

УДК 531.36+521.1

© 1993 г. И.И. Косенко

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ С ПОМОЩЬЮ МОДУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

Задача двух неподвижных центров интегрируется в квадратурах при помощи теоремы Штеккеля в сфероидальных координатах. Эллиптические координаты меридианной плоскости удовлетворяют уравнениям, описывающим комплексную эллиптическую кривую. Решение записывается при помощи формулы униформизации соответствующей эллиптической кривой. Постоянные, задающие результат в виде двоякопериодических функций, вычисляются последовательно из начальных данных. Отношение полупериодов определяется из трансцендентного комплексного уравнения при помощи модулярных функций. Величина меньшего по модулю полупериода определяется при помощи ϑ -функций нулевого аргумента с использованием инвариантов \wp -функции Вейерштрасса.

1. Редукция задачи. Предполагаем, что движение материальной точки задается в трехмерном (вообще говоря комплексном) пространстве с помощью силовой функции

$$U = m_1/r_1 + m_2/r_2 \quad (1.1)$$

где m_1, m_2 — "массы" центров гравитации, r_1, r_2 — расстояния от точки до этих центров, расположенных на оси z в точках с координатами $(0, 0, c_1)$, $(0, 0, c_2)$ соответственно. Полагаем, что

$$r_k = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - c_k)^2)^{1/2} \quad (k = 1, 2)$$

Считаем, что в соответствии с выбором единиц измерения величина постоянной гравитации равна единице.

Известно [1], что функция (1.1) вещественна, т.е. может описывать реальные движения, только в двух случаях: классическом (когда массы и координаты центров вещественны) и обобщенном (массы и координаты комплексно сопряжены).

Дальнейший анализ для любого из упомянутых случаев проводится однотипно. Поэтому для определенности рассмотрим обобщенную задачу двух неподвижных центров. Полагаем далее, что

$$m_1 = \frac{m}{2}(1 + i\sigma), \quad m_2 = \frac{m}{2}(1 - i\sigma), \quad c_1 = c(\sigma + i), \quad c_2 = c(\sigma - i)$$

Задача по теореме Штеккеля интегрируется в квадратурах в сжатых сферо-

идальных координатах λ, μ, ν , определяемых по формулам

$$\begin{aligned}x_1 &= c[(1+\lambda^2)(1-\mu^2)]^{1/2} \cos \nu \\x_2 &= c[(1+\lambda^2)(1-\mu^2)]^{1/2} \sin \nu \\x_3 &= c\sigma + c\lambda\mu; \quad \lambda \geq 0, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad 0 \leq \nu < 2\pi\end{aligned}$$

При этом кинетическая энергия и силовая функция записываются в виде

$$K = \frac{c^2}{2} \left[\frac{\lambda^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2} \dot{\lambda}^2 + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{1 - \mu^2} \dot{\mu}^2 + (1 + \lambda^2)(1 - \mu^2) \dot{\nu}^2 \right]$$

$$U = \frac{m}{c} \frac{\lambda - \sigma\mu}{\lambda^2 + \mu^2}$$

Применение теоремы Штеккеля приводит к тому, что после введения новой независимой переменной u , связанной с временем t уравнением

$$dt/du = c(\lambda^2 + \mu^2) \quad (1.2)$$

эллиптические координаты меридианной плоскости λ, μ будут удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d\lambda}{du} \right]^2 = \left[\frac{m}{c} \lambda + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \right] (1 + \lambda^2) + \alpha_3 \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d\mu}{du} \right]^2 = \left[-\frac{m\sigma}{c} \mu + \alpha_1 \mu^2 + \alpha_2 \right] (1 + \mu^2) - \alpha_3$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — постоянные интегрирования, определяющие инвариантное тороидальное многообразие в фазовом пространстве задачи, причем α_1 — значение интеграла энергии, α_3 соответствует постоянной площадей и задает поворот меридианной плоскости в соответствии с уравнением

$$\left[\frac{d\nu}{du} \right]^2 = 2\alpha_3 \left[\frac{1}{1 - \mu^2} - \frac{1}{1 + \lambda^2} \right] \quad (1.4)$$

Величина c характеризует расстояние между центрами гравитации. В спутниковых задачах c можно считать малой величиной, в то время как размер орбиты считается порядка единицы.

2. Эллиптические кривые. Любое из уравнений (1.3) можно представить в виде

$$\left[\frac{dz}{du} \right]^2 = [\alpha z + \alpha_1 z^2 + \alpha_2](\delta + z^2) + \alpha_3 \quad (2.1)$$

где связь коэффициентов правой части с коэффициентами в (1.3) достаточно очевидна.

