

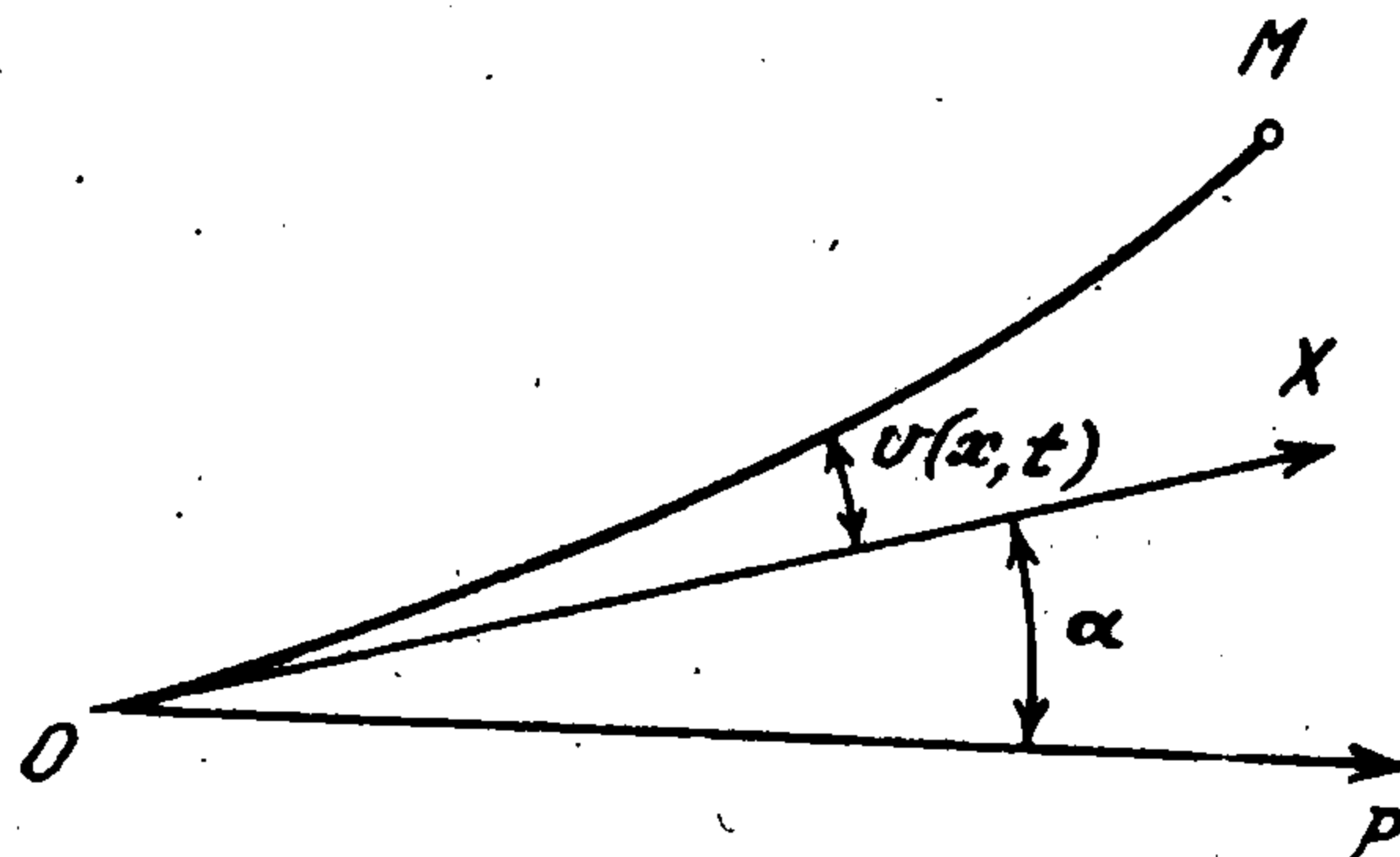
УДК 531.36:62-50

© 1993 г. Э.К. Лавровский, А.М. Формальский

### УПРАВЛЕНИЕ УПРУГИМ ЗВЕНОМ МАНИПУЛЯТОРА ПРИ ПОМОЩИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ПОЛОЖЕНИЮ И СКОРОСТИ ГРУЗА

Изучается вращение упругого звена манипулятора в горизонтальной плоскости вокруг одного из его концов. На другом конце крепится груз. Движение осуществляется электродвигателем. Управление строится в виде линейной обратной связи по положению груза, его скорости и угловой скорости звена. Исследуется устойчивость процесса управления. Показано, что в отсутствие сил вязкого демпфирования, пропорциональных угловой скорости звена, наличие обратной связи по положению и скорости груза приводит к незатухающим колебаниям системы, при этом желаемое положение равновесия не стабилизируется. Построены области асимптотической устойчивости в пространстве коэффициентов обратной связи при наличии вязкого демпфирования. При сравнении эти области оказываются меньшими, нежели соответствующие области для абсолютно твердого тела.

**1. Уравнения движения.** Рассмотрим упругий однородный стержень длины  $l$  и постоянного поперечного сечения. Стержень может вращаться в горизонтальной плоскости – плоскости чертежа – вокруг одного из своих концов – неподвижной точки  $O$  (фиг. 1). На другом конце звена крепится объект манипулирования – груз, который будем считать материальной точкой с массой  $M$ . На фиг. 1 показана нейтральная линия  $OM$  стержня (изогнутая), которая всегда лежит в горизонтальной плоскости. Подвижная ось координат  $Ox$  касается нейтральной линии в точке  $O$ . Обозначим через  $\alpha$  угол между осью  $Ox$  и некоторым неподвижным направлением  $OP$ . Через  $v(x, t)$  обозначим отклонение точки нейтральной линии  $OM$  с координатой  $x$  в момент времени  $t$  от оси  $Ox$ . Управление вращением звена осуществляется электродвигателем (на фиг. 1 не показан) через редуктор с коэффициентом редукции  $k$ . Пусть  $J$  – момент инерции якоря двигателя,  $\varphi$  – угол поворота якоря, так что  $\dot{\varphi}(t) = k\dot{\alpha}(t)$ .



Фиг. 1

В рамках линейной теории тонких прямолинейных нерастяжимых стержней [1, 2] уравнения движения рассматриваемой механической системы можно записать в виде [3–5]

$$EIv''''(x, t) + \rho(\ddot{v}(x, t) + x\ddot{\alpha}(t)) = 0 \quad (1.1)$$

$$J\ddot{\phi}(t) = Q + (EI/k)v''(0, t) \quad (1.2)$$

$$v(0, t) = v'(0, t) = v''(l, t) = 0$$

$$M(\ddot{v}(l, t) + l\ddot{\alpha}(t)) = EIv''''(l, t) \quad (1.3)$$

Здесь  $\rho$  – погонная плотность материала,  $E$  – модуль Юнга,  $I$  – постоянный момент инерции поперечного сечения стержня относительно вертикальной оси,  $Q$  – момент электромагнитных сил относительно оси якоря.

