ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, Вып. 6, 1993

УДК 531.36:62–50

© 1993 г. А.М. Ковалев

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассматривается постановка задачи управления по части переменных, когда начальное и конечное состояния системы принадлежат одному и тому же подпространству. Доказываются необходимые и достаточные условия управляемости по части переменных линейных автономных систем. На основе метода ориентированных многообразий [1] получен ряд теорем о частичной управляемости нелинейных автономных систем. Изучается задача об управлении угловым движением твердого тела с помощью одного ротора.

Свойство частичной управляемости использовалось в задачах стабилизации [2, 3] и оптимального управления [4], при этом предполагалось, что начальное состояние системы является произвольным. Эта постановка наиболее хорошо изучена, в частности для линейных систем получены необходимые и достаточные условия управляемости [5, 6]. Настоящая работа продолжает [7], и использованный в ней метод позволяет получить достаточно широкие условия управляемости нелинейных систем и свести их проверку к анализу системы уравнений в частных производных, аналогичных уравнениям для функций Ляпунова в теории устойчивости, что удобно при применении этих результатов в задачах стабилизации.

1. Постановка задачи. Рассматриваются динамические системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}=f(x,u),\quad x\in D\subseteq R^n,\quad u\in U\subseteq R^m,\quad t\in T=[0,\infty) \tag{1.1}$$

где x – фазовый вектор, u – вектор управления, являющийся ограниченной измеримой функцией времени t. Области D, U предполагаем выпуклыми, содержащими нуль в качестве внутренней точки. Функция f считаем достаточное число раз непрерывно-дифференцируемой.

При изучении движения (1.1) часто возникает ситуация, когда система допускает интегралы, что означает ее неуправляемость (по всем переменным) и приводит к необходимости рассмотрения управляемости по части переменных. В качестве примера можно указать задачу управления угловым движением твердого тела с помощью ротора, в которой интегралом является модуль суммарного кинетического момента тела-носителя и ротора, и рассматриваемая система неуправляема по угловым скоростям тела и ротора. Однако для практики важна управляемость системы относительно угловой скорости тела-носителя, а движение ротора несущественно. Это приводит к понятию управляемости по части переменных (по угловой скорости тела-носителя), определить которое можно различными способами. Наиболее полно используются возможности управления, когда на изменение невыделенных переменных никаких ограничений не делается, т.е. для построения требуемого управления их поведение специальным образом подбирается.

Разобьем фазовый вектор на два подвектора $x^T = (x_\alpha^T, x_\beta^T)$ ($x_\alpha \in D_\alpha \subseteq R^\alpha$, $x_\beta \in D_\beta \subseteq R^\beta$) и для системы (1.1) введем определения.

Определение 1. Система (1.1) управляема по переменной x_α в области D, если при любых $x_{\alpha 0}, x_{\alpha 1} \in D_\alpha$ существует момент $t_1 \in T$ и допустимое управление $u(t)$, такие, что соответствующее ему решение $x(t)$ системы (1.1) удовлетворяет условиям

$$x_\alpha(0) = x_{\alpha 0}, \quad x_\alpha(t_1) = x_{\alpha 1}, \quad x(t) \in D \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1$$

Определение 2. Система (1.1) локально управляема (в окрестности нуля) по переменной x_α, если существуют открытые множества $G_1 \subset D_\alpha, G_2 \subset D$, содержащие нуль, такие, что при любых $x_{\alpha 0}, x_{\alpha 1} \in G_1$ существует момент $t_1 \in T$ и допустимое управление $u(t)$, такое, что соответствующее ему решение $x(t)$ системы (1.1) удовлетворяет условиям

$$x_\alpha(0) = x_{\alpha 0}, \quad x_\alpha(t_1) = x_{\alpha 1}, \quad x(t) \in G_2 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1$$

2. Необходимые и достаточные условия управляемости по части переменных для линейных систем. Сначала рассмотрим управляемость по одной координате $x_\alpha = \alpha^T x$ линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.1}$$

в предположении, что $\operatorname{rank}(B, AB, ..., A^{n-1}B) = r < n$. Подпространство управляемости обозначим R_c.

Теорема 1. Система (2.1) управляема по координате $x_\alpha = \alpha^T x$ тогда и только тогда, когда вектор α не является собственным вектором матрицы A^T, ортогональным векторам $b_1, b_2, ..., b_m$, где $B = (b_1, ..., b_m)$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что вопреки утверждению α-собственный вектор матрицы A^T (с собственным числом λ) ортогональный векторам $b_1, ..., b_m$. Тогда, используя уравнения (2.1), получаем $\dot{x}_\alpha = \lambda x_\alpha$. Отсюда следует, что при любом $t_1 \in T$ существуют значения $x_{\alpha 0}, x_{\alpha 1}$, которым не удовлетворяет никакое решение $x_\alpha(t)$ системы (2.1), что означает неуправляемость системы (2.1) по координате x_α. Это противоречие доказывает утверждение теоремы.

