УДК 531.36:62–50

© 1993 г. **Т.Б. Копейкина, О.Б. Цехан**

НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Для линейных стационарных сингулярно возмущенных систем (ЛССВС) дифференциальных уравнений с помощью метода пространства состояний исследуются задачи полной, x-,y-относительной наблюдаемости. Получены критерии, необходимые, достаточные условия наблюдаемости рангового типа в терминах решений определяющих уравнений – алгебраических матричных рекуррентных уравнений. Установлены принципы двойственности между ЛССВС наблюдения и системами управления с разномасштабными коэффициентами, ЛССВС наблюдения и ЛССВС управления, определяющими уравнениями для систем наблюдения и управления. Приведен пример.

1. Постановка задачи. Определения. Пусть поведение некоторого движущегося объекта описывается линейной стационарной сингулярно возмущенной системой (ЛССВС) дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = A_1x(t) + A_2y(t) \\
&\mu\dot{y}(t) = A_3x(t) + A_4y(t), \quad t \geqslant t_0 \\
&x \in R^{n_1}, \quad y \in R^{n_2}, \quad 0 < \mu \leqslant \mu^0 \ll 1
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где μ – малый положительный параметр, A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ – постоянные матрицы соответствующих размерностей. Физически μ представляет собой все малые параметры, при которых размерность пространства состояний Ω системы (1.1) равна $n_1 + n_2$: $\Omega \subset R^{n_1+n_2}$, $\Omega \triangleq \{\mathrm{col}(x, y)\colon\ x \in R^{n_1},\ y \in R^{n_2}\}$. При $\mu = 0$ переменная y перестает быть вектором состояния и размерность системы (1.1) понижается до n_1.

Предположим, что в результате реализовавшихся начального состояния $\{x(t_0), y(t_0)\}$ и параметров $\mu \in (0, \mu^0]$ начался переходный процесс $x(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ системы (1.1). Предположим также, что ни начальное состояние $\{x(t_0), y(t_0)\}$, ни траектория $\{x(t, \mu), y(t, \mu)\}$ не доступны непосредственному измерению. На отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ наблюдатель имеет возможность замерять выходную вектор-функцию $w(t)$ измерительного устройства, действующего по правилу

$$
\begin{aligned}
&w(t) = D_1x(t,\mu) + D_2y(t,\mu), \quad t \in T \\
&\mu \in (0, \mu^0], \quad w \in R^{n_3}, \quad n_3 \leqslant n_1 + n_2
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

причем при $n_3 = n_1 + n_2$ $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$-матрица $\| D_1, D_2 \|$ вырождена.

Систему наблюдения (1.1) с выходной функцией (1.2) назовем ЛССВС наблюдения (ЛССВСН).

Задача полной (x-, y-относительной) наблюдаемости. Для заданной ЛССВСН (1.1), (1.2) найти условия, при которых по измерениям $w(t)$, $t \in T$ можно однозначно восстановить начальное состояние $\{x(t_0), y(t_0)\}$ (компоненту $x(t_0)$, компоненту $y(t_0)$ начального состояния $\{x(t_0), y(t_0)\}$) системы (1.1), породившее при реализации $\mu \in (0, \mu_0]$ данный выход (1.2).

Определение 1. ЛССВС (1.1) вполне (x-, y-относительно) наблюдаема по выходу (1.2) на $T = [t_0, t_1]$, если задача полной (x-, y-относительной) наблюдаемости разрешима для любого начального состояния $\{x(t_0), y(t_0)\} \in R^{n_1+n_2}$, $\mu \in (0, \mu^0]$.

Цель работы – найти условия наблюдаемости ЛССВСН (1.1), (1.2), выраженные непосредственно через матрицы A_i ($i = 1, 2, 3, 4$), D_j ($j = 1, 2$) системы.

2. Определяющие уравнения системы наблюдения. Для формулировки условий наблюдаемости ЛССВСН (1.1), (1.2) введем $n_1 \times (n_1 + n_2)$-матрицы X_k^i, $n_2 \times (n_1 + n_2)$-матрицы Y_k^i, $n_3 \times (n_1 + n_2)$-матрицы W_k^i $(i, k = 0, 1, 2, \ldots)$ вида

$$\begin{aligned} &X_k^i \triangleq \| X_{kj}^i,\ j = 1,2 \|, \quad X_{k1}^i \in R^{n_1 \times n_1}, \quad X_{k2}^i \in R^{n_1 \times n_2} \\ &Y_k^i \triangleq \| Y_{kj}^i,\ j = 1,2 \|, \quad Y_{k1}^i \in R^{n_2 \times n_1}, \quad Y_{k2}^i \in R^{n_2 \times n_2} \\ &W_k^i \triangleq \| W_{kj}^i,\ j = 1,2 \|, \quad W_{k1}^i \in R^{n_3 \times n_1}, \quad W_{k2}^i \in R^{n_3 \times n_2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь наличие индекса j ($j = 1, 2$) у матриц X_{kj}^i, Y_{kj}^i, W_{kj}^i связано с разномасштабностью переменных x, y в системе (1.1), (1.2) и указывает на наличие движений с двумя существенно различными скоростями $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$.

