УДК 531.36:62–50

© 1993 г. Р. Габасов, Ф.М. Кириллова

К МЕТОДАМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СТАБИЛИЗАТОРОВ

Задача приведения линейной динамической системы в окрестность состояния покоя [1, 2] решается при помощи специальной задачи успокоения системы за конечное время управлениями минимальной интенсивности. Обсуждается возможность использования других задач оптимального управления. Основное внимание уделяется построению алгоритмов работы устройства (стабилизатора), которое при постоянном действии неизвестных возмущений способно в режиме реального времени генерировать стабилизирующие управления, циркулирующие в замкнутой оптимальной системе [3, 4]. Предлагаемый метод основан на конструктивной теории оптимального управления [5, 6]. В другой форме эта теория для решения проблемы стабилизации реализована в [7] (см. также [8]).

1. Постановка задачи. Пусть поведение динамической системы описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n \tag{1.1}$$

Будем считать, что поведение динамической системы под действием управления описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad t \geqslant 0 \tag{1.2}$$

Классическая постановка проблемы стабилизации приведена в [1]. Подойдем к проблеме с несколько иной позиции. Зададим конечное время программного успокоения θ, $0 < \theta < +\infty$, и точность успокоения $\varepsilon > 0$. будем управлять динамической системой (1.2) при помощи кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \geqslant 0$.

Определение 1. Динамическая система (1.2) называется успокаиваемой из состояния x_0, если найдется доступное управление $u(\cdot) = (u(t), t \geqslant 0)$, которое порождает такую траекторию $x(t) = x(t, x_0, u(\cdot))$ системы, что

$$|x_i(\theta)| \leqslant \varepsilon, \quad i \in I = \{1, 2, \ldots, n\} \tag{1.3}$$

Определение 2. Систему (1.1) будем называть успокаиваемой, если свойство (1.3) выполняется для каждого начального состояния $x_0 \in R^n$ системы (1.2).

Понятно, что, для того чтобы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (1.1) была успокаиваемой, необходимо и достаточно, чтобы система (1.2) была полностью управляемой по Калману.

Качество успокаивающего управления $u(t)$, $t \geqslant 0$, оценим по значению функционала

$$\mu(u) = \max_{0 \leqslant t \leqslant \theta} |u(t)| \tag{1.4}$$

Определение 3. Успокаивающее управление $u^0(t)$, $t \geqslant 0$, назовем программнооптимальным, если на нем критерий качества (1.4) достигает минимального значения

$$\mu(u^0) = \min \mu(u) \tag{1.5}$$

Приведенные понятия не выходят за рамки классической теории управляемости. Известен метод [2] построения программно-оптимального управления, основанный на решении проблемы моментов. Ниже для решения задачи (1.2)–(1.5) используется метод, разработанный в [5].

Построение программно-оптимальных управлений – лишь одна (и не самая важная для приложений) сторона проблемы оптимальной стабилизации динамических систем. Значительно более трудной и актуальной для практики стабилизации систем управления является задача построения позиционных оптимальных управлений типа обратной связи. Цель дальнейшего изложения – описать алгоритм работы устройства, которое решает проблему оптимальной стабилизации, генерируя оптимальные управления типа обратной связи в задаче (1.2)–(1.5). Предварительно введем необходимые определения.

Погрузим задачу (1.2)–(1.5) в семейство задач

$$\begin{gathered}\max_{0 \leqslant t \leqslant \theta} |u(t)| \to \min \\ \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = z; \quad |x_i(\theta)| \leqslant \varepsilon, \quad i \in I\end{gathered} \tag{1.6}$$

зависящее от n-вектора z. Обозначим через $u^0(t\,|\,z)$, $x^0(t\,|\,z)$, $t \in [0, \theta]$, программное решение задачи (1.6).

Определение 4. Семейство кусочно-непрерывных функций ($u^0(t\,|\,z)$, $t \in T_\theta =$ $= [0, \theta]$, $z \in R$) назовем оптимальным управлением типа обратной связи в задаче (1.2)–(1.5).

Функцию $u(t\,|\,x(t_k))$, $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, $t_k = k\theta$, $k = 0, 1, \ldots$, будем называть программно-позиционным управлением.

Как известно, позиционным управлением принято называть функцию $u(t\,|\,x(t_k))$, $t \in T$.