Достаточность. Рассмотрим решение граничной задачи отдельно для двух случаев. В первом случае считаем, что вектор α не ортогонален векторам $b_1, ..., b_m$. Переходя к новому базису, первые r векторов которого принадлежат подпространству управляемости R_c, получаем, что в новых координатах y координата x_α записывается в виде $x_\alpha = \tilde{\alpha}^T y$, причем среди величин $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_r$ по крайней мере одна отлична от нуля. Тогда для любых $x_{\alpha 0}$, $x_{\alpha 1}$ существуют две точки $y_i = (y_{1i}, ..., y_{ri}, 0, ..., 0) \in R_c$ ($i = 0, 1$), такие, что $x_{\alpha i} = \tilde{\alpha}_1 y_{1i} + \ldots + \tilde{\alpha}_n y_{ni}$. Поскольку $y_i \in R_c$, то существуют управление $u(t)$ и момент $t_1 \in T$, такие, что соответствующее решение $y(t)$ удовлетворяет условиям $y(0) = y_0$, $y(t_1) = y_1$. Тогда соответствующее $u(t)$ решение системы (2.1) удовлетворяет условиям $x_\alpha(0) = x_{\alpha 0}$, $x_\alpha(t_1) = x_{\alpha 1}$, что доказывает утверждение теоремы в этом случае.

Осталось рассмотреть второй случай, когда вектор α ортогонален векторам $b_1, ..., b_m$, но не является собственным вектором матрицы A^T. Для решения граничной задачи используем явный вид решения $x_\alpha(t)$. Все возможные случаи можно свести к следующим трем:

1) $x_\alpha(t)=e^{\gamma t}(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t)$

2) $x_\alpha(t)=e^{\lambda t}(c_1t^{m-1}+c_2t^{m-2}),\quad m\geqslant 2$

3) $x_\alpha(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t},\quad \lambda_1\neq\lambda_2,\quad c_i=\mathrm{const}$

Во всех трех случаях для любых $x_{\alpha 0}$, $x_{\alpha 1}$ можно подобрать значения постоянных c_i и момент t_1 так, чтобы удовлетворить граничным условиям. Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим управляемость системы

$$\dot{x}_1=x_1+x_2+u,\quad \dot{x}_2=2x_1+x_2+x_3+u,\quad \dot{x}_3=x_2+x_3+u \tag{2.2}$$

Система (2.2) неуправляема (по всем переменным), так как $\mathrm{rank}(b, Ab, A^2b) = 2 < 3$. Пользуясь теоремой 1, изучим ее управляемость по координате, выбрав в качестве векторов α_i $(i = 1, ..., 5)$ координатные орты и векторы $\alpha_4 = (2, -1, -1)^T$, $\alpha_5 = (-1, 0, 1)^T$. Орты не ортогональны вектору $b = (1, 1, 1)^T$, и по теореме 1 система (2.2) управляема по координате x_i $(i = 1, 2, 3)$. Векторы α_4, α_5 ортогональны вектору b и, кроме того, $A^T\alpha_4 = (0, 0, -2)^T \neq \lambda\alpha_4$, $A^T\alpha_5 = (-1, 0, 1)^T = \alpha_5$, поэтому по теореме 1 система (2.2) управляема по координате $x_4 = 2x_1 - x_2 - x_3$ и неуправляема по координате $x_5 = -x_1 + x_3$.

Переходя к исследованию управляемости системы (2.1) по переменной $x_\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)^Tx$, будем считать, что $\mathrm{rank}(\alpha_1, ..., \alpha_k) = k$. Систему (2.1) невырожденной линейной заменой приведем к каноническому виду

$$\dot{y}=Py+Qu;\quad P=\begin{Vmatrix} P_1 & P_2\\ 0 & P_3\end{Vmatrix},\quad Q=\begin{Vmatrix} Q_1\\ 0\end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

Здесь P_1, P_2, P_3 и Q_1 – матрицы размерами $r\times r$, $r\times(n-r)$, $(n-r)\times(n-r)$ и $r\times m$ соответственно.

Предположим, что среди проекций векторов $\alpha_1, ..., \alpha_k$ на подпространство управляемости R_c имеется s $(s\leqslant k)$ линейно независимых. Тогда переходя при необхомости с помощью невырожденного линейного преобразования к новой переменной $\tilde{x}_\alpha$, можно получить, что независимы проекции первых s векторов $\alpha_1, ..., \alpha_s$, а проекции остальных векторов $\alpha_{s+1}, ..., \alpha_k$ – нулевые, т.е.

$$\tilde{x}_{\alpha i}=\sum_{j=r+1}^{n}\tilde{\alpha}_{ij}y_j\quad (i=s+1,\dots,k)$$

Тогда повторяя рассуждения доказательства теоремы 1, можно утверждать, что для управляемости системы (2.3) необходимо и достаточно, чтобы для всякой матрицы $K_p=(\tilde{\alpha}^n_{i_1},\dots,\tilde{\alpha}^n_{i_p})$, составленной из p различных векторов $\tilde{\alpha}^n_j=(\tilde{\alpha}_{j r+1},\dots,\tilde{\alpha}_{jn})^T$ $(j = s + 1, ..., k)$, было выполнено неравенство

$$\mathrm{rank}(K_p, P_3^TK_p,\dots,P_3^{T(n-r-1)}K_p)\geqslant 2p\quad (p=1,\dots,k-s)$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть векторы $\alpha_i = (\alpha_{i1}, ..., \alpha_{in})^T$ $(i = 1, ..., k)$ таковы, что $\mathrm{rank}\| \alpha_{ij} \| = s$ $(i = 1, ..., s; j = 1, ..., r)$, $\alpha_{ej} = 0$ $(l = s + 1, ..., k; j = 1, ..., r)$ и $\alpha^n_j = (\alpha_{s+j\, r+1}, ..., \alpha_{s+jn})^T$ $(j = 1, ..., k - s)$. Тогда система (2.3) управляема по переменной $x_\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)^Ty$ тогда и только тогда, когда для всякой матрицы