Установим соответствие между вектор-функциями $x(t)$, $y(t)$, $w(t)$ и матрицами X_k^i, Y_k^i, W_k^i по правилу:

$$\begin{aligned} &x \to X_k^i, \quad \dot{x} \to X_{k+1}^i \\ &y \to Y_k^i, \quad \mu\dot{y} \to Y_{k+1}^{i+1}, \quad w \to W_k^i \end{aligned} \tag{2.2}$$

где индекс $k + j$ ($j = 0, 1$) у матриц X_{k+j}^{i+l}, Y_{k+j}^{i+l}, W_{k+j}^{i+l} соответствует j-й производной векторов x, y, w, а индекс $i + l$ ($l = 0, 1$) – l-й степени множителя μ при производных $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$. Тогда в силу (2.2) системе дифференциальных уравнений (1.1) соответствует алгебраическая система матричных рекуррентных по i, k уравнений

$$\begin{aligned} &X_{k+1}^i = A_1 X_k^i + A_2 Y_k^i \\ &Y_{k+1}^{i+1} = A_3 X_k^i + A_4 Y_k^i, \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad i = 0,1,2,\ldots, \quad k-1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

а выходу (1.2) – алгебраическое матричное рекуррентное по i, k уравнение

$$W_k^i = D_1 X_k^i + D_2 Y_k^i, \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad i = 0,1,2,\ldots, \quad k-1 \tag{2.4}$$

Для однозначной разрешимости (2.3), (2.4) положим

$$\begin{aligned} &X_0^0 = \| E_{n_1}, 0_{n_1 \times n_2} \|, \quad X_k^i = 0_{n_1 \times (n_1 + n_2)}, \quad i > k, \quad k = 0,1,2,\ldots; \quad i < 0 \vee k < 0 \\ &Y_0^0 = \| 0_{n_2 \times n_1}, E_{n_2} \|, \quad Y_k^i = 0_{n_2 \times (n_1 + n_2)}, \quad i \geqslant k+1, \quad k = 0,1,2,\ldots; \quad i \leqslant 0 \vee k < 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

По аналогии с [1] назовем рекуррентные уравнения (2.3), (2.4) определяющими уравнениями ЛССВСН (1.1), (1.2), а матрицы X_{kj}^i, Y_{kj}^i, W_{kj}^i $(k=0,1,2,\ldots;$ $i=0,1,2,\ldots,k-1;$ $j=1,2)$, вычисленные по (2.3), (2.4) с начальными условиями (2.5) – компонентами решений $\{X_k^i,\ Y_k^i,\ W_k^i\}$ $(k=0,1,2,\ldots,$ $i=0,1,2,\ldots,k-1)$ определяющих уравнений ЛССВСН (2.3)–(2.5).

Введение определяющих уравнений ЛССВСН (2.3), (2.4) дает возможность перейти от исследования дифференциальной системы (1.1) с выходом (1.2) к алгебраическим матричным уравнениям (2.3), (2.4) и получить эффективные условия наблюдаемости ЛССВСН (1.1), (1.2), выраженные через параметры A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, D_j $(j = 1, 2)$ этой системы.

Приведем еще один вид определяющих уравнений, связанных с (2.3), использование которых позволит получить другие алгебраические условия наблюдаемости, обладающие, как будет показано далее, некоторыми преимуществами по сравнению с (2.3), (2.4).

Для этого представим ЛССВСН (1.1), (1.2) в пространстве состояний $\Omega \subset R^{n_1+n_2}$ в виде системы

$$\dot{z}(t) = A(\mu)z(t), \quad z \in R^{n_1+n_2} \tag{2.6}$$

$$w(t) = Dz(t), \quad w \in R^{n_3}, \quad t \in T, \quad \mu \in (0, \mu^0] \tag{2.7}$$

сингулярно при $\mu \to 0$ зависящей от параметра μ. В (2.6), (2.7) –

$$D \triangleq \| D_1, D_2 \|, \quad z \in \Omega, \quad z(t) \triangleq \begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Vmatrix}, \quad A(\mu) \triangleq \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3/\mu & A_4/\mu \end{Vmatrix} \tag{2.8}$$

Введем матрицы $H_x \triangleq \| E_{n_1}, 0_{n_1 \times n_2} \|$, $H_y \triangleq \| 0_{n_2 \times n_1}, E_{n_2} \|$. Тогда, очевидно, задача полной (x-, y-относительной) наблюдаемости ЛССВСН (1.1), (1.2) равносильна задаче полной (H_x-, H_y-относительной) наблюдаемости системы (2.6) по выходу (2.7). По аналогии с [1] определяющее уравнение для системы (2.6), (2.7) для любого $\mu \in (0, \mu_0]$ имеет вид

$$Z_{k+1} = A(\mu)Z_k, \quad Z_0 = E_{n_1+n_2}, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{2.9}$$

$$W_k = DZ_k, \quad Z_k \in R^{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}, \quad W_k \in R^{n_3 \times (n_1+n_2)} \tag{2.10}$$