Соотношение (1.1) описывает плоские поперечные колебания стержня [1, 2, 6], но при заданном угловом ускорении  $\ddot{\alpha}$ . В нем не учтено рассеивание энергии при колебаниях. Соотношение (1.2) описывает изменение кинетического момента якоря двигателя; второе слагаемое в его правой части описывает момент сил, приложенных к якорю со стороны упругого стержня; инерция шестерен редуктора не учитывается. В уравнениях (1.1)–(1.3) опущены члены, содержащие  $\dot{\alpha}^2$ , тем самым не учтены центробежные силы, приложенные к стержню.

Момент  $Q$  опишем соотношениями [7]

$$Q = \Phi C, \quad LC(t) + RC(t) + \Phi\dot{\phi}(t) = w \quad (1.4)$$

Второе из них – есть уравнение баланса напряжений в обмотке двигателя. Здесь  $C$ ,  $L$  и  $R$  – ток, индуктивность и омическое сопротивление в обмотке соответственно,  $\Phi$  – магнитный поток,  $w$  – управляющее напряжение, подаваемое на двигатель.

Введем новую переменную

$$u(x, t) = v(x, t) + x\alpha(t) \quad (1.5)$$

которая характеризует полное отклонение стержня от оси  $OP$ , и затем – безразмерные переменные  $u^*$ ,  $x^*$ ,  $t^*$ ,  $w^*$

$$u = lu^*, \quad x = lx^*, \quad t = \tau t^*, \quad w = \chi w^* \left( \tau^2 = \frac{\rho l^4}{EI}, \quad \chi = \frac{EIR}{\Phi kL} \right) \quad (1.6)$$

Подставляя соотношения (1.4) – (1.6) в уравнения (1.1) – (1.3) и опуская звездочки, получаем

$$u''''(x, t) + \ddot{u}(x, t) = 0 \quad (1.7)$$

$$jT_L\ddot{u}'(0, t) + j\dot{u}'(0, t) + \delta\dot{u}'(0, t) - T_L\dot{u}''(0, t) - u''(0, t) = w \quad (1.8)$$

$$u(0, t) = u''(1, t) = 0, \quad m\ddot{u}(1, t) = u'''(1, t) \quad (1.9)$$

Здесь  $j$ ,  $m$ ,  $T_L$  и  $\delta$  – безразмерные параметры (момент инерции якоря двигателя, масса груза, электромагнитная постоянная времени и коэффициент противоэлектродвижущей силы)

$$j = \frac{J}{\rho l^3}, \quad m = \frac{M}{\rho l}, \quad T_L = \frac{L}{R\tau}, \quad \delta = \frac{\Phi^2 k^2}{lR(EI\rho)^{1/2}} \quad (1.10)$$

Соотношение (1.8), полученное из уравнений (1.2), (1.4) с помощью равенства

$$u'(0, t) = \alpha \quad (1.11)$$

играет роль краевого условия в новой краевой задаче. Равенство (1.11) вытекает из граничного условия (1.3)  $v'(0, t) = 0$ .

Если в уравнениях (1.7)–(1.9) положить  $T_L = 0$ , то получатся уравнения [3], где не учитывается индуктивность  $L$  в обмотке двигателя.

**2. Постановка задачи, управление.** При  $w = 0$  краевая задача (1.7)–(1.9) имеет решение

$$u(x, t) = Gx \quad (v(x, t) = 0, \alpha = G)$$

где  $G$  – произвольная постоянная, отвечающая недеформированному стержню, повернутому на угол  $\alpha = G$  от оси  $OP$ . При  $G = 0$  имеем

$$u(x, t) = 0 \quad (v(x, t) = 0, \alpha = 0) \quad (2.1)$$

Рассмотрим управление в виде линейной обратной связи, которое призвано обеспечить асимптотическую устойчивость решения (2.1)

$$T\dot{w}(t) + w(t) = -\beta\dot{u}'(0, t) - \beta_0 u(1, t) - \beta_1 \dot{u}(1, t) \quad (2.2)$$

Здесь  $T > 0$  – безразмерная постоянная времени в контуре управления,  $\beta, \beta_0, \beta_1$  – постоянные коэффициенты обратной связи по угловой скорости  $\dot{\alpha}$ , по положению переносимого груза и его скорости. Для реализации обратной связи (2.2) необходимы, конечно, соответствующие датчики.

Целью управления манипулятором является обычно приведение объекта манипулирования в желаемое положение и удержание его в этом положении. Поэтому представляется естественным исследование управления с обратной связью по положению этого объекта.

Ранее рассматривалось [8, 9] управление с обратной связью вида (2.2) при  $T = 0$ , а также – с обратной связью по углу  $\alpha$ , его производной, интегралу и по изгибной деформации стержня [3]. Рассматривалась, кроме того, задача об управлении поступательным перемещением упругого стержня [10].

Пусть при условии (2.1) объект манипулирования занимает желаемое положение, при этом будем считать равновесие (2.1) желаемым. Состояние равновесия (2.1) является решением системы уравнений (1.7)–(1.9) при управлении (2.2). Линейной краевой задаче (1.7)–(1.9), (2.2) отвечает некоторый бесконечный спектр собственных чисел  $\lambda$ . Конкретизируя вопрос об асимптотической устойчивости решения (2.1), поставим следующую задачу [3, 10]. В пространстве коэффициентов обратной связи (2.2) требуется построить область значений, при которых все собственные числа  $\lambda$  таковы, что  $\text{Re}\lambda < 0$ .

Наряду с (1.7)–(1.9) рассмотрим для сравнения уравнения движения абсолютно твердого звена с грузом на конце, управляемого при помощи обратной связи (2.2). В безразмерных переменных, описываемых соотношениями (1.6), они имеют вид

$$T_L \left( \frac{1}{3} + m + j \right) \ddot{\alpha} + \left( \frac{1}{3} + m + j \right) \dot{\alpha} + \delta \alpha = w \quad (2.3)$$

$$T\dot{w} + w = -\beta_0 \alpha - (\beta + \beta_1) \dot{\alpha} \quad (2.4)$$

Параметры в уравнении (2.3) описываются соотношениями (1.10).

Для абсолютно твердого звена обратная связь по положению груза, его скорости и угловой скорости звена  $\dot{\alpha}$  эквивалентна обратной связи по углу  $\alpha$  и

угловой скорости  $\dot{\alpha}$ . Поэтому в выражении (2.4) коэффициентом при скорости  $\dot{\alpha}$  является сумма  $\beta + \beta_1$ .

**3. Характеристическое уравнение.** Решение краевой задачи (1.7)–(1.9), (2.2) будем искать в виде

$$u(x, t) = Ke^{\lambda t} X(x)$$

где  $K$  – постоянная,  $\lambda$  – собственное число,  $X(x)$  – собственная функция.