$K_p = (\alpha^n_{i_1}, \ldots, \alpha^n_{i_p})$, составленной из p различных векторов α^n_j ($j = 1, \ldots, k - s$),

выполнено условие

$$\operatorname{rank}(K_p, P_3^T K_p, \ldots, P_3^{t(n-r-1)} K_p) \geqslant 2p \quad (p = 1, \ldots, k-s) \tag{2.4}$$

Замечание 1. Условия теоремы 2, очевидно, выполнены, если векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ принадлежат подпространству управляемости R_c, т.е. выполнено условие

$$\operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = \operatorname{rank}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, B, AB, \ldots, A^{n-1}B) \tag{2.5}$$

которое является достаточным условием управляемости системы (2.1) по переменной $x_\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^T x$.

Замечание 2. Поскольку $\operatorname{rank}(K_p, P_3^T K_p, \ldots, P_3^{t(n-r-1)} K_p) \leqslant n - r$, то, выписывая неравенство (2.4) для $p = k - s$, получаем условие

$$n - r \geqslant 2(k - s) \tag{2.6}$$

которое является необходимым условием управляемости системы (2.3) по переменной x_α.

В частности, если $k = n - 1$, то из неравенства (2.6) при учете условия $r \geqslant s$ следует, что $r = s = n - 1$ и $r = s = n - 2$. В первом случае векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ принадлежат подпространству управляемости, т.е. выполнено и достаточное условие управляемости. Во втором случае, как и при доказательстве теоремы 1, можно доказать, что достаточное условие управляемости выполнено, если вектор α^n_{n-1} не будет собственным вектором матрицы P_3^T. Тем самым установлено следующее следствие.

Следствие 1. Для управляемости системы (2.3) по переменной $x_\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})^T y$ необходимо и достаточно, чтобы $r = s = n - 1$, либо $r = s = n - 2$ и вектор α^n_{n-1} не являлся собственным вектором матрицы P_3^T.

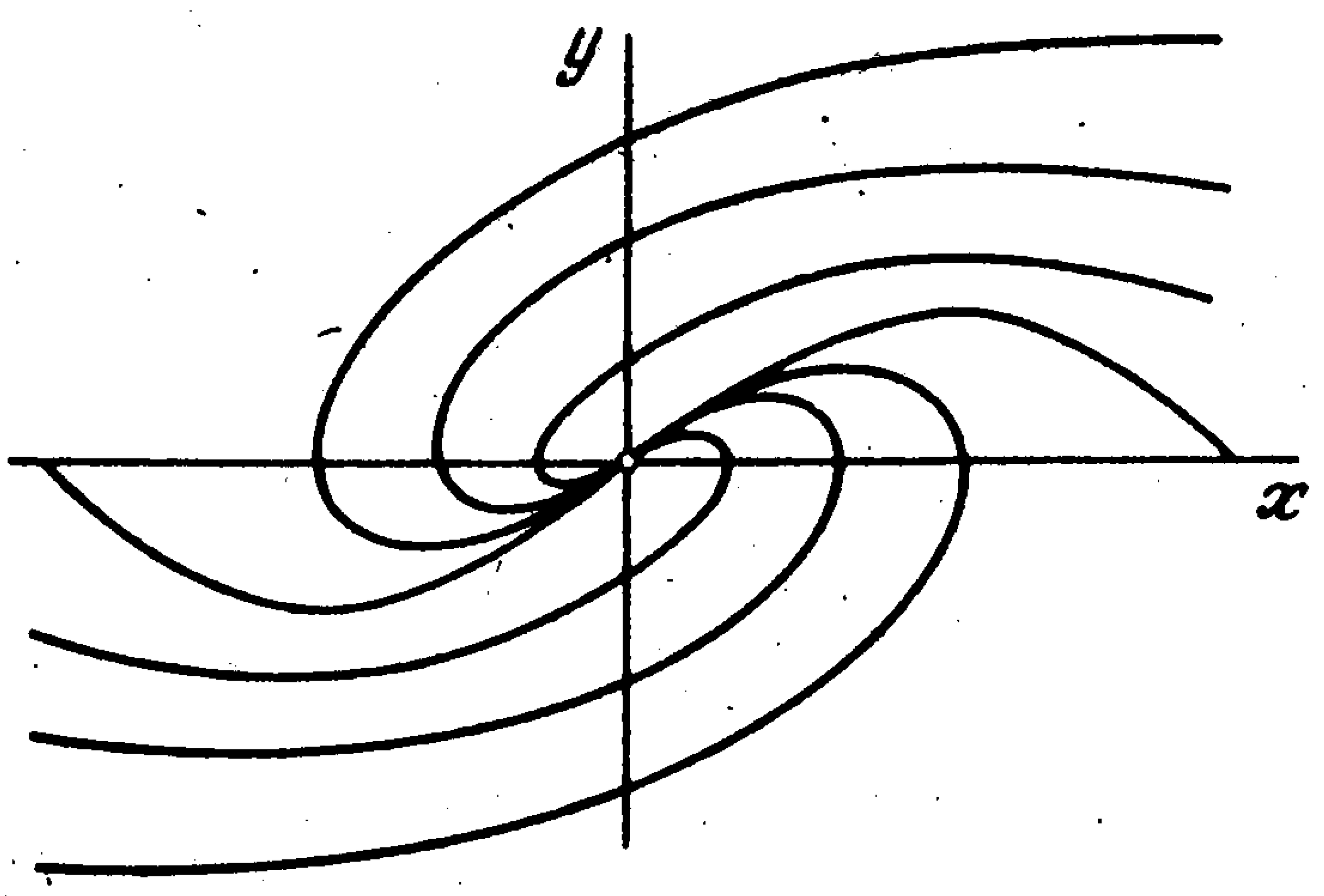
Пример 2. Рассмотрим управляемость системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = x_5, \quad \dot{x}_5 = 0 \tag{2.7}$$