Лемма 1. Решения Z_k определяющего уравнения (2.9) при каждом k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, связаны с решениями X_k^i, Y_k^i определяющих уравнений (2.3) соотношением

$$Z_k = \begin{Vmatrix} \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^{m-k} X_k^{k-m} \\ \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^{m-k} Y_k^{k-m} \end{Vmatrix}, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{2.11}$$

Доказательство проводится методом математической индукции при учете соотношений $X_{l+1}^{l+1} = 0$, $Y_{l+1}^{0} = 0$, следующих из (2.5).

Лемма 2. Для каждого k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ матрицы W_k из (2.10) и W_k^i из (2.4) связаны соотношением

$$W_k = \sum_{m=0}^{k} \mu^{m-k} W_k^{k-m} \tag{2.12}$$

Доказательство проводится методом математической индукции по k при учете формул (2.10), (2.4) и леммы 1.

3. Сопряженные системы управления и их определяющие уравнения. Наряду с системой наблюдения (2.6), (2.7), сингулярно при $\mu \to 0$ зависящей от параметра μ, рассмотрим сопряженную к ней систему управления

$$\dot{z}(t) = -A'(\mu)z(t) + D'u(t), \quad t \in T \tag{3.1}$$

которая согласно (2.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -A_1'x(t) - (A_3' / \mu)y(t) + D_1'u(t) \\ \dot{y}(t) &= -A_2'x(t) - (A_4' / \mu)y(t) + D_2'u(t), \quad t \in T \end{aligned} \tag{3.2}$$

и является системой управления с разномасштабными коэффициентами: "малыми" $-A_1'$, $-A_2'$ и "большими" $-A_3'/\mu$, $-A_4'/\mu$. Очевидно, что система управления (3.2) является сопряженной к системе наблюдения (1.1), (1.2).

Введем матрицы $X_k^{(c)i} \in R^{n_1 \times n_3}$, $Y_k^{(c)i} \in R^{n_2 \times n_3}$ $(i, k = 0,1,2\ldots)$ и установим соответствие между вектор-функциями $x(t)$, $y(t)$ и матрицами $X_k^{(c)i}$, $Y_k^{(c)i}$ по правилу

$$\begin{aligned} & x \to X_k^{(c)i}, \quad \dot{x} \to X_{k+1}^{(c)i} \\ & \mu^{-1}y \to Y_k^{(c)i-1}, \quad \dot{y} \to Y_{k+1}^{(c)i} \end{aligned} \tag{3.3}$$

где индекс $k+j$ $(j = 0, 1)$ у матриц $X_{k+j}^{(c)i+l}$, $Y_{k+j}^{(c)i+l}$ соответствует j-й производной векторов $x(t)$, $y(t)$, а индекс $i+l$ $(l = -1, 0)$ – l-й степени множителя μ при переменных $x(t)$, $y(t)$ (ср. с (2.2)). Тогда в силу (3.3) системе дифференциальных уравнений (3.2) соответствует алгебраическая система рекуррентных по i, k матричных уравнений

$$\begin{aligned} X_{k+1}^{(c)i} &= -A_1'X_k^{(c)i} - A_3'Y_k^{(c)i-1} \\ Y_{k+1}^{(c)i} &= -A_2'X_k^{(c)i} - A_4'Y_k^{(c)i-1}, \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad i = 0,1,2,\ldots,k \end{aligned} \tag{3.4}$$

которую будем решать с начальными условиями

$$\begin{aligned} X_0^{(c)0} &= D_1', \quad X_k^{(c)i} = 0_{n_1 \times n_3}, \quad i < 0 \vee k < 0 \vee i < k \\ Y_0^{(c)0} &= D_2', \quad Y_k^{(c)i} = 0_{n_2 \times n_3}, \quad i < 0 \vee k < 0 \vee i > k \end{aligned} \tag{3.5}$$

Установим связь между уравнениями (2.3), (3.4) и их решениями. Для этого для каждой четверки индексов i, j, k, l введем $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$-матрицы

$$Z_{kl}^{ij} \triangleq \begin{Vmatrix} X_k^i \\ Y_l^j \end{Vmatrix}, \quad Z_{kl}^{ij} = \| z_{kln}^{ij}, \; n = 0,1,2,\ldots,n_1+n_2-1 \|$$

где X_k^i, Y_l^j – компоненты решений определяющих уравнений (2.3), (2.5), и $(n_1+n_2)\times n_3$ – матрицы

$$Z_{kl}^{(c)ij} \triangleq \begin{Vmatrix} X_k^{(c)-i} \\ Y_l^{(c)i} \end{Vmatrix}, \quad Z_{kl}^{(c)ij} = \| z_{kln}^{(c)ij}, \; n = 0,1,2,\ldots,n_1+n_2-1 \|$$