Под движением замкнутой системы будем понимать решение $x(t)$, $t \geqslant 0$, уравнения

$$\begin{gathered}\dot{x} = Ax + bu^0(t\,|\,x(t_k)), \quad t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1} \\ t_k = k\theta, \quad x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\end{gathered} \tag{1.7}$$

По определению оптимальной обратной связи, замкнутая система (1.7) асимптотически устойчива

$$\max_{i \in I} |x_i(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

Уравнение (1.7) описывает поведение динамической системы, замкнутой обратной связью в идеальных условиях. В этом случае задача оптимальной стабилизации сводится к решению счетного числа программных задач (1.6). Последние можно решать последовательно, заготавливая на каждом текущем интервале $T_k = [t_k, t_{k+1}]$ решение для последующего интервала T_{k+1}. При наличии мощных ЭВМ и достаточно больших θ этот подход можно осуществить. Однако в реальных условиях замкнутая система будет постоянно испытывать действие неизвестных возмущений.

Предположим, что ее реальное движение описывается уравнением

$$\begin{gathered}\dot{x} = Ax + bu^0(t\,|\,x(t_k)) + w(t), \quad x(0) = x_0 \\ t \in T_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\end{gathered} \tag{1.8}$$

где $w(t)$, $t \geqslant 0$, неизвестная кусочно-непрерывная функция.

Пусть в некотором конкретном процессе функционирования динамической системы реализовалось возмущение $w^*(t)$, $t \geqslant 0$. Оно породит траекторию $x^*(t)$, $t \geqslant 0$, уравнения (1.8). Управление, которое при этом будет циркулировать в замкнутой системе, имеет вид

$$u^*(t) = u^0(t \mid x^*(t_k)), \quad t \in T_k, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Теперь уже невозможно заранее знать о реализовавшихся состояниях $x^*(t_k)$, $k = 1, 2,\ldots$, и поэтому в упомянутом подходе нужно заранее заготавливать семейство $(u^0(t \mid z), t \in T_\theta)$ для всевозможных векторов $z \in R^n$. Понятно, что эта задача не проще классической проблемы синтеза оптимальной обратной связи, которая до сих пор не решена.

Определение 5. Устройство, которое в каждом конкретном процессе функционирования динамической системы способно в режиме реального времени вырабатывать управление $u^*(t)$, $t \geqslant 0$, назовем оптимальным стабилизатором (ОС) динамической системы (1.1).

Алгоритм работы ОС будет описан в разд. 3. А пока приведем необходимые вспомогательные сведения.

2. Определяющие уравнения оптимального стабилизатора. Наряду с задачей (1.6) рассмотрим задачу

$$\alpha(z,\mu) = \min_u \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i(\theta)|$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = z; \quad |u(t)| \leqslant \mu, \quad t \in T_\theta \tag{2.1}$$

Ясно, что минимальное число $\mu = \mu(z)$, удовлетворяющее уравнению $\alpha(z, \mu(z)) = \varepsilon$, является оптимальным значением критерия качества задачи (1.7). Критерий оптимальности для задачи (2.1) можно получить, следуя [5]. Согласно этому критерию, оптимальное управление $u^0_\mu(t) = u^0_\mu(t \mid z)$, $t \in T_\theta$ имеет вид

$$u^0_\mu(t) = \mu(z)\operatorname{sign}\Delta^0_\mu(t)$$

$$\Delta_\mu(t) = \Delta_\mu(t \mid z) = \psi'_\mu(t)b = -y'(z)F(\theta - t)b$$

$$y(z) \in R^n, \quad y_i(z) = 0, \quad i \in I_H(z), \quad I_H(z) = I \setminus I(z)$$

$$I(z) = \{i \in I: |x_i(\theta)| = \alpha(z,\mu)\}, \quad \dot{F} = AF, \quad F(0) = E$$

где $\Delta_\mu(t)$ – оптимальное коуправление, $y(z)$ – оптимальный вектор потенциалов.

Таким образом, оптимальное управление $u^0_\mu(t)$, $t \in T$, определяется значением $\mu(z)$, множеством $I(z)$ и совокупностью

$$t_j(z), \quad j \in P = \{1,\ldots,p\}; \quad y(z) \tag{2.2}$$

состоящей из нулей $t_1(z) < \ldots < t_p(z)$, коуправления $\Delta_\mu(t)$, $t \in T$, и вектора потенциалов.