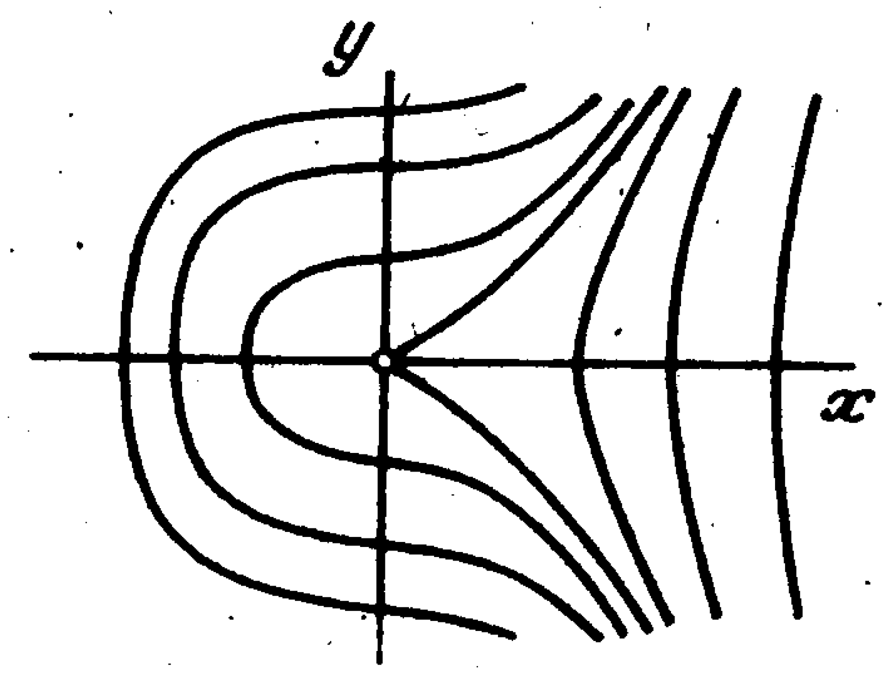
В системе вообще отсутствует управление, и, очевидно, по всем переменным система (2.7) неуправляема. Из необходимого условия (2.6) следует, что система (2.7) может быть управляема по двум координатам. Применив теорему 2, можно установить, что в качестве наборов таких координат можно принять (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4). По любым другим наборам из двух координат (x_i, x_j) система (2.7) неуправляема. Система (2.7) управляема по одной координате, кроме координаты x_5.

Анализируя структуру траекторий в случаях неуправляемости, заключаем, что причина неуправляемости по переменной x_α – наличие инвариантной гиперплоскости $\alpha^T x = 0$, где $\alpha \in R^\alpha$. Так, в примере 1 инвариантная плоскость – подпространство управляемости $x_3 - x_1 = 0$, что и является причиной неуправляемости по перменной $x_\alpha = x_3 - x_1$. Теорема 1 и следствие 1 допускают переформулировку, в которой необходимым и достаточным условием управляемости служит отсутствие инвариантной гиперплоскости $\alpha^T x = 0$ ($\alpha \in R^\alpha$), что позволяет достаточно просто обобщить эти результаты на нелинейные системы.

3. Управляемость по части переменных нелинейных систем. Исследование нелинейных систем удобно проводить, используя геометрические методы, для чего



Фиг. 1



Фиг. 2

оказывается полезной указанная выше формулировка условий управляемости по части переменных линейных систем в терминах инвариантных гиперплоскостей или, более общих, инвариантных многообразий (ИМ). Однако нелинейные системы устроены более сложно и могут вообще не иметь ИМ, а иметь лишь ориентированные многообразия (ОМ) [7][1], которые и являются причиной неуправляемости.

Проиллюстрируем это примерами.