где $X_k^{(c)i}$, $Y_l^{(c)j}$ – компоненты решений определяющих уравнений (3.4), (3.5), а z_{kln}^{ij}, $z_{kln}^{(c)ij}$ – столбцы матриц Z_{kl}^{ij}, $Z_{kl}^{(c)ij}$ соответственно. Образуем множество

$$Z = \{z_{kln}^{ij}, z_{klm}^{(c)ij}, \; n = 0,1,2,\ldots, \; n_1+n_2-1; \; m = 0,1,2,\ldots, \; n_3-1; \; i,j,k,l = 0,1,2,\ldots\}$$

$$Z \subset R^{(n_1+n_2)\times\infty}$$

и определим линейный оператор L: $Z \to Z$, $L = E_{n_1+n_2} - A(\mu)\exp(-p_{jkl})$, где $p_{jkl} \triangleq \partial^3 / \partial_j \partial_k \partial_l$ – оператор дифференцирования, $\exp(-p_{jkl})$ – оператор сдвига индексов: $\exp(-p_{jkl}) z_{kl}^{ij} = z_{k-1,l-1}^{i,j-1}$. Тогда сопряженный к L оператор $L^*: Z \to Z$ имеет вид

$$L^* = E_{n_1+n_2} + A'(\mu)\exp(-p_{jkl}) \tag{3.6}$$

Очевидно, что определяющие уравнения (2.3) в операторной форме могут быть записаны как

$$L(Z_{k+1,k+1}^{i,i+1}) = 0_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)} \tag{3.7}$$

а определяющие уравнения (3.4) – в виде

$$L^*(Z_{k+1,k+1}^{(c)i,i}) = 0_{(n_1+n_2)\times n_3} \tag{3.8}$$

Сопоставляя уравнения (3.7) и (3.8), замечаем, что система (2.3) является сопряженной к системе (3.4), в силу чего рекуррентные уравнения (3.4) будем называть сопряженными определяющими уравнениями ЛССВСН (1.1), (1.2), а $X_k^{(c)i}$, $Y_k^{(c)i}$ $(i,k = 0,1,2,\ldots)$, вычисленные по (3.4), (3.5), – компонентами сопряженных определяющих уравнений (3.4), (3.5).

4. Наблюдаемость линейных стационарных сингулярно возмущенных систем. Сформулируем условия наблюдаемости ЛССВСН (1.1), (1.2) в терминах компонент решений определяющих уравнений (2.3)–(2.5). Для этого образуем $n_3(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)$-матрицы

$$Q^z(\mu) \triangleq \begin{Vmatrix} W_k \\ k = 0,1,2,\ldots,n_1+n_2-1 \end{Vmatrix}, \quad Q(\mu) \triangleq \begin{Vmatrix} \sum_{m=0}^{k} \mu^m W_k^{k-m} \\ k = 0,1,2,\ldots,n_1+n_2-1 \end{Vmatrix} \tag{4.1}$$

составленные соответственно из компонент решений определяющих уравнений (2.9), (2.10) и (2.3)–(2.5). Матрицу $Q(\mu)$ назовем матрицей наблюдаемости ЛССВСН (1.1) (1.2).

Лемма 3. Ранги матриц $Q^z(\mu)$ и $Q(\mu)$ связаны соотношением

$$\operatorname{rank} Q^z(\mu) = \operatorname{rank} Q(\mu), \quad \mu \in (0,\mu^0]$$

Доказательство очевидным образом следует из вида (4.1) матриц $Q^z(\mu)$, $Q(\mu)$ и леммы 2.

Теорема 1. Для того чтобы ЛССВС (1.1) была вполне наблюдаема по выходу (1.2), необходимо и достаточно, чтобы матрица наблюдаемости $Q(\mu)$ имела максимальный ранг:

$$\operatorname{rank} Q(\mu) = n_1 + n_2, \quad \mu \in (0, \mu^0] \tag{4.2}$$

Доказательство следует из представления ЛССВСН (1.1), (1.2) в виде (2.6), (2.7), использования при $\mu \in (0, \mu^0]$ критерия [1] $\operatorname{rank} Q^z(\mu) = n_1 + n_2$ полной наблюдаемости системы (2.6), (2.7) и леммы 3.

Замечания. 1°. Если ЛССВСН (1.1), (1.2) вполне наблюдаема для некоторого $\mu^* \in (0, \mu^0]$, то, очевидно, существует такое $\mu_* \leqslant \mu^*$, что (1 1), (1.2) вполне наблюдаема для $\mu \in (\mu_*, \mu^*]$

2°. Очевидно, что если равенство (4.2) справедливо для всех $\mu \in (0, \mu^0]$, то система (1.1) вполне наблюдаема по выходу (1.2) для всех $\mu \in (0, \mu^0]$.