Для функций  $X(x)$  получаем краевую задачу

$$X''''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad (3.1)$$

$$[(jT_L \lambda^2 + j\lambda + \delta)\lambda X'(0) - (T_L \lambda + 1)X''(0)](T\lambda + 1) = \quad (3.2)$$

$$= -\beta\lambda X'(0) - (\beta_0 + \beta_1 \lambda)X(1)$$

$$X(0) = X''(1) = 0, \quad m\lambda^2 X(1) = X'''(1) \quad (3.3)$$

Решение краевой задачи (3.1) – (3.3) строим в виде суммы

$$X(x) = C_1 \sin vx + C_2 \cos vx + C_3 \operatorname{sh} vx + C_4 \operatorname{ch} vx \quad (3.4)$$

где  $C_1, \dots, C_4$  – неизвестные постоянные и

$$\lambda^2 = -v^4 \quad (3.5)$$

Подставив выражение (3.4) в граничные условия (3.2), (3.3), получим систему линейных однородных уравнений относительно постоянных  $C_1, \dots, C_4$ . Раскрывая определитель системы, получаем характеристический квазиполином. Ненулевые собственные числа  $\lambda$  удовлетворяют следующему полученному при помощи этого квазиполинома характеристическому уравнению:

$$\Delta(\lambda) = R(\lambda)R_1(v, m) + v(T\lambda + 1)(T_L \lambda + 1)R_2(v, m) + (\beta_0 + \beta_1 \lambda)R_3(v) / v = 0 \quad (3.6)$$

где

$$R(\lambda) = \lambda[(jT_L \lambda^2 + j\lambda + \delta)(T\lambda + 1) + \beta], \quad R_1(v, m) = Q_1(v) + mvQ_3(v)$$

$$R_2(v, m) = Q_3(v) + 2mvQ_2(v), \quad R_3(v) = \sin v + \operatorname{sh} v$$

$$Q_1(v) = 1 + \cos v \operatorname{ch} v, \quad Q_2(v) = -\sin v \operatorname{sh} v, \quad Q_3(v) = \operatorname{sh} v \cos v - \operatorname{ch} v \sin v$$

$R(\lambda)$  является характеристическим полиномом электродвигателя с обратной связью (2.2) при  $\beta_0 = \beta_1 = 0$ ;  $R_1(\lambda)$  – характеристический квазиполином упругого стержня с консольным закреплением,  $R_2(v, m)$  – с шарнирным.

Из уравнения (3.5) получаем  $\lambda = \pm iv^2$ . Подставляя каждое из этих значений в (3.6), получаем два уравнения относительно  $v$ . Однако значения  $\lambda$ , определяемые в результате решения этих уравнений, совпадают, поскольку если  $v$  – корень одного из уравнений, то  $iv$  – корень другого. Тем самым, достаточно анализировать только одно из уравнений, получающееся при подстановке в (3.6), например, выражения

$$\lambda = iv^2 \quad (3.7)$$

Наряду с  $v$  уравнение (3.6), (3.7) имеет корни  $-v$ ,  $i\bar{v}$  и  $-i\bar{v}$ . Корням  $\pm v$  и  $-i\bar{v}$  отвечают собственные числа  $\lambda$  и  $\bar{\lambda}$ .

Из уравнения (3.6) следует, что  $\Delta(0) = \beta_0$ . Пусть  $r$  – действительное число и  $v = v(r) = r \exp(-i\pi/4)$ . Тогда  $\lambda = iv^2 = r^2$ . При  $r \rightarrow +\infty$  из выражения (3.6)

получаем, что  $\Delta(\lambda) = \Delta(r^2) \rightarrow +\infty$ . Поэтому при  $\beta_0 < 0$  (положительная обратная связь) уравнение (3.6) имеет действительный корень  $\lambda > 0$ , и решение (2.1) неустойчиво при любых  $\beta, \beta_1, T, T_L, m, j, \delta$ .

Пусть  $\Delta_1(\lambda) = \Delta(\lambda)/\lambda$ . Тогда при  $\beta_0 = 0$  получаем  $\Delta_1(0) = 2(\delta + \beta + \beta_1)$ . Если  $v = v(r)$ , то при  $r \rightarrow +\infty$  имеем  $\Delta_1(\lambda) = \Delta_1(r^2) \rightarrow +\infty$ . Отсюда следует, что при  $\beta_0 = 0, \delta + \beta + \beta_1 < 0$  (отрицательное демпфирование) система неустойчива.

Для изучения асимптотической устойчивости решения (2.1) будем использовать метод  $D$  – разбиений [11]. Из соотношения (3.7) следует, что если величина  $\lambda$  принимает мнимые значения, то величина  $v$  – мнимые или действительные. Подставим в уравнение (3.6) значение  $\lambda = i\varepsilon^2$ , где  $\varepsilon$  – действительное число, и рассмотрим его вещественную и мнимую части:

$$- [j(1 - TT_L\varepsilon^4) + T\delta]\varepsilon^4 R_1(\varepsilon, m) + (1 - TT_L\varepsilon^4)\varepsilon R_2(\varepsilon, m) + \beta_0 R_3(\varepsilon) / \varepsilon = 0 \quad (3.8)$$

$$[-j(T + T_L)\varepsilon^4 + \delta + \beta]R_1(\varepsilon, m) + (T + T_L)\varepsilon R_2(\varepsilon, m) + \beta_1 R_3(\varepsilon) / \varepsilon = 0$$

Соотношения (3.8) определяют в пространстве параметров системы образ действительной оси  $v = \varepsilon, -\infty < \varepsilon < +\infty$ . Они не меняются при замене  $\varepsilon$  на  $-\varepsilon$ . Поэтому граница области асимптотической устойчивости в пространстве параметров может быть найдена путем построения поверхности (3.8) при  $0 \leq \varepsilon < \infty$ .

#### 4. Неустойчивость системы в отсутствие вязкости. Рассмотрим случай

$$\delta = \beta = 0 \quad (4.1)$$

т.е. когда противоэлектродвижущая сила в электродвигателе не учитывается и обратная связь по угловой скорости  $\dot{\alpha}$  отсутствует.