Пример 3. Изучим управляемость системы

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=y(1+\cos x)-\sin x, \quad \dot{z}=u \tag{3.1}$$

Система (3.1) имеет треугольный вид [1] и неуправляема в любой области, так как уравнения для x, y образуют отдельную подсистему, не содержащую управления. Очевидно, система (3.1) управляема по координате z, и для исследования ее управляемости по координате x и по y достаточно рассмотреть систему (3.1) на плоскости xy. Система (3.1) не допускает ИМ $x = 0$, $y = 0$, и условия теоремы 1 для нее выполнены. Анализируя поле скоростей системы (3.1) в плоскости xy, можно заключить, что система (3.1), действительно, локально управляема по координате x и по y. Непосредственной проверкой, например, используя теорему Леви-Чивиты [8], убеждаемся, что система (3.1) имеем ИМ $y = \sin x$, наличие которого приводит к неуправляемости по координате y системы (3.1) во всем пространстве или в какой-либо области, содержащей начало координат, например, в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ $(R > 1)$. Вместе с тем система (3.1) управляема по координате $x_\alpha = k_1x + k_2y$ при $k_1 \neq 0$ во всем пространстве (фиг. 1).

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\dot{x}=2y, \quad \dot{y}=3x^2, \quad \dot{z}=u \tag{3.2}$$

Как и в предыдущем примере, можно показать, что для системы (3.2) выполнены условия теоремы 1 локальной управляемости по координате x и по y, так как ИМ, ортогональные осям x и y, отсутствуют. Анализируя поле скоростей, заключаем, что система (3.2) управляема по координате x. Однако по координате y система (3.2) неуправляема в любой области, и причиной неуправляемости является ОМ $y = \mathrm{const}$, в частности, ось x, ортогональная оси y (фиг. 2).

Рассмотренные примеры показывают, что, как и в задаче управляемости по

[1]См. также: *Ковалев А.М.* Метод инвариантных соотношений в теории управления динамических систем с приложениями к задачам механики: Препринт № 01, Донецк: Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, 1992. 79 с.

всем переменным [1], используя понятие ИМ, можно получить лишь необходимые условия управляемости по части переменных. Для их формулировки введем множества $D_{x\alpha k} = \{x \in D\colon x_\alpha = x_{\alpha k}\}$, являющиеся сечениями области D плоскостями $x_\alpha = x_{\alpha k}$.

Теорема 3. Если система (1.1) управляема по переменной x_α в области D, то в области D отсутствуют ИМ M, такие, что $M \supseteq D_{x\alpha 1}$ и $D\backslash M \supset D_{x\alpha 0}$ для некоторых $x_{\alpha 0}, x_{\alpha 1} \in D_\alpha$.

Доказательство получаем рассуждением от противного. Если, вопреки утверждению теоремы, существует ИМ M такое, что $M \supseteq D_{x\alpha 1}$ и $D\backslash M \supset D_{x\alpha 0}$ то выбираем значения $x_{\alpha 0}, x_{\alpha 1} \in D_\alpha$ в качестве граничных. Тогда при любом выборе управления и значений $x_{\beta 0}, x_{\beta 1} \in D_\beta$ система (1.1) не может за конечное время перейти из начальной точки $x_0^T = (x_{\alpha 0}^T, x_{\beta 0}^T)$ в конечную $x_1^T = (x_{\alpha 1}^T, x_{\beta 1}^T)$, так как начальная точка не принадлежит ИМ, а конечная – ему принадлежит, и, значит, достигается лишь за бесконечное время. Это означает неуправляемость системы (1.1) по переменной x_α в области D, что противоречит условию и доказывает теорему.

Используя понятие ориентированного множества, получим необходимые и достаточные условия управляемости по части переменных. Для их доказательства удобно переформулировать определение 1 в терминах орбит [7].

Определение 3. Система (1.1) управляема по переменной x_α в области D, если $\mathrm{pr}_{x\alpha}\mathrm{Or}^{\pm}D_{x\alpha} = D_\alpha \quad \forall\, x_\alpha \in D_\alpha$.

Теорема 4. Система (1.1) управляема по переменной x_α в области D тогда и только тогда, когда в области D отсутствуют ориентированные множества N такие, что $N \supseteq D_{x\alpha 1}$ и $D\backslash N \supset D_{x\alpha 0}$ для некоторых $x_{\alpha 0}, x_{\alpha 1} \in D_\alpha$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 3, так как ИМ – частный случай ориентированного множества. Для доказательства достаточности предположим, что вопреки утверждению система (1.1) неуправляема в области D, т.е. найдется $x_\alpha \in D_\alpha$, такое, что $\mathrm{pr}_{x_\alpha}\mathrm{Or}^{+} D_{x\alpha} \neq D_\alpha$ либо $\mathrm{pr}_{x_\alpha}\mathrm{Or}^{-} D_{x\alpha} \neq D_\alpha$. Но $\mathrm{Or}^{\pm}D_{x\alpha}$ – ориентированное множество, которое, очевидно, содержит $D_{x\alpha}$, а поскольку $\mathrm{pr}_{x_\alpha}\mathrm{Or}^{\pm} D_{x\alpha} \neq D_\alpha$, то существует $x_{\alpha 0} \in D_\alpha$ такое, что $D\backslash\mathrm{Or}^{-}D_{x\alpha} \supset$ $\supset D_{x\alpha 0}$, либо $D\backslash\mathrm{Or}^{+}D_{x\alpha} \supset D_{x\alpha 0}$. Получили противоречие, которое и доказывает теорему.

В задаче управления по одной координате $x_\alpha = \alpha^T x$ к неуправляемости приводит лишь существование ОМ, граница которого гиперплоскость $\alpha^T x = 0$. Поскольку граница дифференцируема, то метод ориентированных многообразий [1, 7] дает необходимые и достаточные условия частичной управляемости.

