая из которых может быть представлена рядом по гармоническим полиномам (6.4).

ГЭ являются криволинейные отрезки.

8. Пространственные задачи теории упругости изотропного тела. Согласно известным представлениям Папковича – Нейбера [10, 11] общее решение системы однородных дифференциальных уравнений (1.5) может быть представлено через три гармонические функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ следующим образом (ν – коэффициент Пуассона):

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} - \alpha \begin{Bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{Bmatrix} (x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3), \quad \alpha = \frac{1}{4(1-\nu)} \quad (8.1)$$

Каждая из функций φ_i может быть представлена рядом по известным частным решениям трехмерного уравнения Лапласа, например по полной системе трехмерных гармонических полиномов [3]:

$$\begin{aligned} &1; x, y, z; \quad z^2 - x^2, x^2 - y^2, xy, yz, zx; \quad z^3 - 3x^2z, \\ &-x^2z + y^2z, -3xz^2 + x^3, -x^3 + 3xy^2, yz^2 - x^2y, xyz; \dots \end{aligned} \quad (8.2)$$

Помимо указанных полиномиальных представлений могут быть использованы и другие системы гармонических функций. Например, в [16] доказана полнота и линейная независимость функций

$$\{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\}^{-1/2} \quad (8.3)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты некоторых вспомогательных точек, обычно выбираемых на замкнутом контуре, охватывающем объем тела.

Для трехмерного тела ГЭ могут быть треугольные или четырехугольные криволинейные изопараметрические элементы [1, 4].

9. Плоские задачи теории упругости. Представления перемещений u_x и u_y через две гармонические функции могут быть получены из (8.1), если положить $u_z = 0, \varphi_3 = 0$, причем для плоского напряженного состояния $\alpha^{-1} = 4(1 - 2\nu)/(1 - \nu)$. Аналогичные представления для осесимметричных задач указаны в [12].

10. Задачи теории упругости анизотропного тела. Лишь для некоторых частных случаев анизотропии известны аналогичные приведенным выше представления общих решений краевых задач через гармонические функции [13]. В общем случае анизотропии для построения равновесных аппроксимаций в классе степенных полиномов следует применять метод неопределенных коэффициентов [1, 3], суть которого состоит в следующем. Перемещения представляем в виде

степенных рядов

$$u_i = a_{ijkl} x^j y^k z^l \quad (10.1)$$

и подставляем в однородные уравнения (1.5). После дифференцирования каждое из трех уравнений будет представлять собой условие равенства нулю некоторого полинома с коэффициентами, линейно зависящими от a_{ijkl} :

$$b_{mnr} x^m y^n z^r = 0 \quad (10.2)$$

Множество уравнений $b_{mnr} = 0$ определяет условия связи между коэффициентами a_{ijkl} , из которых нужно выбрать n независимых и обозначить их c_1, \dots, c_n . Учет этих условий в (10.1) позволяет получить $3n$ функций u_{ki} из равновесной аппроксимации (2.1). Процесс построения равновесных аппроксимаций методом неопределенных коэффициентов поддается автоматизации.

11. Задачи термоупругости. Частное решение u_{0i} задачи термоупругости может быть получено с помощью представлений Папковича – Гудьера [10]:

$$u_{0i} = \partial \Phi / \partial x_i \quad (11.1)$$

где Φ – функция, удовлетворяющая уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T \quad (11.2)$$

α – коэффициент температурного расширения, T – известная температура тела.

12. Динамические задачи теории упругости. С использованием известных представлений Грина – Ламе [14]

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi \quad (12.1)$$

перемещения изотропного тела могут быть выражены через скалярный и векторный потенциалы

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_i} = 0, \quad \text{div } \psi = 0 \quad (12.2)$$