Использование результата [2] об относительной наблюдаемости системы (2.6), (2.7) при $\mu \in (0, \mu^0]$ позволяет сформулировать

Следствие 1. Для x-относительной (y-относительной) наблюдаемости ЛССВСН (1.1), (1.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank} Q(\mu) = \operatorname{rank} \begin{Vmatrix} H_x \\ Q(\mu) \end{Vmatrix}, \quad H_x = \| E_{n_1}, 0_{n_1 \times n_2} \|, \quad \mu \in (0, \mu^0]$$

$$\left(\operatorname{rank} Q(\mu) = \operatorname{rank} \begin{Vmatrix} H_y \\ Q(\mu) \end{Vmatrix}, \quad H_y = \| 0_{n_2 \times n_1}, E_{n_2} \| \right)$$

Для формулировки следующей теоремы воспользуемся леммой, полное доказательство которой приведено в[1].

Лемма 4. Пусть заданы $(n \times l)$-матрицы M_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n \leqslant l$) и число k ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Тогда если существует m ($0 \leqslant m \leqslant k$), для которого $\operatorname{rank} M_m = n$, то найдется $\mu_k > 0$, такое, что для всех $\mu \in (0, \mu_k]$

$$\operatorname{rank} \sum_{i=0}^{k} \mu^i M_i = n$$

Введем $n_3(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)$-матрицу P, $n_3(n_1+n_2) \times n_1$-матрицу $Q_1(\mu)$, $n_3(n_1 + + n_2) \times n_2$ матрицу $Q_2(\mu)$:

$$P \triangleq \begin{Vmatrix} W_{k1}^{k-m+l_1} & W_{k2}^{k-m+l_2} \\ k = 0,1,2, \ldots, & n_1+n_2-1 \end{Vmatrix}, \quad Q_1(\mu) \triangleq \begin{Vmatrix} \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m W_{k1}^{k-m} \\ k = 0,1,2, \ldots, \ n_1+n_2-1 \end{Vmatrix}$$

$$Q_2(\mu) \triangleq \begin{Vmatrix} \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m W_{k2}^{k-m} \\ k = 0,1,2, \ldots, \ n_1+n_2-1 \end{Vmatrix}$$

Применение к теореме 1, следствию 1 свойства сохранения ранга матриц при

---

[1] *Копейкина Т.Б., Манцевич О.Б.* Об управляемости одного типа линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием. Вырожденные системы: Препринт № 24(474). Минск, Ин-т математики АН Беларуси. 1991. 32 с.

умножении строк и столбцов на ненулевое число, а также леммы 4 позволяет сформулировать достаточные условия наблюдаемости ЛССВСН (1.1), (1.2), не содержащие параметра μ.

Теорема 2. Если при некоторых l_1, l_2 $(l_i = 0,1,2,\ldots,n_1+n_2-1,\ i=1,2)$ существует m $(m=0,1,2,\ldots,\ n_1+n_2+\max(l_1,l_2)-1)$, для которого выполнено условие

$$\operatorname{rank} P = n_1+n_2$$

$$\left(\operatorname{rank} P = \operatorname{rank}\begin{Vmatrix} H_x \\ P \end{Vmatrix},\ \operatorname{rank} P = \operatorname{rank}\begin{Vmatrix} H_y \\ P \end{Vmatrix}\right)$$

то найдется $\mu^* > 0$, такое, что ЛССВСН (1.1), (1.2) вполне (x-, y-относительно) наблюдаема для всех $\mu \in (0, \mu^*]$.

Из теоремы 1 и следствия 1 вытекает

Теорема 3. Для того чтобы ЛССВСН (1.1), (1.2) была вполне (x-, y-относительно) наблюдаема, необходимо, чтобы

$$\operatorname{rank} Q_1(\mu) = n_1,\ \operatorname{rank} Q_2(\mu) = n_2,\ \mu \in (0,\mu^0]$$

$$(\operatorname{rank} Q_1(\mu) = n_1,\ \operatorname{rank} Q_2(\mu) = n_2)$$

При реализации проверки условий наблюдаемости ЛССВСН (1.1), (1.2) на ЭВМ экономичнее использовать другие условия, позволяющие уменьшить затраты ресурсов ЭВМ. Для этой цели приведем условия наблюдаемости ЛССВСН (1.1), (1.2) в терминах решений определяющих уравнений (3.4), (3.5).

Введем $n_3(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)$-матрицу

$$Q^{(c)}(\mu) \triangleq \begin{Vmatrix} \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m (X_k^{(c)k-m})',\ \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m (Y_k^{(c)k-m})' \\ k=0,1,2,\ \ldots,\ n_1+n_2-1 \end{Vmatrix} \tag{4.3}$$

где $X_k^{(c)i}$, $Y_k^{(c)i}$ – решения определяющих уравнений (3.4), (3.5). Матрицу $Q^{(c)}(\mu)$, так же, как и матрицу $Q(\mu)$ (4.1), назовем матрицей наблюдаемости ЛССВСН (1.1), (1.2), поскольку $Q^{(c)}(\mu)$ является транспонированной к матрице управляемости $(Q^{(c)}(\mu))'$ сопряженной к (1.1), (1.2) системы управления (3.2).