Элементы (2.2) удовлетворяют системе уравнений

$$f_k(t_j, j \in P; z) = 0, \quad k \in I(z)$$

$$q_l(t_j, j \in P; y) = 0, \quad l \in P \tag{2.3}$$

$$\sum_{x_i(\theta)=\alpha(z,\mu),\ i \in I(z)} y_i - \sum_{x_i(\theta)=-\alpha(z,\mu),\ i \in I(z)} y_i = 1$$

Здесь

$$f_k(t_j, j\in P; z) = \sum_{j=0}^{p}\int_{t_j}^{t_{j+1}} e_k' F(\theta - t) b\, dt\, k_j + e_k' F(\theta) z - \alpha(z,\mu)\operatorname{sign} y_k, \quad k\in I(z)$$

$$q_l(t_j, j\in P; y) = -y' F(\theta - t_l) b, \quad l\in P$$

$$t_0 = 0, \quad t_{p+1} = \theta, \quad k_j = \mu(z)\operatorname{sign}\Delta_\mu(t_j+0)$$

$$e_k' = (0,\ldots,0,\underset{k}{1},0,\ldots,0)$$

Систему уравнений (2.3) назовем определяющими уравнениями ОС. Предположим, что значения z и θ таковы, что выполняются соотношения

$$\operatorname{rank}\{e_k' F(\theta - t_j) b, \quad j = 1,2,\ldots,p; \quad k\in I(z)\} \geqslant |I(z)| - 1$$

Матрица Якоби системы (2.3) имеет вид

$$G(t_i, i\in P; y) = \left\| \begin{matrix} \begin{matrix} 2e_k' F(\theta - t_i) b k_{i-1} \\ i\in P; k\in I(z)\end{matrix} & \mathbf{0} & \begin{matrix} -sign\ y_k \\ k\in I(z)\end{matrix} \\ \begin{matrix} diag(-y' F(\theta - t_i) Ab \\ i\in P\end{matrix} & \begin{matrix} -e_k' F(\theta - t_i) b \\ i\in P, k\in I(z)\end{matrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{matrix} sign\ y_k, \\ k\in I(z)\end{matrix} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$$

При достаточно общих предположениях эта матрица невырождена.

Численный метод решения определяющих уравнений в режиме реального времени аналогичен приведенному в [6] методу решения определяющих уравнений для проблемы синтеза. Укажем необходимые дополнения.

Пусть стабилизатор перевел объект из состояния z в состояние $z + \Delta z$. Для построения множества $I(z + \Delta z)$ в процессе решения определяющих уравнений следим за значениями $y(z)$. Если $y_i(z) = 0$, $i \in I(z)$, то полагаем $I(z + \Delta z) = I(z)\backslash\{i\}$. Кроме того, контролируем поведение пассивных выходных сигналов $x_i(\theta)$, $i \in I\backslash I(z)$. Если $|x_i(\theta)| = \alpha(z, \mu)$, $i \in I\backslash I(z)$, то полагаем $I(z + \Delta z) = I(z) \cup \{i\}$.

Для вычисления $\mu(z + \Delta z)$ используем параметры ε_1 и ε_2 $(0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon)$:

$$\mu(z+\Delta z) = \begin{cases} \mu(z), \varepsilon_1 < \alpha(z,\mu(z)) < \varepsilon_2 \\ \mu(z) - \delta(\mu(z)), \alpha(z,\mu(z)) < \varepsilon_1 \\ \mu(z) + \delta(\mu(z)), \alpha(z,\mu(z)) > \varepsilon_2 \end{cases}$$

Выбором $\delta(\mu(z)) > 0$ добиваемся выполнения неравенства

$$\varepsilon_1 < \alpha(z+\Delta z, \mu(z+\Delta z)) < \varepsilon_2$$

3. Алгоритм работы оптимального стабилизатора. В начальный момент $\tau = 0$ ОС вырабатывает управление

$$u^*(t) = u^0(t\,|\,x_0), \quad t\in T_0$$

$$|u^0(t\,|\,x_0)| = \mu(x_0), \quad t\in T_0$$

где $u^0(t\,|\,x_0)$ – оптимальное программное управление задачи (1.2)–(1.5), вычисленное до включения ОС. Это управление находится конечными методами из [5].

Оно подается на вход системы (1.2) в течение промежутка времени $T_0 = [0, \theta]$.

Пусть τ – текущее время, $k(\tau)$ – номер отрезка T_k, который содержит этот момент: $k(\tau)\theta < k(\tau + 1)\theta$, $\tau \in T_{k(\tau)}$. Обозначим через $x^*(\tau)$ состояние, в котором оказалась стабилизирующая система в момент времени τ под действием выработанного ОС управления $u^*(t)$, $t \in [0, \tau]$, и реализовавшегося возмущения $w^*(t)$, $t \in [0, \tau[$.