Уравнение (2.1) описывает эллиптическую кривую в комплексном пространстве \mathbb{C}^2 переменных $(z, w = dz/du)$. Общее решение (2.1) можно получить, используя процедуру униформизации [2]. Для этого нужно подвергнуть (2.1) последовательности преобразований. Вначале приведем (2.1) к общему виду

$$\left[\frac{dz}{du} \right]^2 = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4 \quad (2.2)$$

$$a_0 = \alpha_1, \quad a_1 = \frac{\alpha}{4}, \quad a_2 = \frac{\alpha_1 \delta + \alpha_2}{6}, \quad a_3 = \frac{\alpha \delta}{4}, \quad a_4 = \alpha_2 \delta + \alpha_3$$

Если перейти к новой независимой переменной

$$u_1 = \alpha_0^{1/2} u \quad (2.3)$$

то (2.2) превратится в уравнение

$$\left[\frac{dz}{du_1} \right]^2 = z^4 + 4a'_1 z^3 + 6a'_2 z^2 + 4a'_3 z + a'_4 \quad (2.4)$$

$$a'_1 = \frac{\alpha}{4\alpha_1}, \quad a'_2 = \frac{\alpha_1 \delta + \alpha_2}{6\alpha_1}, \quad a'_3 = \frac{\alpha \delta}{4\alpha_1}, \quad a'_4 = \frac{\alpha_2 \delta + \alpha_3}{\alpha_1} \quad (2.5)$$

При помощи преобразования $z \rightarrow z_1$, задаваемого формулой

$$z_1 = z + a'_1 \quad (2.6)$$

избавляемся в (2.4) от члена третьей степени. Получим

$$\left[\frac{dz_1}{du_1} \right]^2 = z_1^4 - 6Az_1^2 + 4Bz_1 + C \quad (2.7)$$

$$A = a'_1{}^2 - a'_2, \quad B = 2a'_1{}^3 - 3a'_1 a'_2 + a'_3, \quad (2.8)$$

$$C = -3a'_1{}^4 + 6a'_1{}^2 a'_2 - 4a'_1 a'_3 + a'_4$$

Теперь в соответствии с [2], если ввести величины

$$g_2 = C + 3A^2, \quad g_3 = -AC + A^3 - B^2 \quad (2.9)$$

то они могут играть роль инвариантов \wp -функции Вейерштрасса, а поскольку $B^2 = 4A^3 - g_2 A - g_3$, то система уравнений

$$\wp(v) = A, \quad \wp'(v) = B \quad (2.10)$$

имеет в параллелограмме периодов единственное решение v .

Далее, при помощи теоремы сложения для \wp -функции получаем униформизацию кривой (2.7) в виде

$$z_1(u_1) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(u_1 - v/2) - \wp'(v)}{\wp(u_1 - v/2) - \wp(v)} \quad (2.11)$$

$$\frac{dz_1}{du_1}(u_1) = \wp(u_1 - v/2) - \wp(u_1 + v/2)$$

Итак, пусть решение (2.11) получено, что на самом деле сводится к вычислению полупериодов \wp -функции. Обратимся к проблеме получения решения исходной задачи по начальным данным при $t = t_0$: $x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{x}_{30}$. Начальные данные в сфероидальных координатах могут быть вычислены очевидным образом. При помощи (1.2) найдем начальные данные для уравнений (1.3). Поскольку они однотипны, ограничимся уравнением (2.1).

Считаем, что получены значения z_0 и $(dz/du)_0 = z'_0$. Эти два числа определяют точку на эллиптической кривой, имеющей параметрическое представление

$$z(u) = \frac{1}{2\beta} \frac{\wp'(u - w/2) - \wp'(w)}{\wp(u - w/2) - \wp(w)}$$

$$\frac{dz}{du}(u) = \beta^{-1} [\wp(u - w/2) - \wp(u + w/2)] \quad (2.12)$$

$$\beta = \alpha_1^{1/2}, \quad w = v/\beta$$

Начальным условиям на кривой (2.12) соответствует значение параметра $u = u_0$, удовлетворяющее системе уравнений

$$z(u_0) = z_0, \quad z'(u_0) = z'_0 \quad (2.13)$$

Тогда решение задачи Коши задается при помощи (2.12) в виде

$$z = z(u_0 + u) \quad (2.14)$$

Таким образом, моменту $t = t_0$ соответствует значение параметра $u = 0$.

Системы уравнений (2.13) и (2.10) могут быть решены численно. При этом можно использовать свойства четности функции (2.13) и \wp -функции соответственно.

Из (2.3) видно, что описанная процедура не работает, когда $\alpha_1 = 0$ (случай нулевой энергии). В этом случае, считая $a_1 \neq 0$, также достаточно просто получить решение уравнения (2.1). Новую независимую переменную u_1 введем соотношением

$$u_1 = a_1^{1/2} u \quad (2.15)$$

Тогда уравнение (2.4) примет вид

$$\left[\frac{dz}{du_1} \right]^2 = 4z^3 + 6a'_2 z^2 + 4a'_3 z + a'_4 \quad (2.16)$$

$$a'_2 = \frac{2\alpha_2}{3\alpha}, \quad a'_3 = \delta, \quad a'_4 = 4 \frac{\alpha_2 \delta + \alpha_3}{\alpha} \quad (2.17)$$