Теорема 4. Для того чтобы ЛССВС (1.1) была вполне (x-, y-относительно) наблюдаема по выходу (1.2), необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank} Q^{(c)}(\mu) = n_1+n_2,\quad \mu \in (0,\mu^0] \tag{4.4}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 с использованием критерия [2] относительной наблюдаемости для систем (2.6), (2.7) при $\mu \in (0, \mu^0]$, а также формул (2.8), (3.4), (3.5), (4.3), и здесь опускается.

Достаточные и необходимые условия наблюдаемости ЛССВСН (1.1), (1.2), выраженные в терминах решений определяющих уравнений (3.4), (3.5), дословно повторяют формулировки теорем 2 и 3 с заменой $\|W_{k1}^i,\ W_{k2}^i\|$ на $\|(X_k^{(c)i},\ (Y_k^{(c)i})'\|$ соответственно.

Отметим, что для проверки условий наблюдаемости (4.2), сформулированных в терминах компонент W_k^i решений определяющих уравнений (2.3), (2.4), (2.5), требуется просчитать $(n_1 + n_2 - 1)$ раза уравнение (2.3) и $(n_1 + n_2)$ раза уравнение

(2.4), для чего необходимо выполнить

$$\left[\frac{1+(n_1+n_2)}{2}(n_1+n_2+n_3)-1\right](n_1+n_2)^2(2n_1+2n_2-1)$$

операций умножения и сложения. Для проверки условий (4.4) теоремы 4 в терминах решений $X_k^{(c)i}$, $Y_k^{(c)i}$ определяющих уравнений (3.4), (3.5) необходимо $(n_1 + n_2)$ раза просчитать два уравнения (3.4), т.е. выполнить

$$\left[\frac{1+(n_1+n_2)}{2}(n_1+n_2)-1\right]n_3(n_1+n_2)(2n_1+2n_2-1)$$

операций умножения и сложения, что в силу предположения $n_3 \leq n_1+n_2$ позволяет значительно (при больших n_1 и n_2) уменьшить затраты машинного времени и объемов памяти ЭВМ при исследовании наблюдаемости ЛССВСН (1.1), (1.2) с помощью ЭВМ.

5. Двойственность сингулярных систем наблюдения и управления. Наряду с ЛССВСН (1.1), (1.2) рассмотрим сопряженную ей систему управления (3.2) с разномасштабными коэффициентами с начальными условиями

$$x(t_0)=x_0, \quad y(t_0)=y_0, \quad x_0 \in R^{n_1}, \quad y_0 \in R^{n_2} \tag{5.1}$$

Пусть на $T=[t_0,t_1]$ задан класс $U(t)$ непрерывных n_3-вектор-функций $u(t)$, называемых далее допустимыми управлениями: $u(t) \in U(t)$.

Задача полной (x-, y-относительной) управляемости. Определить условия, при которых для любых $(n_1 + n_2)$-векторов (x_0,y_0), (x_1,y_1) и $\mu \in (0,\mu^0]$ существует допустимое управление $u(t)$ такое, что соответствующее им решение $\{x(t, \mu), y(t, \mu)\}$, $t \in T$ (компонента $x(t, \mu)$, компонента $y(t, \mu)$ решения) системы (3.2), (5.1) удовлетворяет условию $x(t_1,\mu)=x_1$, $y(t_1,\mu)=y_1$ $(x(t_1,\mu)=x_1$, $y(t_1,\mu)=y_1)$.

Определение 2. Система (3.2), (5.1) вполне (x-, y-относительно) управляема на T, если соответствующая задача управляемости имеет решение для любых $(x_0,y_0) \in R^{n_1+n_2}$, $(x_1,y_1) \in R^{n_1+n_2}$, $\mu \in (0,\mu^0]$

Теорема 5 (*Первый принцип двойственности.*) ЛССВСН (1.1), (1.2) вполне наблюдаема в том и только в том случае, если линейная стационарная система с разномасштабными коэффициентами (3.2), (5.1) вполне управляема на T.

Доказательство непосредственно следует из представления системы наблюдения (1.1), (1.2) в виде (2.6), (2.7), системы управления (3.2) в виде (3.1) и известного принципа двойственности [3] полученных линейных стационарных систем при $\mu \in (0, \mu^0]$.