Теорема 5. Система (1.1) локально управляема по координате $x_\alpha = \alpha^T x$ тогда и только тогда, когда уравнение в частных производных

$$(f(x,u), \nabla V(x)) = \lambda(x,u)\, V(x) + G(x,u)\ \forall u \in U \tag{3.3}$$

не имеет решения $V(x) = \alpha^T x$, где $\lambda(x, u)$ – непрерывная, а $G(x, u)$ – знакопостоянная функция в $D_0 \times U$, D_0 – некоторая окрестность точки $x = 0$.

В задаче управления по переменной $x_\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)^T x$ ОМ, приводящие к неуправляемости по x_α, имеют границу, ортогональную подпространству R^β, т.е. определяемую уравнениями $V_i(x_\alpha) = 0$, где V_i могут быть и недифференцируемыми. Метод ориентированных многообразий дает необходимые условия частичной управляемости. Как и в задаче управления по всем переменным, различаем случаи ОМ полной и неполной размерности [1, 7].

Теорема 6. Если система (1.1) локально управляема по переменной $x_\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)^T x$, то уравнение в частных производных (3.3) не имеет решения $V(x) = V(x_\alpha)$.

Теорема 7. Если система (1.1) локально управляема по переменной $x_\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)^T x$, то система уравнений в частных производных

$$(f(x,u), \nabla V_i(x)) = \sum_{j=1}^{n-s} \lambda_{ij}(x,u)\, V_j(x) + G_i(x,u), \quad \forall u \in U \quad (i = 1, 2, \ldots, n-s) \tag{3.4}$$

не имеет решений $V_i(x) = V_i(x_\alpha)$. Здесь $\lambda_{ij}(x, u)$ – непрерывные, $G_1(x, u)$ – знакопостоянная функции, $G_2(x, u) = ... = G_{n-s}(x, u) = 0$ в $D_0 \times U$, D_0 – некоторая окрестность точки $x = 0$.

4. Условия управляемости по части переменных. Исследование уравнений (3.3), (3.4) затруднено наличием в них управляющего параметра u, который может принимать любые значения из $U \subseteq R^m$. Для преодоления этой трудности, как и при изучении управляемости по всем переменным [1, 7], в каждой точке области D представим вектор $f(x, u)$ в виде линейной комбинации векторных полей $f_1(x), ..., f_r(x)$

$$f(x,u) = k_1(x,u)\, f_1(x) + \ldots + k_l(x,u)\, f_l(x) + k_{l+1}(x,u)\, f_{l+1}(x) + \ldots + k_r(x,u)\, f_r(x) \tag{4.1}$$

$$k_{l+1}(x,u) \geqslant 0, \ldots, k_r(x,u) \geqslant 0 \quad \forall (x,u) \in D \times U$$

где коэффициенты $k_1(x, u), ..., k_l(x, u)$ принимают как положительные, так и отрицательные значения. Тогда, используя теоремы 5–7, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 8. Если в области $D \times U$ функция $f(x, u)$ представима в виде (4.1), то система (1.1) локально управляема по координате $x_\alpha = \alpha^T x$ тогда и только тогда, когда система уравнений в частных производных

$$(f_i(x), \nabla V(x)) = \lambda_i(x)\, V(x) + G_i(x) \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{4.2}$$

не имеет решения $V(x) = \alpha^T x$. Здесь $\lambda_i(x)$ – непрерывные, $G_j(x)$ ($j = l + 1, ..., r$) – знакопостоянные функции одного значения в D_0; $G_1 = ... = G_l = 0$, D_0 – некоторая окрестность точки $x = 0$.

Теорема 9. Если система (1.1) локально управляема по переменной $x_\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)^T x$, то система уравнений в частных производных (4.2) не имеет решения $V(x) = V(x_\alpha)$.

Теорема 10. Пусть в области $D \times U$ функция $f(x, u)$ представима в виде (4.1) и система (1.1) локально управляема по переменной $x_\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)^T x$. Тогда система уравнений в частных производных

$$(f_p(x), \nabla V_i(x)) = \sum_{j=1}^{n-s} \lambda_{pij}(x)\, V_j(x) + G_{pi}(x) \tag{4.3}$$

$$(p = 1, \ldots, r; \quad i = 1, \ldots, n-s)$$

не имеет решений $V_i(x) = V_i(x_\alpha)$. Здесь $\lambda_{pij}(x)$ – непрерывные, $G_{p1}(x)$ ($p = l + 1, ..., r$) – знакопостоянные функции одного знака в D_0, $G_{pi} = 0$ для всех остальных значений индексов p, i, D_0 – некоторая окрестность точки $x = 0$.

5. Управление угловым движением твердого тела. Движение относительно центра масс твердого тела с одним ротром описывается уравнениями [1, 9]

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\,\omega_2\omega_3 + (e_2\omega_3 - e_3\omega_2)\,\xi - e_1 u (123) \qquad \dot{\xi} = u \tag{5.1}$$

Здесь ω_i, e_i – проекции на главные оси вектора угловой скорости тела и единичного вектора кинетического момента ротора, ξ – величина кинетического момента ротора, A_i – главные центральные моменты инерции тела, u – момент сил, приложенных к ротору, который считаем управляющим параметром.

