

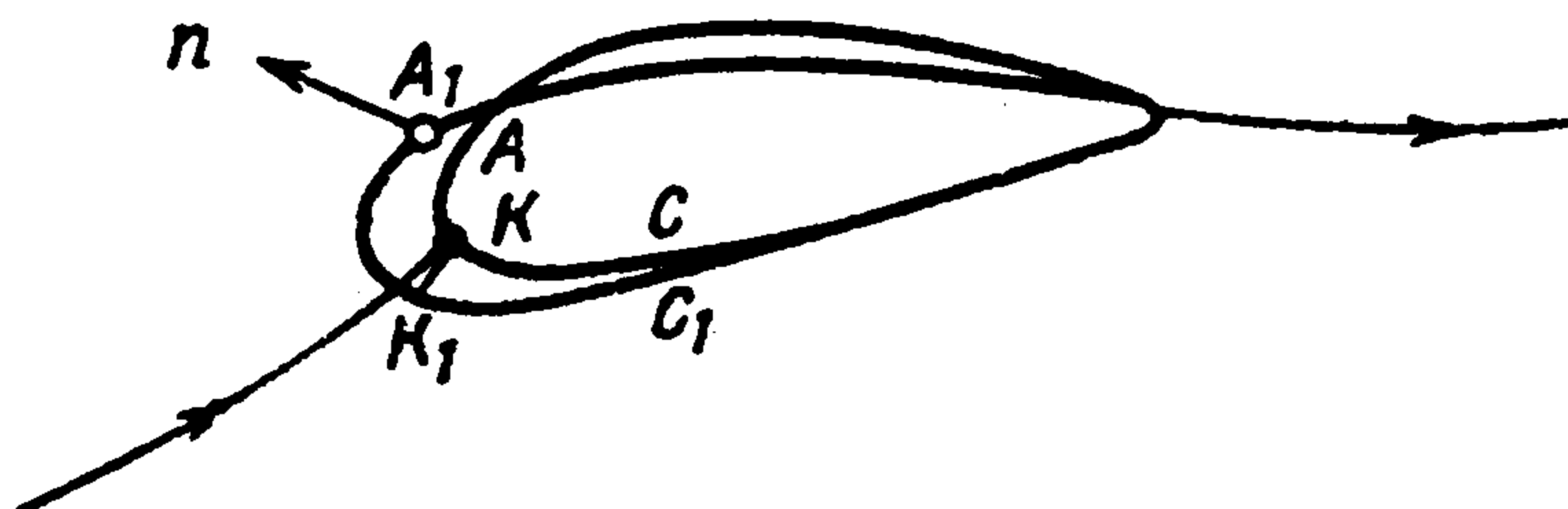
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛОЙ ВАРИАЦИИ КОНТУРА ПРОФИЛЯ

Получена в исправленном виде формула для расчета поля течения несжимаемой жидкости на профиле, близком к заданному.

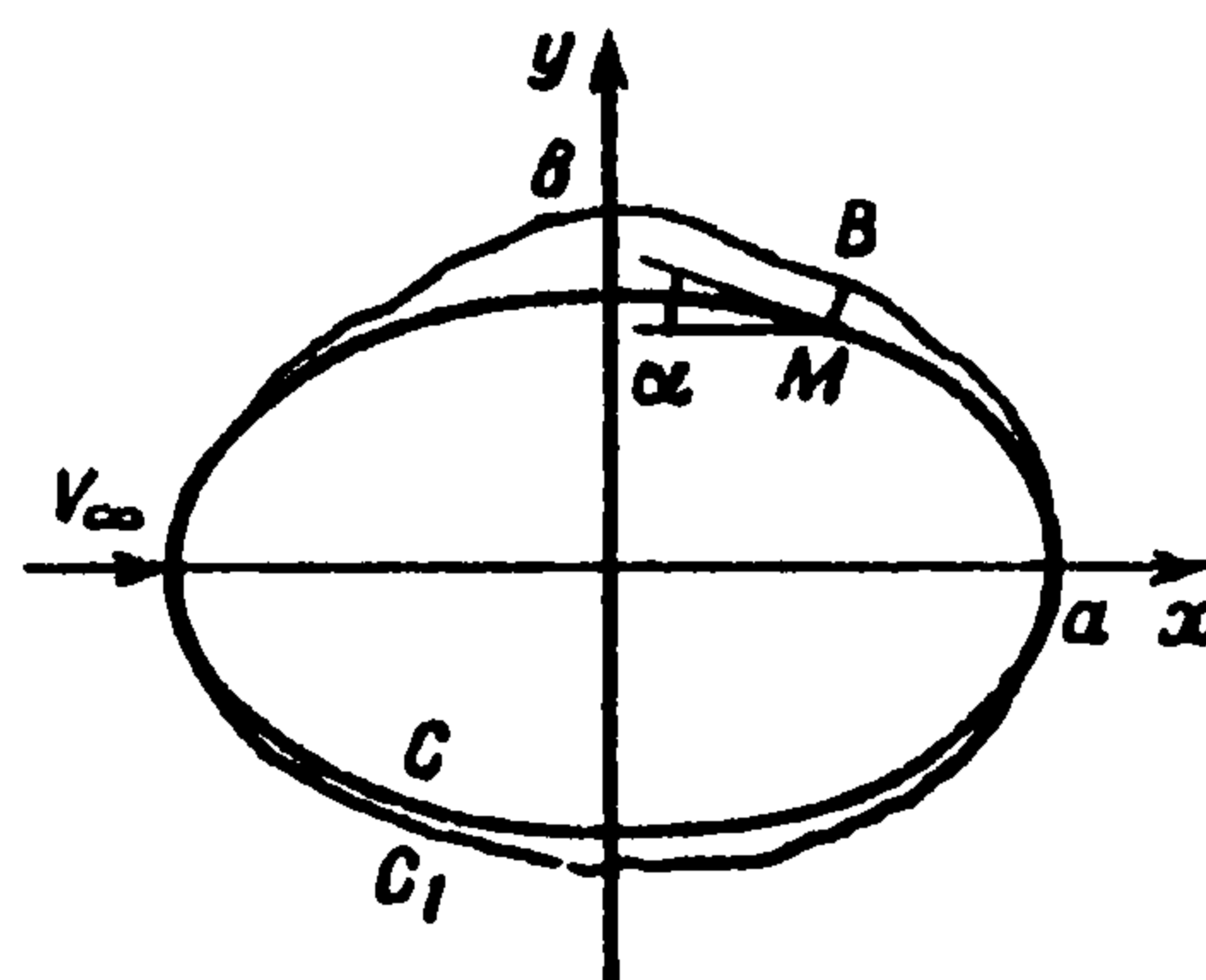
Пусть известно обтекание некоторого профиля C , тогда для расчета течения на близком профиле C_1 (фиг. 1) получена удобная формула [1], приведенная во всех изданиях монографии [2] (с. 395). Одно исправление в выводе указанной формулы было указано [3]. Однако этим не исчерпываются погрешности вывода. Ниже приводится дополнительное исправление формулы распределения скорости на контуре, близком к заданному профилю.