В случае (4.1) при

$$T = T_L = m = j = 0 \quad (4.2)$$

уравнение (3.6) принимает вид

$$\Delta(\lambda) = v(\text{sh } v \cos v - \text{ch } v \sin v) + (\beta_0 + \beta_1 \lambda)(\sin v + \text{sh } v) / v = 0, \quad \lambda = iv^2 \quad (4.3)$$

Пусть  $\lambda_s = iv_s^2$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) – корни уравнения (4.3) при  $\beta_0 = \beta_1 = 0$ . Это – чисто мнимые корни. Значения  $v_s$  описываются асимптотической формулой

$$v_s \cong \pi/4 + \pi s \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

Положим  $\beta_0 = \Delta\beta_0, \beta_1 = \Delta\beta_1, v = v_s + \Delta v_s, \lambda = \lambda_s + \Delta\lambda_s$ , где  $\Delta\lambda_s = 2iv_s \Delta v_s$ , и аппроксимируем уравнение (4.3) в окрестности точки  $\beta_0 = \beta_1 = 0, \lambda = \lambda_s (v = v_s)$  линейным

$$-2v_s^2 \sin v_s \text{sh } v_s \Delta v_s + (\Delta\beta_0 + \Delta\beta_1 iv_s^2)(\sin v_s + \text{sh } v_s) = 0 \quad (4.5)$$

Из уравнения (4.5) получаем

$$\text{Re } \lambda = \text{Re } \Delta\lambda_s = -\frac{v_s(\sin v_s + \text{sh } v_s)}{\sin v_s \cdot \text{sh } v_s} \Delta\beta_1 \quad (4.6)$$

Из равенства (4.4) следует, что величины (4.6) положительны при "больших" нечетных номерах  $s$ , если  $\Delta\beta_1 > 0$ , и при "больших" четных номерах  $s$ , если  $\Delta\beta_1 < 0$ . Поэтому если  $\beta_1 \neq 0$  и значения  $|\beta_0|, |\beta_1|$  малы, то уравнение (4.3) имеет корни  $\lambda$  такие, что  $\text{Re } \lambda > 0$ . Из соотношений (3.8) при условиях (4.1), (4.2) следует, что если  $\beta_0 \beta_1 \neq 0$ , то все корни  $\lambda$  уравнения (4.3) таковы, что  $\text{Re } \lambda \neq 0$ . Если  $\beta_0 = 0$ , то при любом  $\beta_1 \neq 0$  уравнение (4.3) имеет однократный корень

$\lambda = 0$ , другие корни  $\lambda$  при этом таковы, что  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ . Чисто мнимые корни уравнение (4.3) имеет только при  $\beta_1 = 0$ . Из теоремы Руше [12] следует, что каждый корень уравнения (3.6) зависит непрерывно от параметров  $\beta, \beta_0, \beta_1, T, T_L, m, j, \delta$ . Поэтому действительная часть всякого корня  $\lambda$  уравнения (4.3) при изменении коэффициентов  $\beta_0, \beta_1$  может изменить свой знак только при пересечении точкой  $(\beta_0, \beta_1)$  оси  $\beta_1 = 0$ . Поскольку у уравнения (4.3) в малой окрестности точки  $\beta_0 = \beta_1 = 0$  при  $\beta_1 \neq 0$  есть корни  $\lambda$  такие, что  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , то из сказанного выше вытекает, что такие корни есть в любой точке плоскости  $(\beta_0, \beta_1)$  при  $\beta_1 \neq 0$ . Итак, если  $\beta_1 \neq 0$ , то уравнение (4.3) имеет корни  $\lambda$  такие, что  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Таким образом, в случае (4.1), (4.2) при любых коэффициентах  $\beta_0$  и  $\beta_1 \neq 0$  решение (2.1) системы неустойчиво.

Рассмотрим вместо (4.2) более слабое ограничение

$$T = T_L = 0 \quad (4.7)$$

При условиях (4.1), (4.7), так же как при условиях (4.1), (4.2), уравнение (3.6) имеет чисто мнимые корни только при  $\beta_1 = 0$ . Отсюда, пользуясь непрерывностью зависимости каждого корня уравнения (3.6) от параметров  $\beta_0, \beta_1, m, j$ , можно заключить о неустойчивости решения (2.1) при  $\beta_1 \neq 0$  и в более общем случае (4.1), (4.7).

Из уравнений (3.8) имеем

$$\beta_0 = [j(1 - TT_L \varepsilon^4) + T\delta] \varepsilon^5 R_1(\varepsilon, m) / R_3(\varepsilon) - (1 - TT_L \varepsilon^4) \varepsilon^2 R_2(\varepsilon, m) / R_3(\varepsilon) \quad (4.8)$$

$$\beta_1 = [j(T + T_L) \varepsilon^4 - \delta - \beta] \varepsilon R_1(\varepsilon, m) / R_3(\varepsilon) - (T + T_L) \varepsilon^2 R_2(\varepsilon, m) / R_3(\varepsilon) \quad (4.9)$$

В случае (4.1) при

$$T_L = 0 \quad (4.10)$$

все точки (4.8), (4.9) ( $0 < \varepsilon < \infty$ ) лежат на прямой

$$\beta_1 = T\beta_0 \quad (4.11)$$

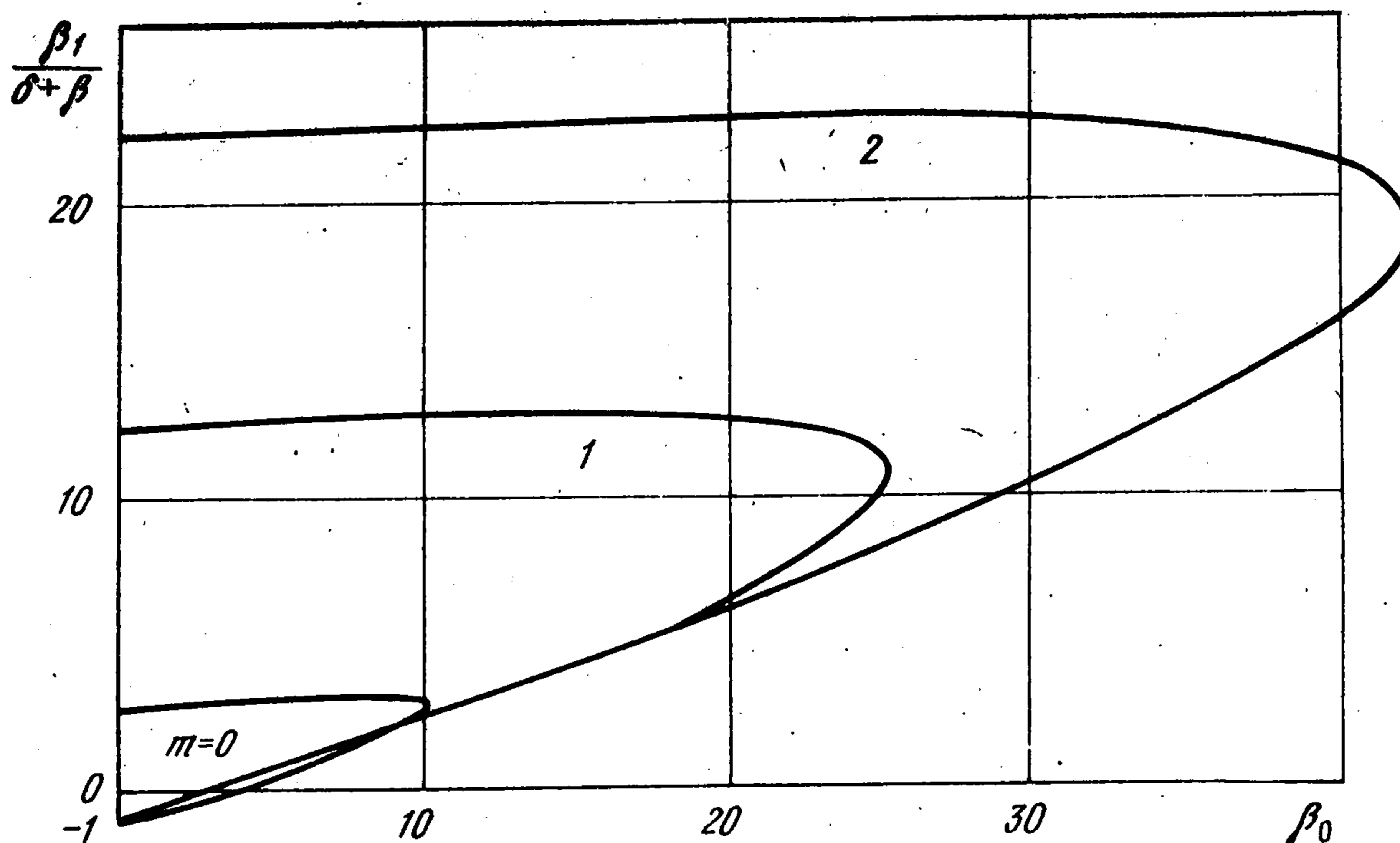
Если  $\beta_0 = 0$ , то при любом значении  $\beta_1 \neq 0$  уравнение (3.6) имеет однократный корень  $\lambda = 0$ , другие корни  $\lambda$  при этом таковы, что  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ . Уравнение (3.6) имеет чисто мнимые корни только при условии (4.11).