Чтобы привести уравнение (2.16) к форме Вейерштрасса, нужно освободиться от квадратичного слагаемого. Это достигается линейным преобразованием

$$z_1 = z + a'_2 / 2 \quad (2.18)$$

После такой замены уравнение эллиптической кривой примет нормальную форму Вейерштрасса

$$\left[\frac{dz_1}{du_1} \right]^2 = 4z_1^3 - g_2 z_1 - g_3 \quad (2.19)$$

$$g_2 = 3a'_2{}^2 - 4a'_3, \quad g_3 = -a'_2{}^3 + 4a'_2 a'_3 - a'_4 \quad (2.20)$$

Униформизация кривой (2.19) обеспечивается уравнениями

$$z_1(u_1) = \wp(u_1), \quad \frac{dz_1}{du_1}(u_1) = \wp'(u_1) \quad (2.21)$$

Случаи дальнейшего вырождения кривой (2.2) тривиальны.

3. Модулярные функции. В уравнениях (2.12), (2.21) \wp -функция зависит от структурных параметров: полупериодов ω, ω' . Будем считать, что $\text{Im}(\omega'/\omega) > 0$, а $|\omega| \leq |\omega'|$. Этого всегда можно добиться соответствующим выбором на решетке периодов в \mathbb{C} . Обозначим значения инвариантов g_2, g_3 , получаемые по формулам (2.9), либо (2.20) символами a и b соответственно.

Если значения полупериодов известны, то инварианты могут быть представлены при помощи рядов Эйзенштейна

$$g_2(\omega, \omega') = 60 \Sigma'(m\omega + m'\omega')^{-4} \quad (3.1)$$

$$g_3(\omega, \omega') = 140 \Sigma'(m\omega + m'\omega')^{-6}$$

где суммирование ведется по $m, m' \in \mathbb{Z}$, штрих у знака суммы означает исключение из суммирования пары нулевых индексов $(m, m') = (0, 0)$.

С вычислительной точки зрения удобнее вместо ω, ω' использовать параметры τ, ω , где $\tau = \omega'/\omega$. По построению, $\tau \in H$ — верхней полуплоскости. На H определена модулярная функция $J(\tau)$, задаваемая при помощи функций (3.1) по формуле

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(1, \tau)}{g_2^3(1, \tau) - 27g_3^2(1, \tau)} \quad (3.2)$$

Известно [3], что функция $J(\tau)$ инвариантна относительно модулярной группы Γ . Действие Γ на верхней полуплоскости разбивает ее так, что H распадается на области, состоящие из точек конгруэнтных относительно Γ (заштрихована на фигуре).

Известно также, что Γ , кроме тождественного, порождается двумя преобразованиями

$$T: \tau \rightarrow \tau + 1, \quad S: \tau \rightarrow -1/\tau, \quad (3.3)$$

Фундаментальная область G ограничена единичной окружностью, а также двумя прямыми $\operatorname{Re} \tau = \pm 1/2$. Кроме того, в нее включается часть границы (фигура)

$$AC = \{\tau: \operatorname{Re} \tau = -1/2, |\tau| > 1\}, \quad A = \{\tau = -1/2 + i3^{1/2}/2\}$$

$$AB = \{\tau: |\tau| = 1, -1/2 < \operatorname{Re} \tau < 0\}, \quad B = \{\tau = i\}$$

Остальная часть границы может быть получена из указанной при помощи преобразований T, S .