Зададим правила выбора ОС управлений:

$$u^*(\tau) = u^0(\tau - k(\tau)\theta | x^*(t_{k(\tau)})), \quad \tau \geq 0$$

Здесь $u^0(t | x^*(t_{k(\tau)}))$, $t \in T_0$, оптимальное программное управление, построенное в результате численного решения определяющих уравнений (2.3) в режиме реального времени.

Действующий таким образом ОС будет в каждом конкретном процессе функционирования системы вырабатывать в режиме реального времени кусочно-непрерывное управление

4. Модификации. Одним из достоинств ОС, описанного в разд. 2, 3, является то, что он может работать при больших отклонениях систем от состояния покоя. Но при этом значения управляющих воздействий могут оказаться большими. Если отклонения невелики, то можно использовать ОС, вырабатывающие управления, удовлетворяющие заданным ограничениям. Естественная задача оптимального управления, при которой можно построить такого типа успокоитель, имеет вид

$$\int_0^\theta | u(t)| \, dt \to \min, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = z$$

$$| x_i(\theta)| \leq \varepsilon, \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0,\theta]$$

Необходимые изменения, которые следует внести в конструкции разд. 1–3, можно получить, следуя [6].

Вторая возможная модификация ОС из разд. 3 связана с обеспечением свойства полного успокоения системы $x(t) \equiv 0$ через конечное время после окончания действия возмущений.

Этого можно добиться следующим образом. Задаем порог u^* для допустимых значений управления. После прекращения действия возмущений на выходе оптимального успокоителя (разд. 2) через конечное время появится управление $u^*(\tau^*)$, удовлетворяющее равенству $u^*(\tau^*) = u^*$. Начиная с момента τ^* при решении определяющих уравнений зафиксируем число $\mu(\tau^*)$, но сделаем переменным параметр θ, находя его текущее значение $\theta(\tau)$ из определяющих уравнений (2.3).

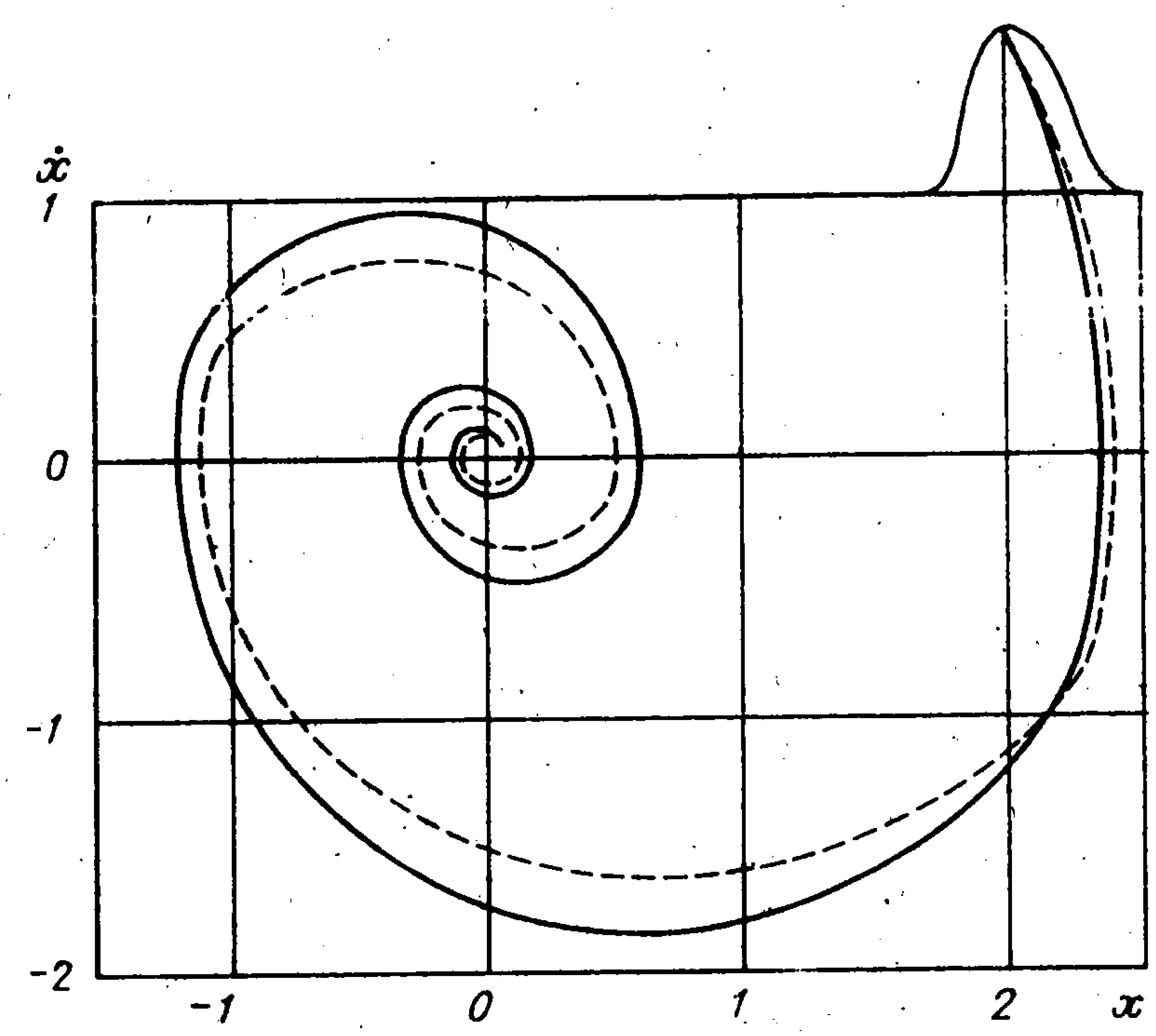
5. Робастность. Одним из требований, предъявляемых к стабилизаторам, является их способность выполнять свои функции при неконтролируемых изменениях параметров объекта стабилизации. Другими словами, стабилизатор, рассчитанный по модели $\dot{x} = Ax$ в реальных условиях может иметь дело с моделью