Рассмотрим трехмерное пространство параметров  $\beta_0, \beta_1, T$  при  $0 \leq T < \infty$ . Напомним, что если  $T = 0$ , то при  $\beta_1 \neq T\beta_0$  ( $\beta_1 \neq 0$ ) имеет место неустойчивость. Отсюда, пользуясь непрерывностью зависимости каждого корня уравнения (3.6) от параметров  $\beta_0, \beta_1, T$ , можно заключить о неустойчивости равновесия (2.1) при  $\beta_1 \neq T\beta_0$  в случае (4.1), (4.10). Поскольку в соотношениях (4.8), (4.9) постоянные времени  $T$  и  $T_L$  при условии (4.1) входят симметрично, приведенные утверждения о неустойчивости равновесия (2.1) при обратной связи по положению и скорости груза сохраняются, если  $T = 0$ , а  $T_L \neq 0$ .

Таким образом, обратная связь по скорости груза не компенсирует отсутствие вязкости и не стабилизирует систему.

Если при каких-то коэффициентах  $\beta_0, \beta_1$  система неустойчива в случае (4.1), то она остается неустойчивой при достаточно малых значениях коэффициентов демпфирования  $\delta$  и обратной связи  $\beta$ .

Утверждение о неустойчивости системы с обратной связью вида (2.2) при малых силах вязкого демпфирования, пропорциональных угловой скорости  $\dot{\alpha}$ , делалось [8, 9] на основе экспериментальных и численных исследований. Численные исследования в [9] проводились без учета динамики привода ( $j = \delta = T_L = 0$ ) и запаздывания в контуре управления ( $T = 0$ ). Здесь это утверждение



Фиг. 2

доказано аналитически, причем как без учета, так и с учетом динамики привода и запаздывания.

**5. Области устойчивости при наличии вязкости.** Обозначим через  $\beta_0^*$  наименьший при  $0 < \epsilon < \infty$  локальный максимум функции  $\beta_0 = \beta_0(\epsilon)$  (4.8).

При условиях (4.1), (4.2)  $\beta_0^* \approx 10,17$ . Можно показать, что в случае (4.1), (4.10)

при  $\beta_0 > \beta_0^*$ ,  $\beta_1 = T\beta_0$  уравнение (3.8) имеет корни  $\lambda$  такие, что  $\text{Re}\lambda > 0$ , и тем

самым система неустойчива. При  $0 < \beta_0 < \beta_0^*$ ,  $\beta_1 = T\beta_0$  система устойчива, но не

асимптотически. Так же обстоит дело с устойчивостью, если  $\delta = \beta = T = 0$ ,

$T_L \neq 0$ . При  $T_L = 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\beta > 0$  в плоскости  $\beta_0, \beta_1$  существует область

асимптотической устойчивости (ОАУ). Если  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$ , то эта область

стягивается к интервалу  $0 < \beta_0 < \beta_0^*$ ,  $\beta_1 = T\beta_0$ . При  $T = 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\beta > 0$  ОАУ

"вокруг" интервала  $0 < \beta_0 < \beta_0^*$ ,  $\beta_1 = T_L\beta_0$  существует, только если  $j = 0$ .

Если же  $j \neq 0$ , то вне этого интервала асимптотическая устойчивость не имеет места.

При условиях (4.7) в соотношении (4.9) вместо  $\beta_1$  можно ввести переменную

$\beta_1/(\delta + \beta)$ . На фиг. 2 при  $T = T_L = j = 0$  и  $m = 0, 1, 2$  по формулам (4.8), (4.9)

построены ОАУ в переменных  $\beta_0, \beta_1/(\delta + \beta)$  (эти области расположены внутри

петель, а слева ограничены осью  $\beta_0 = 0$ ). ОАУ для абсолютно твердого тела

(2.3) с управлением (2.4) при условиях (4.7) не ограничена и описывается

неравенствами

$$\beta_0 > 0, \quad \beta_1 > -\delta - \beta \quad (5.1)$$

Из известных результатов [3] следует, что ОАУ для податливого звена при

обратной связи по углу  $\alpha$  (с коэффициентом  $\beta_0$ ) и по угловой скорости  $\dot{\alpha}$