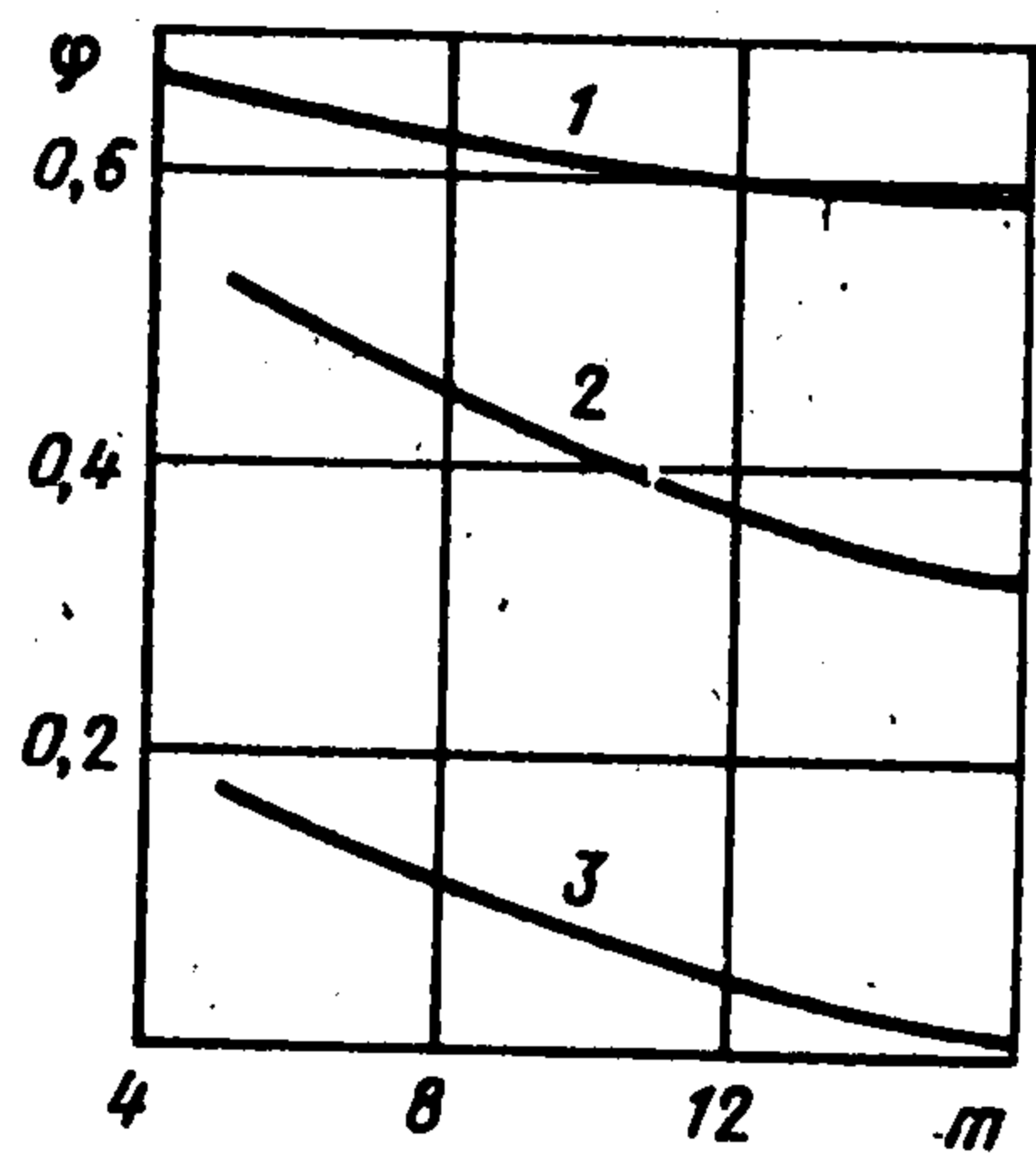
где c_1, c_2 – известные скорости распространения в бесконечной среде продольных и поперечных волн, t – время. В общем случае функции φ и ψ можно представить рядами по известным частным решениям волнового уравнения [3, 14, 15], например

$$\varphi = A \cos(\omega t \pm k_i x_i + \alpha_i), \quad k_i k_i = k^2 = \omega^2 / c_1^2 \quad (12.3)$$