$$\dot{x} = \bar{A}x \tag{5.1}$$

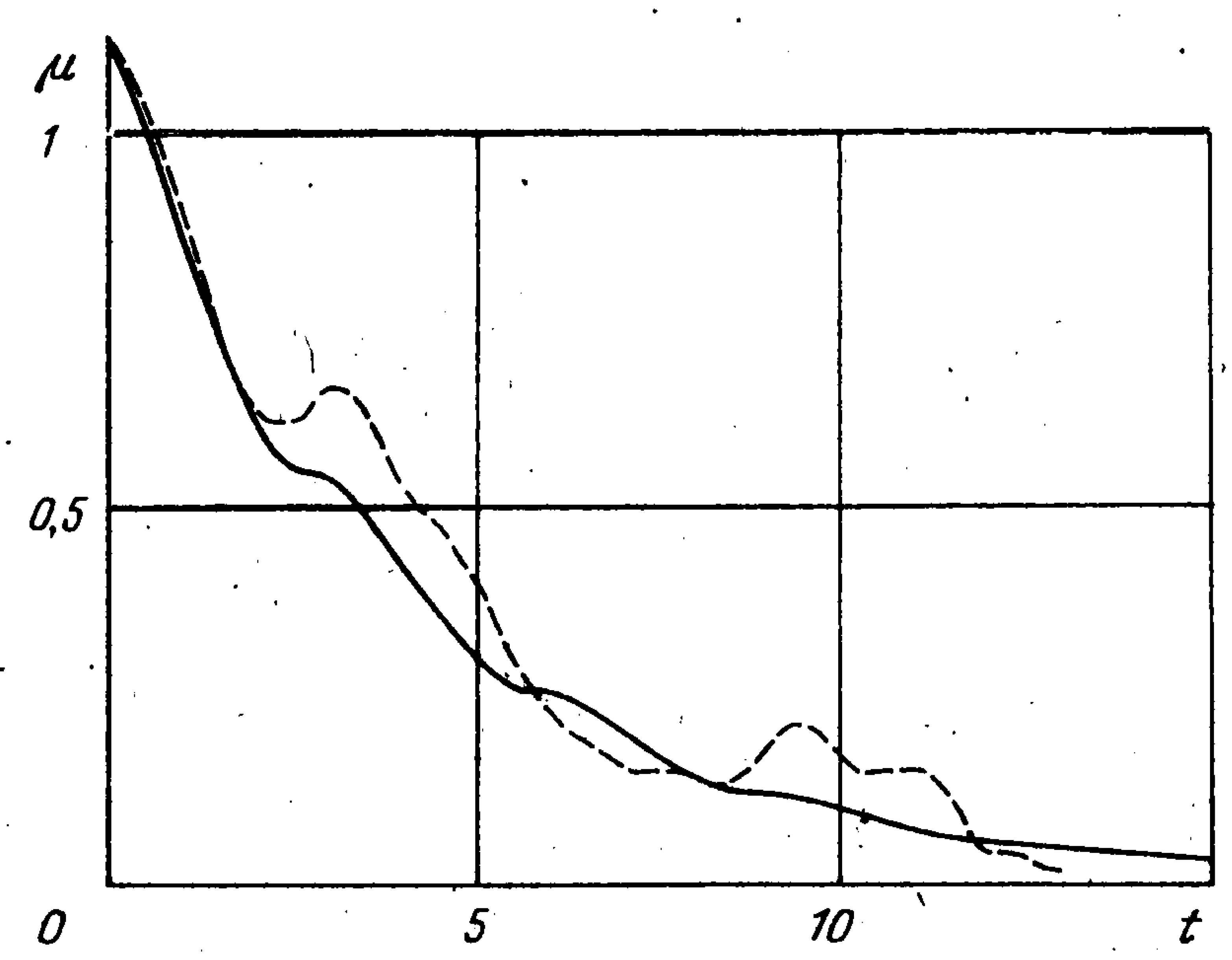
где матрица $\bar{A}$ в некотором смысле мало отличается от матрицы A. Оставляя в стороне вопросы адаптивного управления и вопросы идентификации матрицы $\bar{A}$, рассмотрим возможность приложения полученных выше результатов к проблеме робастной стабилизации.