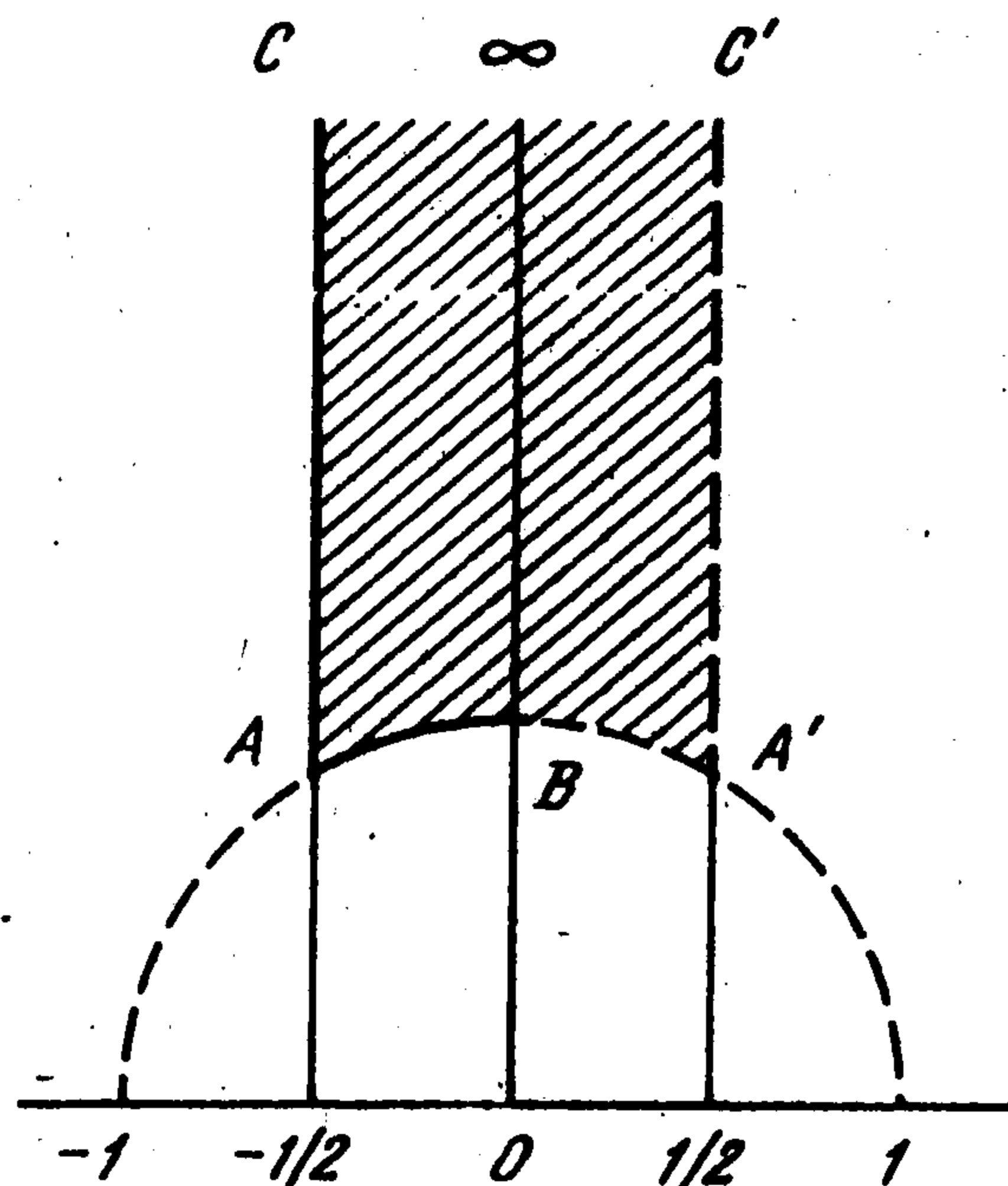
$$J(\tau) = c \quad (3.4)$$

имеет точно одно решение. При этом случаи $c = 0, 1, \infty$ требуют отдельного рассмотрения.

Пусть $J(\tau) = 0$, тогда $\tau = e^{2\pi i/3}$, а при $J(\tau) = 1$ имеем $\tau = i$, причем эти значения τ являются трех- и двукратными корнями уравнения (3.4) соответственно. Так как точка A принадлежит одновременно трем областям (из шести, для которых она является предельной) — образам множества G под действием элементов группы Γ , а точка B — двум, то вполне корректным будет утверждение о том, что функция $J: G \rightarrow \mathbb{C}$ сюръективна и инъективна, т.е. является биекцией.

Если $J(\tau) = \infty$, то это автоматически означает, что $\tau = \infty$, причем, так как $|\operatorname{Re} \tau| \leq 1/2$, то $\operatorname{Im} \tau = \infty$. Поэтому будем иметь вырождение дwoякопериодической эллиптической функции в однопериодическую с периодом 2ω .

Опишем алгоритм, позволяющий по коэффициентам (2.2) вычислить параметр τ . Вначале в соответствии с предыдущим разделом находим значения a, b инвариантов g_2, g_3 . Затем вычисляем значение $J(\tau)$ из выражения $a^3/(a^3 - 27b^2)$. Если оказалось, что $J(\tau) = 0, 1, \infty$, то процесс вычисления τ на этом заканчивается, и полагаем соответственно $\tau = e^{2\pi i/3}, i, \infty$. Заметим, что с точки зрения практических вычислений точное равенство невозможно. Поэтому нужно учитывать ошибки компьютера.



В соответствии с (3.2) видно, что $J(\tau) = 0$, если $a = 0, b \neq 0$; $J(\tau) = 1$, если $b = 0, a \neq 0$; $J(\tau) = \infty$, если $a \neq 0, a^3 - 27b^2 = 0$. Предельный случай $a = b = 0$ требует дополнительного анализа. В соответствии с (3.2) можем записать

$$J(\tau) = (1 - 27\alpha)^{-1} \quad (\alpha = b^2/a^3)$$

Если параметры задачи изменяются так, что $\alpha \rightarrow 1/27$, то $J(\tau) \rightarrow \infty$. При $\alpha \rightarrow 0, \infty$ соответственно получим $J(\tau) \rightarrow 1, 0$; т.е. ситуация сведется к уже описанной.

Итак, задачей является поиск единственного в G корня уравнения (3.4), где случаи $c = 0, 1, \infty$ уже получили свое разрешение. Для этого можно применить один из имеющихся способов численного решения трансцендентных уравнений, например метод Ньютона. В качестве начального приближения можно взять одну из точек внутренней части G , например $\tau_0 = 2i \in G$. Затем итерационный процесс начнет "спускаться" к ближайшему корню уравнения (3.4).