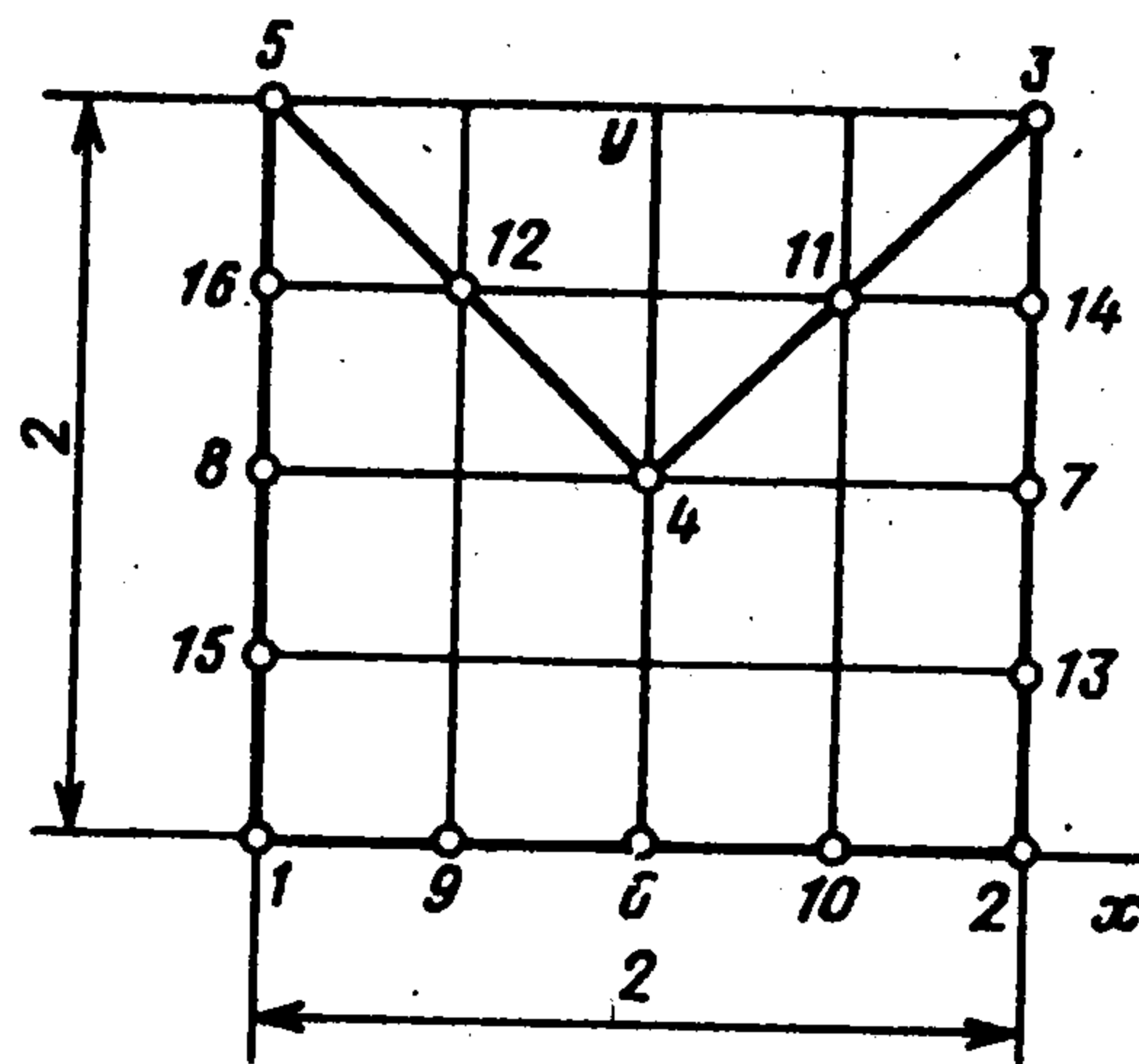
13. Примеры расчетов кручения стержней. Преимущества МРГЭ по сравнению с другими численными методами отчетливо проявляются для задач скручивания стержней. В частности, существуют такие формы поперечного сечения (круг, равносторонний треугольник), для которых точное решение краевой задачи (6.1), (6.2) может быть точно воспроизведено на одном равновесном суперэлементе с небольшим числом граничных узлов. Например, для равностороннего треугольника со стороной a точное решение [6]

$$\varphi(x, y) = \frac{2a^2}{27} - \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^3 - 3xy^2}{2a}$$

может быть воспроизведено на треугольном суперэлементе с семью граничными узлами.



Фиг. 1



Фиг. 2

В отличие от предыдущего примера точное решение

$$\varphi(x, y) = -\frac{4}{5}(\frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1)$$

для эллипса [6] с полуосями 2 и 1 не может быть точно воспроизведено рядом (6.3). Однако, как показывают расчеты, при увеличении числа граничных узлов m наблюдается монотонная сходимость приближенных решений к точному. Например, в центре эллипса вместо точного значения $\varphi = 0,8$ при $m = 4, 8, 16$ получаются соответственно значения 0,683, 0,739, 0,785.