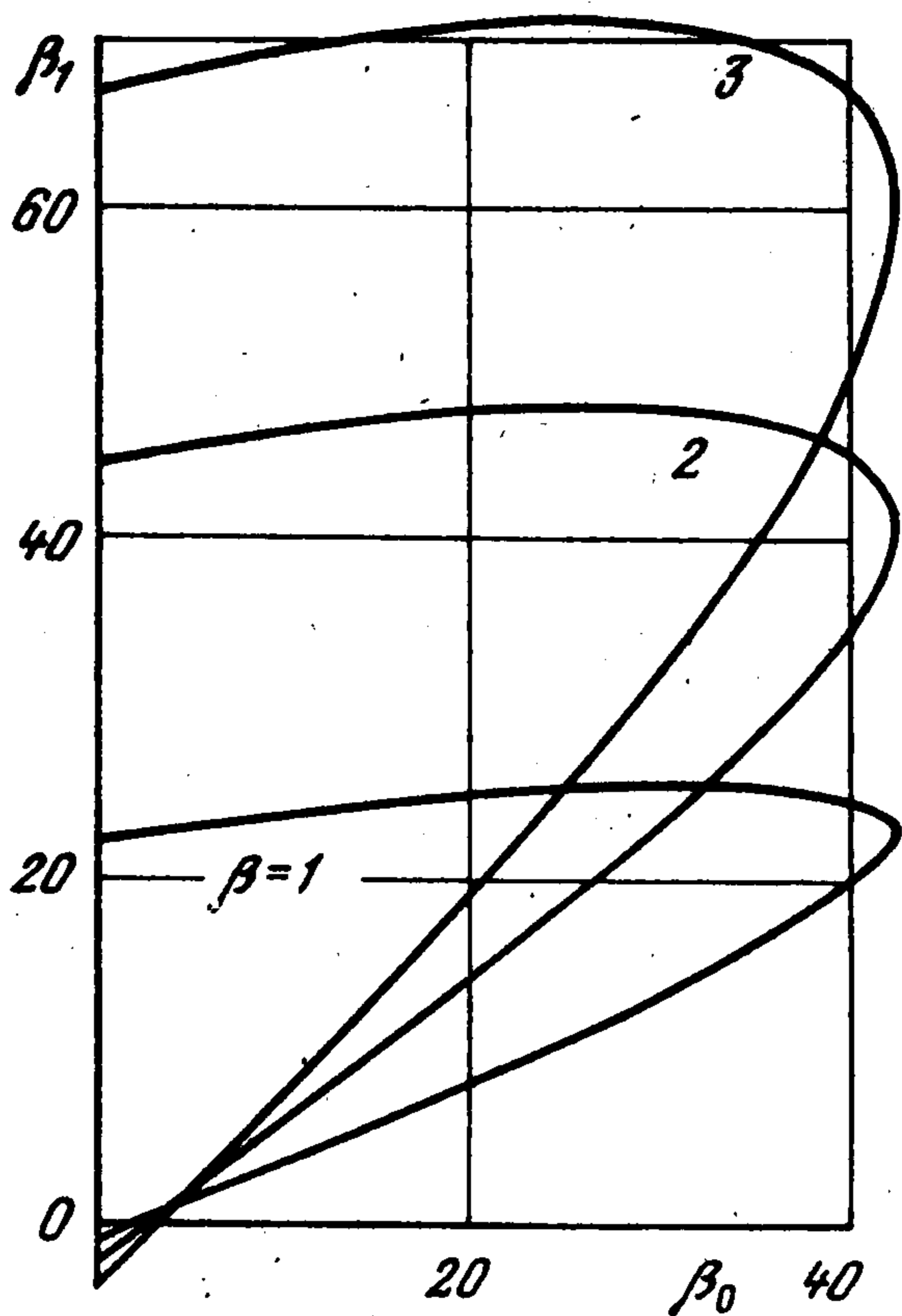
(с коэффициентом  $\beta + \beta_1$ ) в случае (4.7) также описывается неравенствами (5.1).

ОАУ, показанные на фиг. 2, ограничены и целиком принадлежат области (5.1).

В отсутствие сил вязкости, пропорциональных угловой скорости  $\dot{\alpha}$ , обратная

связь по скорости груза не оказывает на движение системы стабилизирующее

влияние (см. разд. 4). Рассмотрение фиг. 2, однако, показывает, что при  $\delta + \beta \neq 0$



Фиг. 3

построены ОАУ при  $T_L = j = \delta = 0$ , т.е. без учета динамики привода, для  $T = 0, 1, m = 2, \beta = 1, 2, 3$ . При уменьшении коэффициента  $\beta$  ОАУ уменьшается по величине; при  $\beta \rightarrow 0$  она, как сказано выше, стягивается к интервалу на прямой (4.11) и исчезает. ОАУ для абсолютно твердого тела (2.3) с управлением (2.4) при  $T_L = 0$  не ограничена и описывается неравенствами

$$\beta_0 > 0, \quad \beta_1 > -\delta - \beta + \frac{T(1/3 + m + j)}{T\delta + 1/3 + m + j} \beta_0 \quad (5.2)$$

Из известных результатов [3] следует, что ОАУ для податливого звена при обратной связи по углу  $\alpha$  и угловой скорости  $\dot{\alpha}$  при  $T_L = 0$  также не ограничена. ОАУ, показанные на фиг. 3 (они расположены внутри петель, справа от оси  $\beta_0 = 0$ ), ограничены. Каждая из них целиком принадлежит соответствующей области (5.2), что можно доказать при помощи формул (4.8), (4.9) аналитически.

Уменьшение ОАУ при учете податливости стержня подчеркивает важность такого учета в исследовании процесса управления.

Сравнение с результатами, полученными ранее [3], показывает, что в рассмотренных случаях при обратной связи по углу  $\alpha$  и угловой скорости  $\dot{\alpha}$  ОАУ в пространстве коэффициентов обратной связи больше, нежели при обратной связи по положению и скорости груза.

**6. Области устойчивости при  $\beta_1 = 0$ .** Если  $\beta_1 = 0$ , то из уравнений (3.8) имеем выражение для  $\beta_0$  согласно формуле (4.8) и, кроме того,

$$\beta = -\delta + j(T + T_L)\epsilon^4 - \epsilon(T + T_L)R_2(\epsilon, m) / R_1(\epsilon, m) \quad (6.1)$$

Будем обозначать через  $\epsilon_i = \epsilon_i(m)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) нули квазиполинома  $R_1(\epsilon, m)$ .

Путем рассмотрения соотношений (3.6), (3.8), (4.8), (6.1) можно показать, что при условии (4.7) ОАУ занимает "полуполосу"