Не исключено, что этот корень может в результате оказаться не в G , а в другой области — образе G под действием группы Γ . Это возможно, если точка начального приближения τ_0 окажется для выбранного метода "ближе" к корню (3.4), лежащему не в G .

Заметим, что во всех случаях в ходе итерационного процесса выхода за пределы верхней полуплоскости не произойдет, так как область G отделена от вещественной оси другими областями, в которых алгоритм неизбежно приблизится к корню (если, конечно, делать достаточно малые шаги).

В самом деле под действием элементов группы Γ точка ∞ области G может перейти либо в ∞ (преобразование T), либо в 0 (преобразование S). Поэтому всевозможным образом комбинируя T и S можно получить все образы ∞ только в рациональных точках вещественной оси. Поскольку образы G при приближении к оси $\text{Im } \tau = 0$ все более измельчаются, а функция $J(\tau)$ в каждой из них конгруэнтна $J: G \rightarrow \mathbb{C}$, то эта функция при $\text{Im } \tau \rightarrow 0$ ведет себя все более нерегулярно. При подходе к вещественной оси в пределах одной области $J(\tau) \rightarrow \infty$. Таким образом, достаточно аккуратно организованный вычислительный процесс "почувствует" барьер нерегулярности при $\text{Im } \tau \rightarrow 0$. В конце концов всегда можно сделать проверку величины $\text{Im } \tau$ и при достаточно близком подходе к оси $\text{Im } \tau = 0$ изменить начальное приближение.

Итак, пусть $\tau^* \in H$ — корень уравнения (3.4), полученный численно. Для дальнейших вычислений необходимо найти точку $\tau \in G$, конгруэнтную τ^* относительно группы Γ . Для решения этой проблемы будем использовать преобразования T и S . Опишем соответствующий алгоритм по шагам.

1°. Если $\tau^* \in G$, то полагаем $\tau = \tau^*$. Конец.

2°. Если τ^* принадлежит дуге $[A'B)$, то применяем преобразование $S: \tau = -1/\tau^*$. Конец.

3°. Если τ^* принадлежит прямой $(A'C')$, то применяем преобразование $T^{-1}: \tau = \tau^* - 1$. Конец.

4°. Если $\text{Re } \tau^* < -1/2$, то применяем преобразование $T: \tau^* = \tau^* + 1$ до тех пор, пока это условие не нарушится. Переход к 1°.

5°. Если $|\tau^*| < 1$, то применяем преобразование $S: \tau^* = -1/\tau^*$. Переход к 1°.

6°. Если $\text{Re } \tau^* > 1/2$, то применяем преобразование $T^{-1}: \tau^* = \tau^* - 1$ до тех пор, пока это условие не нарушится. Переход к 1°.

Описанная вычислительная процедура нуждается в эффективном алгоритме для расчета значения функции $J(\tau)$ и, возможно, ее производной. Для этого применим еще одну модулярную функцию $\lambda: H \rightarrow \mathbb{C}$ [2, 3]. Она не инвариантна

относительно Γ , но инвариантна относительно подгруппы $\Gamma_2 \subset \Gamma$, называемой также λ -группой [4].

Важно, что вместо того чтобы при всяком $\tau^* \in H$ вычислять $g_2(1, \tau)$, $g_3(1, \tau)$ и затем уже $J(\tau)$, имеется возможность воспользоваться формулой [2, 3]

$$J(\tau) = \frac{4(\lambda^2(\tau) - \lambda(\tau) + 1)^3}{27\lambda^2(\tau)(1 - \lambda(\tau))^2} \quad (3.5)$$

$$\lambda(\tau) = 1 - \prod \left[\frac{1 - q^{2n-1}}{1 - q^{2n+1}} \right]^8 \quad [q = e^{i\pi\tau}] \quad (3.6)$$

Здесь и всюду далее произведение вычисляется для $n = 1, 2, \dots$. Последняя формула позволяет достаточно надежно вычислять $\lambda(\tau)$ при $\tau \in H$. Тем более, если начальное приближение взять достаточно далеко от оси $\text{Im } \tau = 0$.

Иными способами величину параметра q можно найти, применяя несколько итерационных процессов [5]: для определения корней уравнения

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 0 \quad (3.7)$$

и для вычисления полных эллиптических интегралов первого рода.