На фиг. 1 приведены графики, иллюстрирующие устойчивую сходимость численных решений к точным при увеличении числа ГЭ, для задач кручения стержня квадратного $-1 \leq x, y \leq 1$ и флажкообразного (фиг. 2) профилей.

Рассмотрим, например, решение для квадрата при $m = 12$ ГЭ:

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 0,5885 - 0,0972(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \quad (13.1)$$

Это решение для квадрата является приближенным. Однако существует фигура, близкая к квадрату, для которой это решение будет точным. Очевидно, уравнение этой фигуры получается из (13.1), если $\varphi(x, y)$ заменить на нуль. Таким образом, при увеличении числа ГЭ фигуры, для которых полученные решения будут точными, все ближе и ближе приближаются к квадрату. Об этом свидетельствует фиг. 3.

14. Примеры расчета изгиба защемленных пластин. В табл. 1 приведены данные, иллюстрирующие сходимость при увеличении числа m ГЭ отношения прогибов Δ и моментов M_r, M_x круглой ($r = 1$), квадратной ($a = b = 2$) и прямоугольной ($a = 1, b = 2$) пластин к решениям, полученным в [9] аналитическим методом разложения по тригонометрическим функциям ($\nu/D = 1, \nu = 0,3$).

Эффективность МРГЭ подтверждается расчетом и более сложных пластин. Например, практическая сходимость с погрешностью менее 1% наблюдается при $m = 36$ ГЭ для пластины в форме равнобедренной трапеции с размерами оснований 3 и 1 и углом 45° между нижним основанием и боковой стороной. При этом максимальные

Таблица 1

m	Круг		Квадрат		Прямоугольник	
	Δ	M_r	Δ	M_x	Δ	M_x
4	0,622	0	0,689	0	3,59	0
8	0,812	0,902	0,689	1,17	2,27	1,90
16	0,949	0,975	0,825	1,07	0,94	1,64
20	0,968	0,984	1,03	1,01	1,13	1,11
24	0,977	0,989	1,03	1,01	1,06	1,05
30	0,985	0,993	1,01	1,00	1,00	1,00