Для этого запишем уравнение реального движения

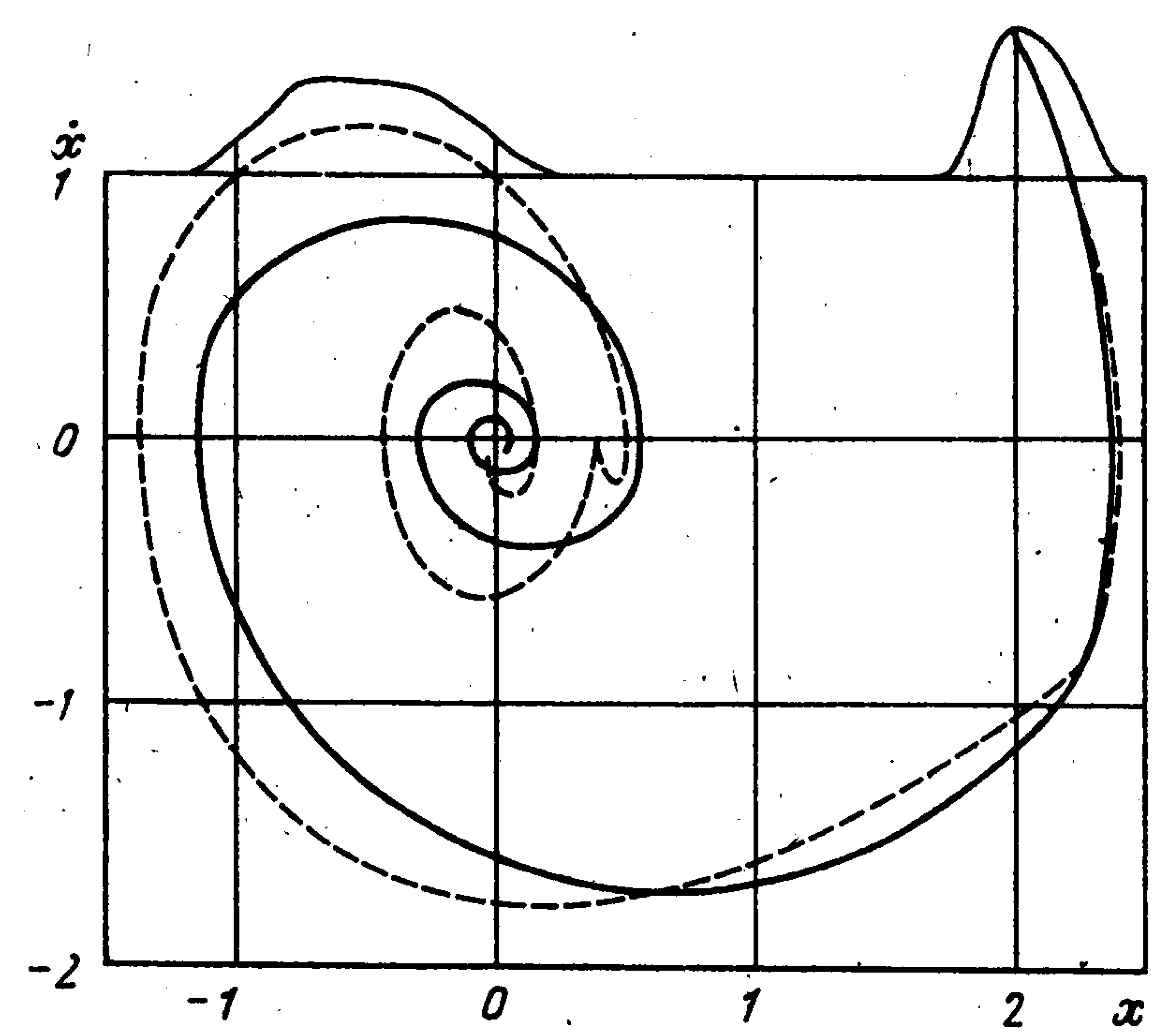
$$\dot{x} = \bar{A}x + bu + \dot{w}(t)$$