Итак, определив величину $\tau \in G$, удовлетворяющую уравнению (3.4), необходимо найти меньший по модулю полупериод ω . Напомним, что при $\tau = \infty$ задача уже решена, и имеем случай вырождения эллиптической функции в однопериодическую: $\omega' = \infty$. Тогда можно положить [4], что корни уравнения (3.7) таковы

$$e_1 = 2a, \quad e_2 = e_3 = -a$$

где должно быть

$$g_2 = 12a^2, \quad g_3 = 8a^3, \quad \omega = (12a)^{-1/2} \pi$$

При $J(\tau) = 0$ имеем $\tau = e^{2\pi i/3}$. Тогда $g_2(\omega, \omega') = 0$ и в соответствии с формулами (3.1) ω можно определить при помощи функции $g_3(\omega, \omega')$. Имеем

$$b = \omega^{-6} g_3(1, \tau) \quad (3.8)$$

Величина b задана, а функция $g_3(1, \tau)$ может быть вычислена при помощи тета-функций в виде [4]

$$g_3(1, \tau) = \frac{4}{27} \left[\frac{\pi}{2} \right]^6 [\theta_2^4(0|\tau) + \theta_3^4(0|\tau)][\theta_3^4(0|\tau) + \theta_0^4(0|\tau)][\theta_0^4(0|\tau) - \theta_2^4(0|\tau)] \quad (3.9)$$

где тета-функции можно вычислить по удобным формулам [2, 4]

$$\theta_1(\nu|\tau) = 2q_0q^{1/4} \sin \pi\nu \prod Q_{2n}^- \quad (3.10)$$

$$\theta_2(\nu|\tau) = 2q_0q^{1/4} \cos \pi\nu \prod Q_{2n}^+$$

$$\theta_3(\nu|\tau) = q_0 \prod Q_{2n-1}^+, \quad \theta_0(\nu|\tau) = q_0 \prod Q_{2n-1}^-$$

$$q_0 = \prod [1 - q^{2n}], \quad Q_m^\pm = 1 \pm 2q^m \cos 2\pi\nu + q^{2m}, \quad q = e^{i\pi\tau}$$

В качестве полупериода ω можно взять любое из шести значений корня уравнения (3.8), которому удовлетворяют числа

$$\omega = \left| \frac{g_3(1, \tau)}{b} \right| \exp \left[\frac{i}{6} \arg \left(\left| \frac{g_3(1, \tau)}{b} \right| \right) \right], \quad \omega' = \tau\omega = e^{2i\pi/3}\omega, \quad \omega + \omega'$$

Вместе с перечисленными еще три центрально-симметричные им точки образуют полный набор корней шестой степени из $g_3(1, \tau)/b$. Любое из этих шести

чисел пригодны в качестве полупериода ω . Тогда второй полупериод будет равен $\tau\omega$, и двоякопериодическая решетка не изменится от иного выбора.

При $J(\tau) = 1$ решением является $\tau = i$. Это возможно, если $g_3(\omega, \omega') = 0$. Тогда снова из (3.1) можно найти ω при помощи уравнения

$$a = \omega^{-4} g_2(1, \tau) \quad (3.11)$$

в котором нужно положить [4]

$$g_2(1, \tau) = 2/3(\pi/2)^4 [\theta_2^8(0|\tau) + \theta_3^8(0|\tau) + \theta_0^8(0|\tau)]$$

Здесь в качестве полупериода можно взять любой из четырех корней уравнения (3.11). Они расположены в точках

$$\omega = \left| \frac{g_2(1, \tau)}{a} \right| \exp \left[\frac{i}{4} \arg \left(\left| \frac{g_2(1, \tau)}{a} \right| \right) \right], \quad \omega' = \tau\omega = i\omega, \quad -\omega, \quad i\omega$$

Выбирая в качестве ω любое из перечисленных чисел, в качестве ω' автоматически будем иметь $i\omega$. Поэтому целочисленная решетка не будет зависеть от указанного выбора.

Во всех прочих ситуациях, т.е. при $a, b \neq 0$, комбинируя (3.8) и (3.11), получим

$$\omega^2 = (\beta/\alpha) \quad (\alpha = g_2(1, \tau)/a, \quad \beta = g_3(1, \tau)/b)$$

В качестве полупериода можно выбрать одно из двух чисел

$$\omega = |\beta/\alpha| \exp[i/2 \arg(\beta/\alpha)], \quad -\omega$$

Тогда второй полупериод будет соответственно иметь вид $\tau\omega$ либо $-\tau\omega$. От выбора варианта полученная в результате целочисленная решетка не зависит. Кроме того, ω и $-\omega$ удовлетворяют одновременно уравнениям (3.8) и (3.11) так как

$$\omega^4 = \beta^2/\alpha^2 = \alpha^3/\alpha^2 = \alpha, \quad \omega^6 = \beta^3/\alpha^3 = \beta^3/\beta^2 = \beta$$

где в соответствии с (3.8), (3.11) учтено, что $\beta^2 = \alpha^3$. Остальные корни уравнений (3.8), (3.11) не могут накладываться друг на друга. Это и неудивительно, так как первые образуют квадрат, а вторые – правильный шестиугольник. Поэтому их вершины могут совпасть только по двумя точкам.