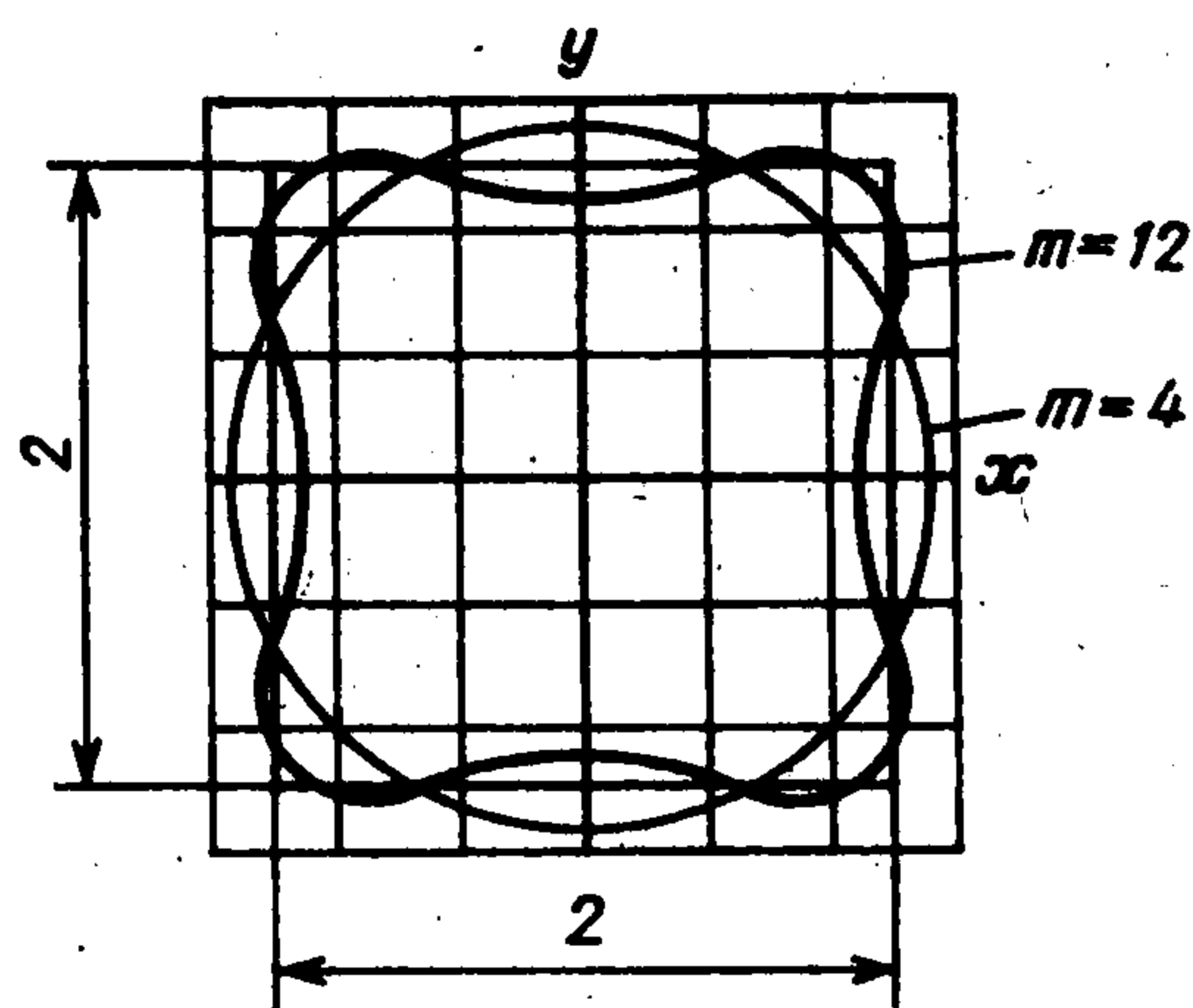
прогибы и момент наблюдаются в центре средней линии трапеции и соответственно равны 0,1517 и 1,1641 при $p/D = 1$, $\nu = 0,3$, что менее чем на 3% отличается от результата, полученного в [20] методом R-функций.

Далее рассмотрим изгиб равномерной нагрузкой ромбовидной защемленной по контуру пластины при разных отношениях длин диагоналей a/b . Граница пластины разбивалась равномерно на 32 линейных ГЭ. В табл. 2 приведены значения прогибов Δ и моментов M_x, M_y в разных точках на большей диагонали ромба (оси x) при $b = 1$, $p/D = 64$, $\nu = 0,3$. Анализ результатов показывает, что при увеличении соотношения диагоналей ромба происходит увеличение и максимальных прогибов, и максимальных моментов, которые достигаются в центре пластины. Заметим, что в угловой точке $(a, 0)$ понятие момента не определено, как не определено и понятие производной. Для корректного вычисления моментов в окрестности угловых точек следует учитывать особенности поведения решений в нерегулярных точках границы, что выходит за пределы данной работы.

МРГЭ построен на основе вариационных уравнений механики и поэтому гарантирует точное выполнение дифференциальных уравнений внутри пластины и интегральное (не точное!) выполнение граничных условий. Полученные из расчета прогибы на защемленной границе не совпадают с точными нулевыми значениями. Однако невязка прогибов на границе достаточно мала и поэтому ею можно пренебречь. В частности, при $a/b = 1; 2; 4$ максимальный прогиб на границе не превышает соответственно 3, 5, 8% от максимального прогиба в центре пластины. Правильное моделирование жесткости пластины подтверждается сравнением максимальных прогибов с расчетами методом конечных элементов при разбивке пластины на 16 гибридных конечных элементов [1]. При $a/b = 1; 2; 4$ для них получены значения 0,320; 0,859; 1,30 соответственно.

Таким образом, для расчета пластин различных не слишком сложных форм достаточно ограничиться 30–40 ГЭ, причем с учетом возможной симметрии решений число ГЭ можно существенно уменьшить. Если учесть, что время расчета на IBM PC/AT одного варианта не превышает 5 мин, то можно говорить о том, что создана простая и эффективная методика расчета изгиба пластин сложной формы.