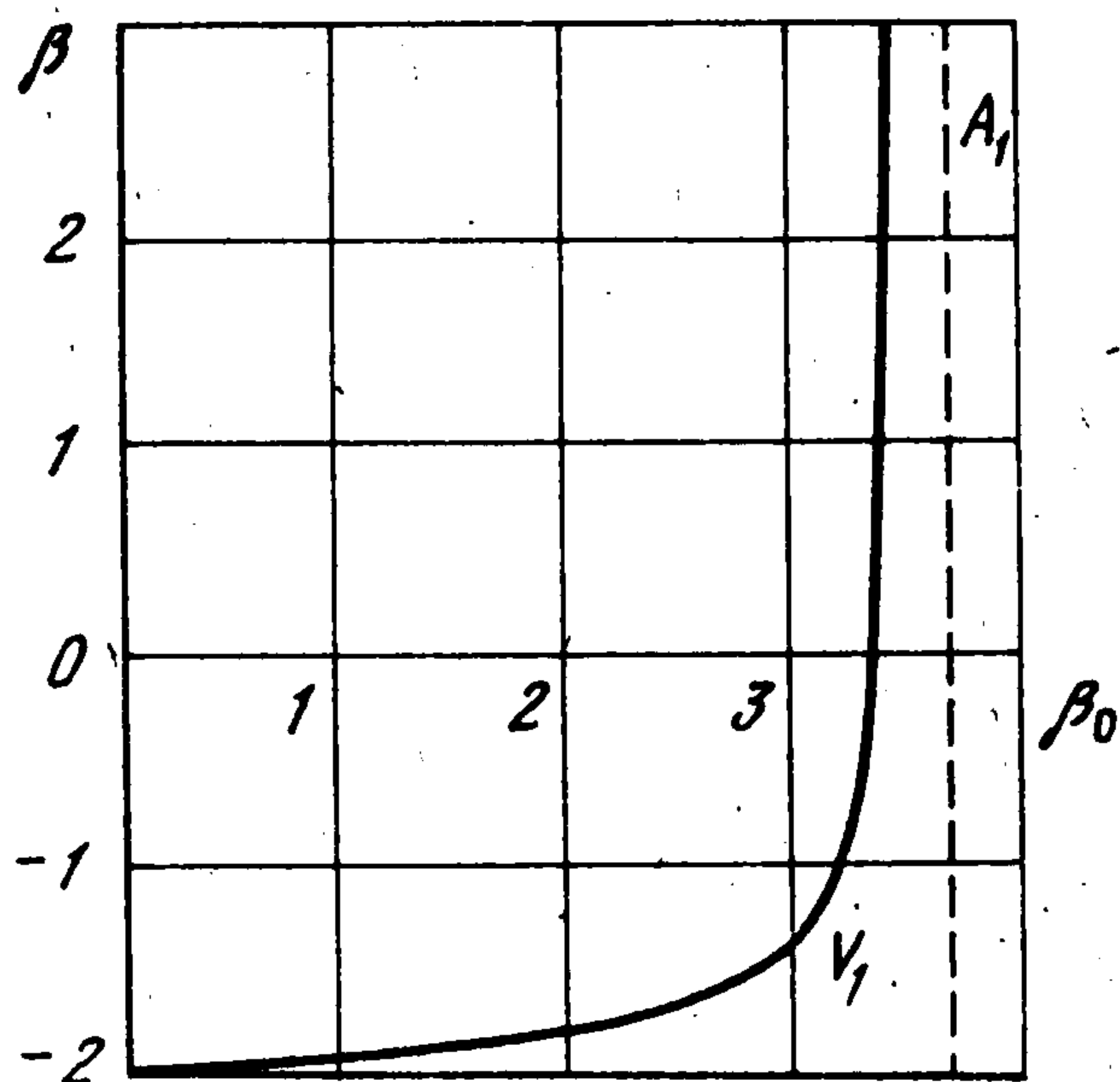
$$\beta_0(\epsilon_1) > \beta_0 > 0, \quad \beta > -\delta \quad (6.2)$$

где функция  $\beta_0(\epsilon)$  определяется соотношением (4.8).

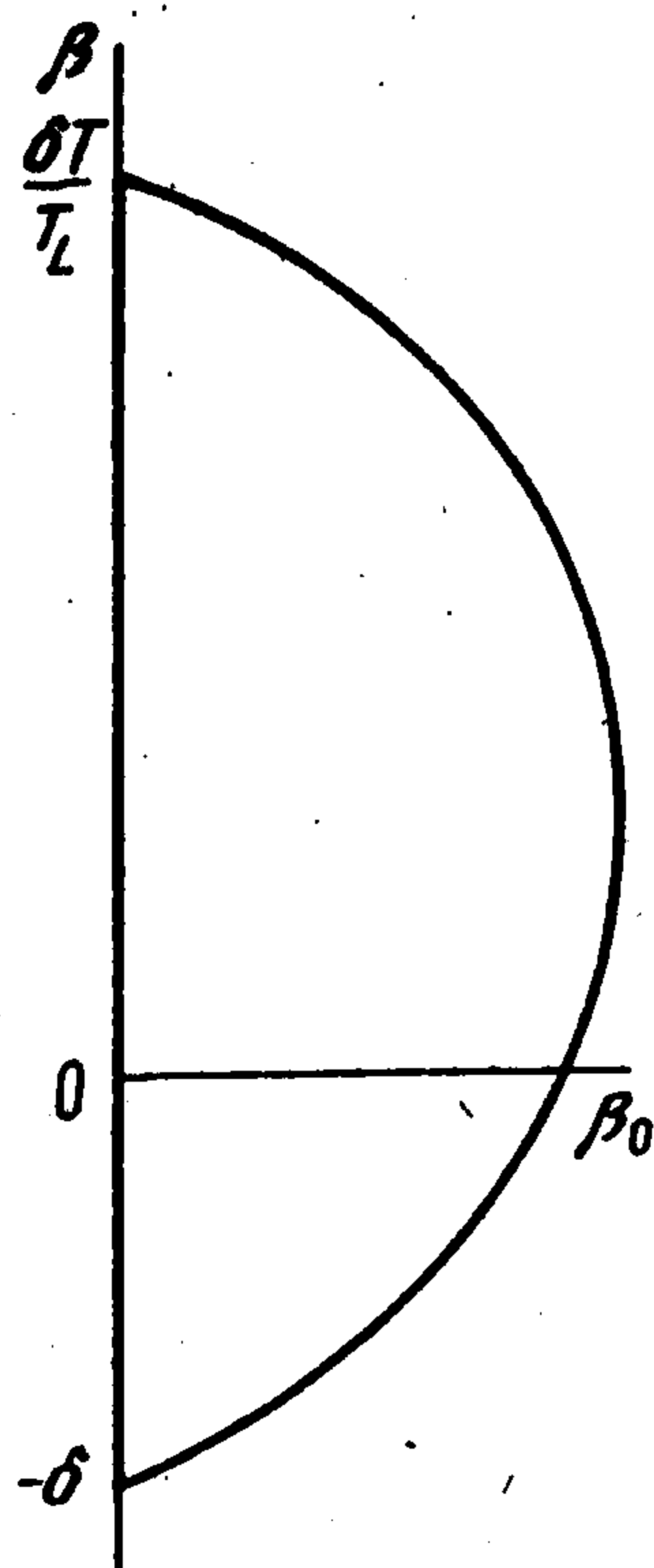
Если  $T \neq 0$  или (и)  $T_L \neq 0$ , то параметрические уравнения (4.8), (6.1) описы-

с ростом коэффициента  $\beta_1$  до некоторого значения диапазон устойчивости по коэффициенту  $\beta_0$  возрастает. Например, если  $m = 1$ , то при  $\beta_1 = 0$  асимптотическая устойчивость имеет место лишь на интервале  $0 < \beta_0 < 3,2$ , а при  $\beta_1 = 10$  – на интервале  $0 < \beta_0 < 25$ . Чем больше масса  $m$ , тем больший диапазон устойчивости по коэффициенту  $\beta_0$  может быть достигнут при  $\beta_1 \neq 0$ . Если  $m \rightarrow \infty$ , то, как можно показать при помощи соотношений (4.8), (4.9), область устойчивости "заполняет" весь угол  $\beta_0 > 0, \beta_1 > (\beta_0/3 - 1)(\delta + \beta)$ . Таким образом, при достаточно больших значениях  $m$  всякая точка из этого угла оказывается в области устойчивости, а всякая точка вне этого угла – вне области устойчивости. Поэтому, при наличии вязкости обратная связь по скорости груза может способствовать стабилизации системы.