Уравнения (5.1) можно получить из уравнений (41.9) работы [9] если в них принять $\xi = C(\dot\varphi + p\alpha + q\beta + r\gamma)$ и вместо тензора θ_0 ввести измененный тензор θ, исходя из представления вектора кинетического момента системы тело-носитель – ротор в виде $K = \theta\omega + \xi i$, где i – единичный вектор оси вращения ротора.

Наличие интеграла уравнений (5.1)

$$(A_1\omega_1 + \xi e_1)^2 + (A_2\omega_2 + \xi e_2)^2 + (A_3\omega_3 + \xi e_3)^2 = \text{const} \tag{5.2}$$

приводит к неуправляемости (по всем переменным) системы (5.1) в любой области.

Для практики важно уметь переводить тело-носитель из одного вращательного движения в другое, для чего система (5.1) должна быть управляемой по угловой скорости $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Исследуем управляемость системы (5.1) по переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, изучив вопрос существования ОМ полной размерности (теорема 9) и неполной размерности (теорема 10).

Представление (4.1) для правых частей уравнений (5.1), очевидно, имеет место, и уравнения (4.2) принимают вид

$$\frac{e_1}{A_1}\frac{\partial V}{\partial\omega_1} + \frac{e_2}{A_2}\frac{\partial V}{\partial\omega_2} + \frac{e_3}{A_3}\frac{\partial V}{\partial\omega_3} - \frac{\partial V}{\partial\xi} = \lambda_1 V$$

$$C_1\frac{\partial V}{\partial\omega_1} + C_2\frac{\partial V}{\partial\omega_2} + C_3\frac{\partial V}{\partial\omega_3} = \lambda V + G(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\xi) \tag{5.3}$$

$$\left(C_1 = \frac{1}{A_1}[(A_2 - A_3)\,\omega_2\omega_3 + (e_2\omega_3 - e_3\omega_2)\,\xi]\,(123)\right)$$

На основании теоремы 9 необходимым условием управляемости системы (5.1) по переменной ω является отсутствие у системы (5.3) решений $V = V(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Считаем, что точка $\omega = 0$, $\xi = 0$ не является особой для поверхности $V = 0$, и поэтому функцию V можно представить в виде

$$V = (k,\omega) \quad (k = (k_1,k_2,k_3) \neq 0)$$

Подставляя эту функцию в первое уравнение (5.3), находим, что оно удовлетворяется для $\lambda_1 \equiv 0$ и значений k_i, удовлетворяющих условию

$$(\kappa,k) = 0 \quad (\kappa = (e_1/A_1, e_2/A_2, e_3/A_3)) \tag{5.4}$$

Для исследования второго уравнения (5.3) функцию λ_2 выберем в виде $\lambda_2 = q_0\xi + (q, \omega) + \ldots$ $(q = (q_1, q_2, q_3))$, где свободный член отсутствует, поскольку сразу приводит к знакопеременности G. Тогда проверка условий теоремы 9 сводится к проверке знакопостоянства функции

$$G = k_1C_1 + k_2C_2 + k_3C_3 - (q_0\xi + (q,\omega))\,(k,\omega) \tag{5.5}$$

Условия знакопостоянства квадратичной формы (5.5) приводят к равенству нулю главных миноров матрицы коэффициентов $\Delta_{14} = 0$, $\Delta_{24} = 0$, $\Delta_{34} = 0$, откуда получаем однородную систему линейных уравнений относительно k_i

$$A_2A_3q_0k_1 - A_3e_3k_2 + A_2e_2k_3 = 0\,(1, 2, 3)$$

Эта система имеет ненулевое решение $k_i = A_i e_i \beta$ (β = const) лишь при $q_0 = 0$. Подставляя найденные значения k_i в равенство (5.4), приходим к равенству $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0$, что противоречит условию нормировки $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$. Таким образом, система (5.1) не допускает ОМ полной размерности (система (5.3) не имеет решения $V = V(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$) и по теореме 9 для системы (5.1) выполнены необходимые условия локальной управляемости по переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Перейдем к изучению вопроса о существовании ОМ неполной размерности, для чего воспользуемся теоремой 10. Для полного рассмотрения достаточно исследовать случаи $s = 2$ (двумерные ОМ), поскольку для $s = 3$ из уравнений (5.1) сразу получаем $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, что противоречит условию нормировки. Уравнения (4.3) имеют вид

$$\frac{e_1}{A_1}\frac{\partial V_\alpha}{\partial \omega_1} + \frac{e_2}{A_2}\frac{\partial V_\alpha}{\partial \omega_2} + \frac{e_3}{A_3}\frac{\partial V_\alpha}{\partial \omega_3} - \frac{\partial V_\alpha}{\partial \xi} = \lambda_{\alpha 1} V_1 + \lambda_{\alpha 2} V_2 \tag{5.6}$$

$$C_1 \frac{\partial V_\alpha}{\partial \omega_1} + C_2 \frac{\partial V_\alpha}{\partial \omega_2} + C_3 \frac{\partial V_\alpha}{\partial \omega_3} = \lambda_{2+\alpha 1} V_1 + \lambda_{2+\alpha 2} V_2 + \delta_{2+\alpha 3} G, \quad \alpha = 1, 2$$