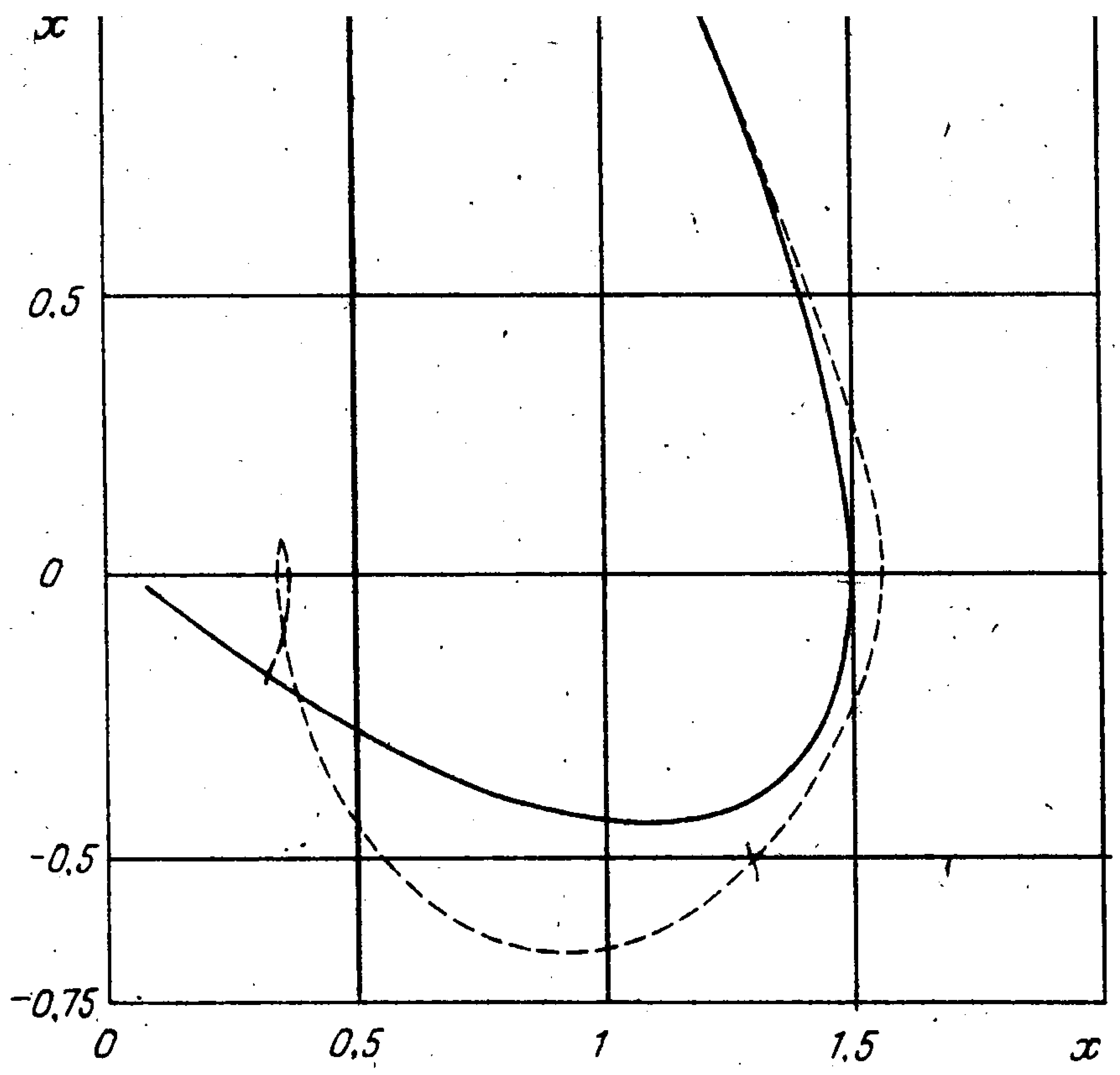
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