Из теорем 1, 4, 5 очевидным образом вытекает

Следствие 2. Если выполнены условия

$$\operatorname{rank}\left\| \begin{matrix} \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m (W_{k1}^{k-m})' \\ \\ \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m (W_{k2}^{k-m})' \end{matrix} \quad k=0,1,2,\ldots,n_1+n_2-1 \right\| = n_1+n_2, \quad \mu \in (0,\mu^0]$$

или

$$\operatorname{rank}\left\|\begin{matrix}\sum\limits_{m=0}^{k}\mu^m X_k^{(c)k-m} \\ \\ \sum\limits_{m=0}^{k}\mu^m Y_k^{(c)k-m}\end{matrix}\quad k=0,1,2,\ldots,n_1+n_2-1\right\|=n_1+n_2,\quad \mu\in(0,\mu^0]$$

то система (3.2), (5.1) вполне управляема на T.

Установим еще один принцип двойственности свойств управляемости и наблюдаемости ЛССВС. Для этого наряду с ЛССВСН (1.1), (1.2) рассмотрим ЛССВС управления (ЛССВСУ)

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=-A_1'x(t)-A_3'y(t)+D_1'u(t),\quad x\in R^{n_1},\quad y\in R^{n_2},\\ &\mu\dot{y}(t)=-A_2'x(t)-A_4'y(t)+D_2'u(t),\quad u\in R^{n_3},\quad t\in T,\quad \mu\in(0,\mu^0]\end{aligned}\tag{5.2}$$

с начальными условиями (5.1). Пусть для системы (5.2), (5.1) так же, как и для системы (3.2), (5.1), поставлены задачи полной (x-, y-относительной) управляемости. Для формулировки условий управляемости системы (5.2), (5.1) определим матрицы $X_{(c)k}^i\in R^{n_1\times n_2}$, $Y_{(c)k}^i\in R^{n_2\times n_3}$ $(i,k=0,1,2,\ldots)$ и установим соответствие между вектор-функциями $x(t)$, $y(t)$ и матрицами $X_{(c)k}^i$, $Y_{(c)k}^i$ по правилу (2.2). Тогда системе дифференциальных уравнений (5.2) в силу (2.2) соответствует алгебраическая система рекуррентных по i, k матричных уравнений

$$\begin{aligned}&X_{(c)k+1}^i=-A_1'X_{(c)k}^i-A_3'Y_{(c)k}^i\\ &Y_{(c)k+1}^{i+1}=-A_2'X_{(c)k}^i-A_4'Y_{(c)k}^i,\quad i,k=0,1,2,\ldots\end{aligned}\tag{5.3}$$

которую будем решать с начальными условиями

$$\begin{aligned}&X_{(c)0}^0=D_1',\quad X_{(c)k}^i=0_{n_1\times n_3},\quad i>k\vee(i<0)\vee(k<0)\\ &Y_{(c)0}^0=D_2',\quad Y_{(c)k}^i=0_{n_2\times n_3},\quad i>(k+1)\vee(i\leqslant 0)\vee(k=0)\end{aligned}\tag{5.4}$$

Систему рекуррентных уравнений (5.3) назовем определяющими уравнениями ЛССВСУ (5.2), (5.1), а $X_{(c)k}^i$, $Y_{(c)k}^i$ $(i,k=0,1,2,\ldots)$, вычисленные по (5.3), (5.4), — решениями определяющих уравнений (5.3), (5.1). Поскольку система (5.3) может быть записана с помощью сопряженного оператора (3.6) в виде

$$L^*(Z_{(c)k+1,k+1}^{i,i+1})=0_{(n_1+n_2)\times n_3},\quad Z_{(c)kl}^{ij}\triangleq\left\|\begin{matrix}X_{(c)k}^i\\ Y_{(c)l}^j\end{matrix}\right\|$$

то определяющие уравнения (5.3) ЛССВСУ (5.2) являются сопряженными к определяющим уравнениям (2.3) ЛССВСН (1.1).

Установим связь между решениями $X_{(c)k}^i$, $Y_{(c)k}^i$ (5.3) и решениями $X_k^{(c)i}$, $Y_k^{(c)i}$ (3.4).

Лемма 5. При каждом i, k (i, k = 0, 1, 2,...) решения $X_{(c)k}^i$, $Y_{(c)k}^i$ определяющих уравнений (5.3), (5.4) связаны с решениями $X_k^{(c)i}$, $Y_k^{(c)i}$ определяющих уравнений (3.4), (3.5) соотношениями $X_{(c)k}^{i} = X_k^{(c)i}$, $Y_{(c)k}^{i+1} = Y_k^{(c)i}$.

Доказательство следует из сопоставления вида определяющих уравнений (5.3) и (3.4).

Теорема 6 (*Второй принцип двойственности*). ЛССВСН (1.1), (1.2) вполне наблюдаема тогда и только тогда, когда ЛССВСУ (5.2), (5.1) вполне управляема на T.