На основании теоремы 10 необходимым условием управляемости системы (5.1) по переменной ω является отсутствие у системы (5.6) решений $V_1 = V_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $V_2 = V_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Считаем, что точка $\omega = 0$, $\xi = 0$ не является особой для поверхностей $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ и в ней эти поверхности пересекаются. Поэтому функции V_1 и V_2 можно представить в виде

$$V_1 = (k, \omega) + \ldots, \quad V_2 = (n, \omega) + \ldots$$

причем векторы $k = (k_1, k_2, k_3)$ и $n = (n_1, n_2, n_3)$ – ненулевые и неколлинеарные. Подставляя эти функции в первые два уравнения (5.6), находим, что они удовлетворяются для $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = 0$ и значений k_i, n_i, удовлетворяющих условиям

$$(\kappa, k) = 0, \quad (\kappa, n) = 0 \tag{5.7}$$

Для исследования оставшихся двух уравнений (5.6) функции λ_{ij} выберем в виде $\lambda_{ij} = q_{ij0}\xi + (q_{ij}, \omega) + \ldots$ ($q_{ij} = (q_{ij1}, q_{ij2}, q_{ij3})$), где свободные члены отсутствуют, поскольку приводят либо к знакопеременности G, либо к нарушению условия пересечения поверхностей $V_1 = 0$, $V_2 = 0$. Для функции G получаем выражение

$$G = (k, C) - (q_{310}\xi + (q_{31}, \omega))(k, \omega) - (q_{320}\xi + (q_{32}, \omega))(n, \omega) \tag{5.8}$$

Из условия знакопостоянства функции (5.8) заключаем, что квадратичная форма функции G не зависит от ξ.

Для дальнейшего анализа используем условия совместности системы (5.6). Рассмотрим скобки Якоби первого, третьего и второго, четвертого уравнений:

$$B_1 \frac{\partial V_\alpha}{\partial \omega_1} + B_2 \frac{\partial V_\alpha}{\partial \omega_2} + B_3 \frac{\partial V_\alpha}{\partial \omega_3} + D_{2+\alpha 1} V_1 + D_{2+\alpha 2} V_2 + \delta_{2+\alpha 3} Q = 0$$

$$B_1 = \frac{(A_3 - A_2)}{A_1 A_2 A_3}(e_2 A_3 \omega_3 + e_3 A_2 \omega_2 + e_2 e_3 \xi)\,(123)$$

$$D_{2+\alpha\beta} = \frac{e_1}{A_1}\frac{\partial \lambda_{2+\alpha\beta}}{\partial \omega_1} + \frac{e_2}{A_2}\frac{\partial \lambda_{2+\alpha\beta}}{\partial \omega_2} + \frac{e_3}{A_3}\frac{\partial \lambda_{2+\alpha\beta}}{\partial \omega_3} - \frac{\partial \lambda_{2+\alpha\beta}}{\partial \xi}$$

$$Q = \frac{e_1}{A_1}\frac{\partial G}{\partial \omega_1} + \frac{e_2}{A_2}\frac{\partial G}{\partial \omega_2} + \frac{e_3}{A_3}\frac{\partial G}{\partial \omega_3} - \frac{\partial G}{\partial \xi}, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

Подставляя сюда выражения для V_1, V_2 и учитывая, что квадратичная форма функции G не зависит от ξ, приравниванием нулю коэффициента при ξ получаем два равенства

$$(\chi, k) = 0, \quad (\chi, n) = 0 \tag{5.9}$$

$$(\chi = ((A_3 - A_2)\, e_2 e_3, (A_1 - A_3)\, e_1 e_3, (A_2 - A_1)\, e_2 e_1))$$

Рассматривая совместно равенства (5.7), (5.9), приходим к заключению: для того чтобы векторы k и n не были коллинеарными, необходимо, чтобы были коллинеарны векторы κ и χ.

Равенство нулю их векторного произведения дает систему, имеющую решения

$$e_2 = e_3 = 0, \quad e_1 = 1 \ (123) \tag{5.10}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при условиях (5.10) система (5.6) имеет решения

$$V_1 = \omega_2, \quad V_2 = \omega_3$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{31} = \lambda_{42} = 0, \quad G = 0$$

$$\lambda_{32} = -\frac{e_1}{A_2}\xi + \frac{A_3 - A_1}{A_2}\omega_1, \quad \lambda_{41} = \frac{e_1}{A_3}\xi + \frac{A_1 - A_2}{A_3}\omega_1$$

Таким образом, на основании теоремы 10 заключаем, что при выполнении условия (5.10) система (5.1) неуправляема по переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$; если параметры e_i не удовлетворяют условиям (5.10), то для системы (5.1) выполнены необходимые условия локальной управляемости по переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

В заключение отметим, что использование ротора для управления угловым движением твердого тела расширяет возможности управления по сравнению с использованием реактивного двигателя, для которого существуют дополнительные запрещенные положения относительно тела-носителя [1, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наук. думка, 1980. 174 с.
2. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 256 с.
3. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.
4. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
5. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 552 с.
6. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
7. *Ковалев А.М.* Ориентированные многообразия и управляемость динамических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 639–646.
8. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
9. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
10. *Аграчев А.А., Сарычев А.В.* Управление вращением асимметричного твердого тела // Проблемы управления и теории информации. 1983. Т. 12. № 5. С. 335–347.

Донецк

Поступила в редакцию
22.IV.1992