в виде

$$\dot{x} = \bar{A}x + bu + w_1(t)$$

и будем считать функцию

$$w_1(t) = w(t) + (\bar{A} - A)x(t), \quad t \geq 0$$

новым возмущением. Получилась динамическая система типа (1.8), исследованная выше.

На фиг. 1 приведены результаты работы построенного в разд. 3 ОС для системы

$$\ddot{x} + x = u, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 1{,}6, \quad \theta = 4 \tag{5.2}$$

в ситуации, когда в реальных условиях уравнение движения объекта с измененными параметрами имеет вид $\ddot{x} + 1{,}1x = u$ (сплошная кривая) или $\ddot{x} + 0{,}9x = u$ (штриховая кривая).

6. Примеры. Работу построенных ОС проиллюстрируем на задаче стабилизации линеаризованного математического маятника в нижнем устойчивом и в верхнем неустойчивом положениях равновесия. При стабилизации устойчивого положения равновесия математическая модель динамической системы имеет вид (5.2).

Были взяты следующие значения параметров: $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 1{,}6$, $\theta = 4$, $w_*(t) = 0{,}5\sin 2t$.

Ниже (строки а) приведены состояния ($x_1 = x(t)$, $x_2 = \dot{x}(t)$) системы, замкнутой обратной связью, описанной в разд. 3 (программно-позиционное управление)

	t	0	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8
а)	x_1	2,0	2,325	1,798	0,851	–0,167	–0,453	–0,304
	x_2	1,6	–0,395	–0,926	–1,379	–0,952	–0,070	0,335
б)	x_1	2,0	2,285	1,404	0,093	–1,132	–1,265	–0,468
	x_2	1,6	–0,794	–1,400	–1,777	–1,033	0,634	1,182

Поскольку согласно алгоритму разд. 2, 3 при построении этой обратной связи непрерывно вычисляются данные для обратной связи $u^0(t \mid x_*(t))$, то указаны также (строки б) состояния системы при использовании позиционного управления, замкнутой последней обратной связью. Эти данные показывают, что обратная связь второго типа обеспечивает достаточно монотонное убывание расстояния от текущего состояния системы до состояния равновесия. Поэтому в дальнейших экспериментах использовалось только позиционное управление.

На фиг. 2 показаны графики изменения оптимальной интенсивности $\mu(t)$, $t \geqslant 0$, в процессе стабилизации для случаев, когда на систему не действуют возмущения (сплошная кривая), и для случаев с указанным возмущением (штриховая кривая). На фиг. 3 изображены соответствующие фазовые траектории.

При стабилизации верхнего неустойчивого положения равновесия маятника математическая модель системы принимает вид [1] $\ddot{x} - x = u$.

При использовании построенного ОС были рассмотрены следующие значения параметров: $x(0) = 1, 2$, $\dot{x}(0) = 1$, $\theta = 2$, $w_*(t) = 0{,}5\sin 2t$. На фиг. 4 изображены фазовые траектории в принятых выше обозначениях.

Авторы благодарят Н.В. Балашевич за проведенные вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
3. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. Ч. 1 1960. Т. 21. № 4. С. 437–441; Ч. 2 1960. Т. 21. № 5. С. 561–568; Ч. 3 1960. Т. 21. № 6. С. 661–665; Ч. 4 1961. Т. 22. № 4. С. 425–435; Ч. 5 1962. Т. 23. № 11. С. 1405–1413.
4. *Калман Р.Е.* Об общей теории систем управления // Тр. I-го Междунар. конгр. ИФАК по автоматическому управлению. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 1. С. 521–547.
5. *Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. М.: Изд-во Университетское, 1984. 207 с.
6. *Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.* Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1294–1999.
7. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Устойчивость, стабилизация, оптимальность. // Вестн. Белгосуниверситета. Сер. 1. 1991. № 3. С. 35–37.
8. *Мороз А.И.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Изд-во МИЭМ, 1974. 252 с.

Минск

Поступила в редакцию
5.VIII.1992