Остается описать способ вычисления \wp -функций и их производных в формулах (2.11) или (2.21). Снова применим здесь тета-функции [4], получим

$$\wp[u_1] = e_\alpha + \frac{1}{4\omega^2} \left(\frac{\theta_1'(0|\tau)}{\theta_{\alpha+1}(0|\tau)} \frac{\theta_{\alpha+1}(v|\tau)}{\theta_1(v|\tau)} \right)^2 \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$\wp'[u_1] = -\frac{1}{4\omega^3} [\theta_2(0|\tau)\theta_3(0|\tau)\theta_0(0|\tau)]^2 \frac{\theta_2(v|\tau)\theta_3(v|\tau)\theta_0(v|\tau)}{\theta_1^3(v|\tau)}$$

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega', \quad \omega_3 = \omega + \omega', \quad \theta_4(v|\tau) \equiv \theta_0(v|\tau), \quad v = u_1 / (2\omega)$$

где $e_\alpha = \wp[\omega_\alpha]$ – корни уравнения (3.7).

Таким образом, для вычисления \wp -функции нужно знать хотя бы один корень уравнения (3.7). Эти корни также можно выразить при помощи тета-функций [4]

$$e_1 = \frac{\pi^2}{12\omega^2} [\theta_3^4(0|\tau) + \theta_0^4(0|\tau)]$$

$$e_2 = \frac{\pi^2}{12\omega^2} [\theta_2^4(0|\tau) - \theta_0^4(0|\tau)]$$

$$e_3 = -e_1 - e_2 = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} [\theta_2^4(0|\tau) + \theta_3^4(0|\tau)]$$

После определения величин τ , ω в общем положении при $\alpha_1 \neq 0$ требуется определить еще параметр, характеризующий униформизацию соответствующей эллиптической кривой: решение системы уравнений (2.10). Отметим, наконец, что ω – полупериод \wp -функции в формулах (2.11) при $\alpha_1 \neq 0$. Двойкопериодическое решение уравнения (2.1) в соответствии с формулой (2.12) имеет полупериод $\alpha_1^{-1/2}\omega$. Таким образом, структурными константами, однозначно задающими двойкопериодическую функцию – решение уравнения (2.1), являются три числа τ , $\alpha_1^{-1/2}\omega$, ν .

4. Расчет траекторий. Для завершения описания решения задачи двух неподвижных центров необходимо иметь процедуры вычисления функций: $t(u)$ (из уравнения (1.2)) и $v(u)$ (из (1.4)).

Из (1.2), (1.4) видно, что $v(u)$ и $t(u)$ могут быть вычислены при помощи эллиптических интегралов вида

$$\int \frac{du}{z_2^2(u) - \gamma^2}, \quad \int z_2^2(u) du \quad (\gamma = 1, i) \quad (4.1)$$

где функция $z_2(u)$ имеет вид $z_2(u) = z(\nu_0 + u)$, полученный из (2.12), а ν_0 – из (2.13).

Первый из интегралов (4.1) может быть сведен к вычислению интегралов вида

$$I = \int \frac{du}{z_2(u) - \gamma'} \quad (\gamma' = \pm 1, \pm i) \quad (4.2)$$

Если от u перейти к новой переменной интегрирования

$$u_1 = \alpha_1^{1/2}(\nu_0 + u) \quad (4.3)$$

то интеграл (4.2) сводится к интегралу вида

$$I_1 = \int \frac{du_1}{z_1(u_1) - c}$$

где $z_1(u_1)$ задается при помощи (2.11).

Из известного [2] тождества

$$\frac{1}{2} \frac{\wp'(u - \nu/2) - \wp'(\nu)}{\wp(u - \nu/2) - \wp(\nu)} = \frac{1}{2} \frac{\wp'(u - \nu/2) + \wp'(u + \nu/2)}{\wp(u - \nu/2) - \wp(u + \nu/2)}$$

следует, что функция $z_1(u_1)$ – четная, а $z_1'(u_1)$ – нечетная. В параллелограмме периодов функция $z_1(u_1)$ имеет два полюса первого порядка: $a_1 = \nu/2$, $a_2 = -\nu/2$. То же можно сказать о нулях функции $z_1(u_1) - c$, а значит, и о полюсах подынтегральной функции $(z_1(u_1) - c)^{-1}$. Пусть это будут точки $b_1 = w$, $b_2 = -w$.

Учитывая свойства эллиптических функций в конце концов, можно получить

$$\frac{1}{z_1(u_1) - c} = \frac{\zeta(b_1) - \zeta(b_2)}{\wp(b_1) - \wp(b_2)} + \frac{\zeta(u_1 - b_1) - \zeta(u_1 - b_2)}{\wp(b_1) - \wp(b_2)}$$

$$b_1 = w - \nu/2, \quad b_2 = -w - \nu/2$$

где $\zeta(u_1)$ – известная ζ -функция Вейерштрасса. Наконец, вычисление интеграла

I_1 приведет к результату

$$I_1(u_1) = \left(C_0 - 2C_1 \frac{\eta w}{\omega} \right) (u_1 - v_{10}) + \\ + C_1 \left[\ln \theta_1 \left(\frac{u_1 - b_1}{2\omega} \right) - \ln \theta_1 \left(\frac{u_1 - b_2}{2\omega} \right) + \ln \theta_1 \left(\frac{v_{10} - b_2}{2\omega} \right) - \ln \theta_1 \left(\frac{v_{10} - b_1}{2\omega} \right) \right] \\ C_0 = \frac{\zeta(w - v/2) + \zeta(w + v/2)}{\wp(w - v/2) - \wp(w + v/2)}, \quad C_1 = \frac{1}{z_1'(w)}$$