15. **Варианты применения метода.** Для расчета деформирования однородных тел не слишком сложной формы может использоваться один равновесный суперэлемент. Для кусочно-однородных или однородных тел сложной формы следует использовать несколько элементов, обеспечив их сопряжение [1]. При этом за счет варьирования количества и размеров суперэлементов удастся достичь оптимального сочетания порядка и ширины ленты глобальной системы линейных уравнений [1]. В пределе суперэлемент уменьшается до размера конечного элемента, что приводит к методу равновесных конечных элементов [1]. Очень перспективно сочетание МРГЭ с методом конечных элементов, когда однородная



Фиг. 3

15. **Варианты применения метода.** Для расчета деформирования однородных тел не слишком сложной формы может использоваться один равновесный суперэлемент. Для кусочно-однородных или однородных тел сложной формы следует использовать несколько элементов, обеспечив их сопряжение [1]. При этом за счет варьирования количества и размеров суперэлементов удастся достичь оптимального сочетания порядка и ширины ленты глобальной системы линейных уравнений [1]. В пределе суперэлемент уменьшается до размера конечного элемента, что приводит к методу равновесных конечных элементов [1]. Очень перспективно сочетание МРГЭ с методом конечных элементов, когда однородная

Таблица 2

Координаты точек	a/b = 1			a/b = 2			a/b = 4		
	Δ	M_x	M_y	Δ	M_x	M_y	Δ	M_x	M_y
(0,0)	0,327	2,956	2,956	0,959	4,223	5,686	1,604	3,845	8,101
(1a/4,0)	0,261	2,001	2,672	0,661	2,128	4,837	0,958	1,993	6,098
(2a/4,0)	0,119	-0,134	1,807	0,183	-0,655	2,564	0,115	-0,217	2,323
(3a/4,0)	0,018	-1,374	-0,433	0,012	-0,239	0,612	0,028	0,493	0,978
(4a/4,0)	0,002	1,212	-0,941	0,003	-0,422	0,647	0,008	-2,001	-3,260

часть тела представляется равновесным суперэлементом, а оставшаяся – конечными элементами.

В заключение отметим, что МРГЭ, так же как и МГЭ, неприменим для решения краевых задач, описываемых системами дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, например для расчета пластин переменной толщины или оболочек. Весьма проблематично применение метода для расчета собственных колебаний и нелинейных краевых задач, когда не удастся обойтись только гранично-элементными сетками. Следует также упомянуть и об одном из недостатков метода, присущем и другим вариационным методам, которым является неудовлетворительное моделирование поведения решений в окрестности угловых точек границы или точек смены типа граничных условий при использовании гладких гармонических полиномов. Для этого следует применять более сложные методики учета особенностей.

МРГЭ реализован в составе Автоматизированной Системы Трехмерного Равновесного Анализа АСТРА [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еременко С.Ю.* Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. Харьков: Основа, 1991. 272 с.
2. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1987. 318 с.
3. *Бондаренко Б.А.* Полигармонические полиномы. Ташкент: Фан, 1968. 170 с.
4. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел П.* Метод граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
5. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1983. 712 с.
6. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
7. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
8. *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 287 с.
9. *Доннел Л.Г.* Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с.
10. *Папкович П.Ф.* Теория упругости. М.: Оборонгиз, 1939. 640 с.
11. *Подильчук Ю.Н.* Трехмерные задачи теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 240 с.
12. *Соляник-Красса К.В.* Осесимметричная задача теории упругости. М.: Стройиздат, 1987. 337 с.
13. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
14. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
15. *Космодамианский А.С., Сторожев В.И.* Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. Киев: Наук. думка, 1985. 175 с.
16. *Алексидзе М.А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. М.: Наука, 1991. 352 с.
17. *Тараканов В.И.* Граничные вариационные уравнения в краевых задачах теории упругости. Изд-во Томск. ун-та, 1982. 141 с.
18. *Терещенко В.Я.* О некоторых формулировках метода граничных элементов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 616–627.
19. *Терещенко В.Я.* К вопросу обоснования вариационных формулировок метода граничных элементов // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 309–316.
20. *Рвачев В.Л., Курна Л.В.* R-функции в задачах теории пластин. Киев: Наук. думка, 1987. 175 с.
21. *Jin W.G., Cheung Y.K., Zienkiewicz O.C.* Application of the Trefftz method in plane elasticity problems // Intern. J. Numerical Methods Eng. 1990. V. 30. N. 6. P. 1147–1161.

Харьков

Поступила в редакцию
2.XII.1992