Доказательство. В силу критерия [4]

$$\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m X_{(c)k}^{k-m} & \\ & k=0,1,2,\dots,n_1+n_2-1 \\ \sum\limits_{m=0}^{k} \mu^m Y_{(c)k}^{k-m+1} & \end{Vmatrix} = n_1+n_2, \quad \mu\in(0,\mu^0] \tag{5.5}$$

полной управляемости ЛССВСУ (5.2), леммы 5 и свойства матриц не изменять ранг при транспонировании следует, что условие (5.5) равносильно условию (4.4) теоремы 4. Теорема доказана.

Следствие 3. Линейная стационарная система с разномасштабными коэффициентами (3.2) вполне управляема на T тогда и только тогда, когда этим свойством обладает ЛССВСУ (5.2).

Другими словами, системы (3.2) и (5.2) эквивалентны в смысле свойства управляемости.

6. Пример. Для линейной стационарной сингулярно возмущенной модели вращения упругого звена электромеханического манипуляционного робота [5]

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \mu\dot{y}(t) = -y(t)+u(t), \quad \mu\in(0,\mu^0], \quad x\in R, \quad y\in R, \quad u\in R \tag{6.1}$$

рассмотрим задачу наблюдения по измерению выходной функции

$$w(t) = ax(t)+by(t), \quad w\in R, \quad t\in T=[t_0,t_1] \tag{6.2}$$

где a и b – некоторые параметры, u заданное управление, $\|u\|\le 1$.

Задача. Определить, при каких значениях параметров a и b ЛССВС (6.1) вполне наблюдаема по выходу (6.2).

Представим систему (6.1) в виде (1.1), где $n_1=n_2=n_3=1$, $A_1=0$, $A_2=1$, $A_3=0$, $A_4=-1$, $B_1=0$, $B_2=1$, $D_1=a$, $D_2=b$.
Используя вид (2.3) определяющих уравнений, имеем

$$X_0^0=\|1,0\|, \quad X_1^0=\|0,1\|, \quad X_1^1=\|0,0\|$$

$$Y_0^0=\|0,1\|, \quad Y_1^0=\|0,0\|, \quad Y_1^1=\|0,-1\|$$

$$W_0^0=\|a,b\|, \quad W_1^0=\|0,a\|, \quad W_1^1=\|0,-b\|$$

Тогда матрица наблюдаемости $Q(\mu)$ из (4.1) для системы (6.1), (6.2) имеет вид

$$Q(\mu)=\begin{Vmatrix} W_0^0 \\ W_1^1+\mu W_1^0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & -b+\mu a \end{Vmatrix}$$

откуда в силу теоремы 1 следует, что при $a \neq 0$, $b \neq 0$ всех $\mu \in (0, b/a - \varepsilon)$, где ε – любое число, $\varepsilon \ll 1$, или при $a \neq 0$, $b = 0$ и любых $\mu \in (0, \mu^0]$ имеем $\operatorname{rank} Q(\mu) = 2$, т.е. ЛССВСН (6.1), (6.2) вполне наблюдаема на T. При $a = 0$, $b \neq 0$ система не является вполне наблюдаемой, однако при $l_1 = 0$, $l_2 = 1$, $m = 0$ в силу теоремы 2 она y-относительно наблюдаема для всех $\mu \in (0, \mu^0]$, так как в этом случае $W_{01}^0 = 0$, $W_{02}^1 = 0$, $W_{11}^0 = 0$, $W_{12}^1 = -b$ и

$$\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{Vmatrix} = \operatorname{rank}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -b \end{Vmatrix} = 1$$

7. Заключение. В данной работе для исследования наблюдаемости ЛССВС (1.1), (1.2) предложен метод пространства состояний, восходящий к методу Калмана [3] и не требующий ни построения асимптотического разложения решений системы (1.1) в ряд по малому параметру μ [6], ни традиционного требования $\det A_4 \neq 0$. Данный метод носит глобальный по параметру μ характер и дает возможность получить эффективный критерий наблюдаемости ЛССВС (1.1), (1.2), выраженный в терминах решений определяющих уравнений системы наблюдения (1.1), (1.2). Последние представляют собой систему рекуррентных матричных алгебраических уравнений, по определенному правилу построенную по исходной системе наблюдения (1.1), (1.2). Сингулярность природы исследуемой системы (1.1) позволяет сформулировать достаточные условия наблюдаемости (теорема 2), не содержащие малого параметра μ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М.* Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ, 1973. 248 с.
2. *Габасов Р.Ф., Жевняк Р.М., Кириллова Ф.М., Копейкина Т.Б.* Относительная наблюдаемость линейных систем. I. Обыкновенные системы // Автоматика и телемеханика. 1972. № 8. С. 5–15.
3. *Калман Р.* Об общей теории систем управления // Тр. 1-го конгр. ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 2. С. 521–547.
4. *Копейкина Т.Б., Цехан О.Б.* Об управляемости линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем в пространстве состояний // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 3. С. 40–46.
5. *Акуленко Л.Д., Михайлов С.А.* Синтез управления вращениями упругого звена электромеханического манипуляционного робота // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 4. С. 33–41.
6. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

Минск

Поступила в редакцию
11.III.1992