На фиг. 3 по формулам (4.8), (4.9)



Фиг. 4



Фиг. 5

вают бесконечное число ветвей. Первая ветвь  $V_1$  получается при  $0 < \epsilon < \epsilon_1$ . Начинается она при  $\epsilon = 0$  из точки

$$\beta_0 = 0, \quad \beta = -\delta \quad (6.3)$$

При  $\epsilon \rightarrow \epsilon_1 - 0$  имеем  $\beta_0(\epsilon) \rightarrow \beta_0(\epsilon_1)$ ,  $\beta(\epsilon) \rightarrow +\infty$ , и ветвь  $V_1$  стремится к асимптоте  $A_1$ . Каждая из следующих ветвей  $V_i$  ( $i = 2, 3, \dots$ ) получается при  $\epsilon_{i-1} < \epsilon < \epsilon_i$ . На каждой из них с ростом параметра  $\epsilon$  величина  $\beta$  строго монотонно растет от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Поэтому ни одна из ветвей не имеет самопересечений и каждая из них делит плоскость  $\beta_0, \beta$  на две части. Ветвь  $V_i$  ( $i \geq 2$ ) имеет две асимптоты  $A_{i-1}$  и  $A_i$ : к первой она стремится при  $\epsilon \rightarrow \epsilon_{i-1} + 0$ , ко второй — при  $\epsilon \rightarrow \epsilon_i - 0$ . Асимптоты параллельны оси  $\beta$  и описываются уравнениями  $\beta_0 = \beta_0(\epsilon_i)$ . Все ветви  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) пересекают ось  $\beta$ . Если  $T = 0$ , а  $T_L \neq 0$ , то пересечения происходят в точке (6.3). Если  $T \neq 0$ , а  $T_L = 0$ , то все точки пересечения, за исключением первой, лежат ниже точки (6.3) и при  $i \rightarrow \infty$  строго монотонно удаляются от нее, стремясь к  $-\infty$ . Если же  $T \neq 0$  и  $T_L \neq 0$ , то точки пересечения ветвей  $V_i$  при  $2 \leq i \leq p$  лежат ниже точки (6.3), а при  $p + 2 \leq i$  — выше точки

$$\beta_0 = 0, \quad \beta = \delta T / T_L \quad (6.4)$$

Число  $p$  равно максимальному значению  $i$ , при котором  $1 - TT_L \epsilon_i^4 > 0$ . Ветвь  $V_{p+1}$ , и только она, пересекается с осью  $\beta$  два раза: первый раз — ниже точки (6.3), второй раз — выше точки (6.4). С ростом номера  $i$  те точки пересечения, которые лежат ниже точки (6.3), строго монотонно удаляются от нее, а те, которые выше точки (6.4), строго монотонно приближаются к последней и стремятся к ней при  $i \rightarrow \infty$ .

За положительное направление движения вдоль каждой ветви примем направление, при котором параметр  $\epsilon$ , а значит и величина  $\beta$  растет. При этом каждая из ветвей делит плоскость  $\beta_0, \beta$  на левую и правую части. Для построения областей устойчивости и неустойчивости важно выяснить, увеличивается или уменьшается число собственных значений  $\lambda$ , у которых  $\text{Re} \lambda > 0$ , при переходе точкой  $\beta_0, \beta$  через каждую ветвь с левой ее стороны на правую [11].

Анализ уравнений (3.6), (4.8), (6.1) показывает, что число собственных значений  $\lambda$ , у которых  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , увеличивается при пересечении слева направо той ветви, на которой  $R_1(\varepsilon, m) > 0$ , и уменьшается при пересечении той ветви, на которой  $R_1(\varepsilon, m) < 0$ .

Принимая во внимание описанные выше свойства ветвей  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), можно показать следующее. Пусть  $T = 0$ , а  $T_L \neq 0$ . Если при этом  $j \neq 0$ , то ни при каких значениях  $\beta_0, \beta$  система не будет асимптотически устойчивой. Если же  $j = 0$ , то ОАУ существует, слева она ограничена осью  $\beta$ , а справа – кривой, образованной ветвями  $V_i$ . На фиг. 4 построена ОАУ при  $T = j = m = 0$ ,  $T_L = 0,02$ ,  $\delta = 2$ . Ее правая граница – ветвь  $V_1$ , стремящаяся к асимптоте  $A_1$ . Эта область лежит в полуполосе (6.2). Пусть  $T_L = 0$ , а  $T \neq 0$ . Если при этом  $\delta \neq 0$ , или  $\delta = j = 0$ , то ОАУ существует и схожа с областью, показанной на фиг. 4. Она также представляет собой неограниченное множество. Если же  $\delta = 0$ , но  $j \neq 0$ , то ни при каких значениях  $\beta_0, \beta$  система не будет асимптотически устойчивой.

Можно показать, что если  $T \neq 0$  и  $T_L \neq 0$ , то ОАУ ограничена, при этом ее левой границей является отрезок оси  $\beta$ , удовлетворяющий условиям

$$-\delta \leq \beta \leq \delta T / T_L \quad (6.5)$$

Правая граница строится с помощью ветвей  $V_i$ . Концами ее служат точки (6.3), (6.4) (фиг. 5). На плоскости  $\beta_0, \beta$  эта область располагается в полосе (6.5).

Отметим следующий факт, который может быть строго доказан путем анализа соотношений (3.8) в полном параметрическом пространстве  $\beta, \beta_0, \beta_1$ . Если  $T\delta - T_L\beta > 0$  и  $T_L > 0, j > 0$ , то при  $\beta_1 \neq 0$  асимптотическая устойчивость не имеет места. Сказанное в определенном смысле дополняет картину устойчивости.

Выше в ряде случаев ОАУ при стремлении к нулю тех или иных параметров не стягивается непрерывно к нулю, а "мгновенно" ("скачком") исчезает, или же "мгновенно" возникает. Такое парадоксальное, на первый взгляд, нарушение непрерывности может быть в системах с бесконечным спектром и не имеет места в системах с конечным числом степеней свободы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967, 984 с.
3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
4. Лавровский Э.К., Формальский А.М. О стабилизации углового положения упругого стержня // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 6. С. 115–123.
5. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Об управляемом вращении упругого стержня // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 587–595.
6. Бербюк В.Е., Демидюк М.В. Об управляемом движении упругого манипулятора с распределенными параметрами // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 59–67.
7. Чиликин М.Г., Сандлер А.С. Общий курс электропривода. М.: Энергоиздат, 1981. 576 с.
8. Cannon R.H. Jr., Schmitz E. Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot // Intern. J. Robot. Res. 1984. V. 3. № 3. P. 62–75.
9. Cetinkunt S., Yu W.-L. Closed-loop behavior of a feedback-controlled flexible arm: a comparative study // Intern. J. Robot. Res. 1991. V. 10. № 3. P. 263–275.
10. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Стабилизация заданной позиции упругого стержня // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 752–760.
11. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.
12. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 320 с.

Москва

Поступила в редакцию  
26.II.1993