Для ζ -функции предлагается использовать равенство

$$\zeta(u|\tau, \omega) = \frac{\eta}{\omega} u + \frac{1}{2\omega} \frac{\theta_1'(u/2\omega)}{\theta_1(u/2\omega)}$$

Постоянная η также может быть выписана при помощи полезной формулы [2]

$$\eta = \frac{\pi^2}{12\omega} \left[1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1 - q^{2n})^2} \right] \quad [q = e^{i\pi\tau}]$$

Рассмотрим теперь квадратуру для переменной времени. Она сводится к вычислению второго интеграла в (4.1). Если теперь сделать подстановку (4.3), то подынтегральная функция может быть выражена при помощи (2.12). Учитывая свойства полюсов $z_1(u_1)$ в конце концов, получим

$$\left(z_1(u_2) - \frac{\alpha}{4\alpha_1} \right)^2 = A_0 + A_1 (\zeta(u_1 - v/2) - \zeta(u_1 + v/2)) + \\ + A_2 \wp(u_1 - v/2) + A_3 \wp(u_1 + v/2) \quad (4.4)$$

причем, постоянные A_k ($k = 0, 1, 2, 3$) могут быть найдены в виде

$$A_0 = \frac{\alpha^2}{16\alpha_1^2} + \zeta(v) \frac{\alpha}{2\alpha_1} - \wp(v), \quad A_1 = \frac{\alpha}{2\alpha_1}, \quad A_2 = A_3 = 1$$

Интегрирование функции (4.4) проводится стандартным образом.

Обратим внимание на известный факт: функции $v(u)$, $t(u)$ состояются из двух слагаемых – линейной и периодической по переменной u функций. Это обстоятельство можно использовать для обращения функции $t(u)$, когда по заданному моменту времени нужно вычислить координаты λ , μ , v .

Методика решения уравнения

$$t(u) = t - t_0 \quad (4.5)$$

состоит в следующем. Пусть

$$t(u) = lu + \phi(u)$$

где функция $\phi(u)$ периодична по u , а l – постоянная. Тогда, зная приращение функции $t(u)$ на каждом из полупериодов 2ω , $2\tau\omega$ (по переменной u , а не u_1 , как ранее): $2\omega l$, $2\tau\omega l$ соответственно, можно перейти к решению уравнения (4.5) в основном параллелограмме периодов. Пусть это уравнение имеет вид

$$t(u) = t_1 \quad (t_1 = t - t_0 - 2n\omega l - 2n'\tau\omega l) \quad (4.6)$$

Для решения уравнения (4.6) в качестве начального приближения можно взять число $u_0 = l^{-1}t_1$ и затем запустить итерационный процесс поиска решения. Если оно найдено и равно u_* , то окончательный ответ имеет вид $u = u_* + 2n\omega + 2n'\tau\omega$. Итерационное вычисление величины u_* основано на свойстве невырож-

денности производной dt/du . Обратившись к (1.2), заключаем, что вырождение для вещественных движений возможно лишь в одной точке – в начале координат. Поэтому для спутникового случая уравнение (4.6) в строгом смысле всегда разрешимо.

Остановимся на описании алгоритма вычисления числа $t_1 \in \mathbb{C}$. Поскольку периоды 2ω , $2\omega' = 2\tau\omega$ образуют на комплексной плоскости базис вещественного векторного пространства, то при $u \in \mathbb{C}$ справедливо представление $u = a2\omega + a'2\omega'$ ($a, a' \in \mathbb{R}$). Векторы 2ω и $2\omega'$ при линейном отображении $u \rightarrow lu$ переходят в векторы $2l\omega$ и $2l\omega'$ соответственно. Линейная независимость при этом сохраняется. Поэтому имеет место единственное представление

$$t - t_0 = b2l\omega + b'2l\omega' \quad (b, b' \in \mathbb{R}).$$

Ясно, что для перехода в основной параллелограмм необходимо величины b, b' заменить их дробными частями, в то время как целые части будут в точности числами n и n' в формуле (4.6): $n = [b]$, $n' = [b']$.

Остается найти числа $b, b' \in \mathbb{R}$. Пусть

$$t - t_0 = t_1 + t_2i, \quad l\omega = \Omega_1 + \Omega_2i, \quad l\omega' = \Omega'_1 + \Omega'_2i$$

тогда b, b' – решение системы линейных уравнений

$$2\Omega_1b + 2\Omega'_1b' = t_1, \quad 2\Omega_2b + 2\Omega'_2b' = t_2$$

которая однозначно разрешима, поскольку векторы $l\omega, l\omega'$ линейно независимы в $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.
2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
3. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 300 с.
5. Герасимов И.А. Функции Вейерштрасса и их приложения в механике и астрономии. М.: Изд-во МГУ, 1990. 151 с.

Сергиев Посад

Поступила в редакцию
17.III.1993