Зададим [2] конформное отображение внешности профиля C на внешность единичного круга ($|\zeta| > 1$) функцией

$$\zeta = F(z, C), \quad F(\infty, C) = \infty \quad (1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Функция (1) определяет соответствие точек C и точек окружности $\zeta = e^{i\theta}$ ($s = s(\theta)$, s – длина дуги вдоль профиля C). Обозначим через $n(s)$ длину отрезка внешней нормали n к контуру C . При отображении (1) линия C_1 перейдет в линию C_1^* , уравнение которой с точностью до членов второго порядка малости относительно $|n(s)|$ в полярных координатах имеет вид

$$\rho = 1 + n[s(\theta)]d\theta / ds = 1 + \delta(\theta) \quad (2)$$

Отклонение $\delta = \delta(\theta)$ кривой C_1^* от окружности единичного радиуса считаем малым, так что $|\delta| < \epsilon$, $|\delta'| < \epsilon$ и $|\delta''| < \epsilon$, ϵ – малая величина.

Отображение внешности C_1 на внешность единичного круга $|w| < 1$ можно представить суперпозицией

$$w = F_1(z, C_1) = F_2[F(z, C_1), C_1^*] \quad (3)$$

где $w = F_2(\zeta, C_1^*)$ – отображение внешности C_1^* на $|w| > 1$. Дифференцируя формулу (3), получим

$$|F_1'(z, C_1)| = |F_2'(\zeta, C_1^*)| |F_1'(z, C_1)| \quad (4)$$

Первый сомножитель в правой части определяется из теории конформных отображений близких областей [2] и при учете поправки [3] имеет вид

$$|F_2'(\zeta, C_1^*)| \approx 1 - \delta(\theta) - \gamma(\theta), \quad \gamma(\theta) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\delta(t) - \delta(\theta)] \sin^{-2} \frac{t-\theta}{2} dt \quad (5)$$

Второй сомножитель в правой части (4) можно определить, разлагая функцию $F'(z, C_1)$ и ряд Тейлора в окрестности точки z контура C с точностью до членов второго порядка малости

$$F'(z, C_1) = F'(z, C) + F''(z, C)\Delta z + \dots \quad (6)$$

Δz – расстояние между точками на контурах C и C_1 , лежащих на нормали к контуру C .

Отображение (3) сводит задачу обтекания контура C_1 к задаче обтекания круглого цилиндра, поэтому величина скорости на C_1 определяется формулой

$$|v_1| = 2v_\infty |\sin \vartheta - \sin \vartheta_0| |F_1'(z, C_1)| / |F_1'(\infty, C_1)| \quad (7)$$

Здесь v_∞ – величина скорости на бесконечности, направленной вдоль действительной оси, $\vartheta = \theta + \Delta\theta$, $\vartheta_0 = \theta_0 + \Delta\theta_0$ – аргументы образов точек z и z_0 (фиксированная точка) при отображении (3).

Учитывая, что скорость на контуре C

$$|v| = 2v_\infty |\sin \theta - \sin \theta_0| |F'(z, C)| / |F'(\infty, C)|$$

и воспользовавшись формулами (4)–(6) и еще раз (4) для $z = \infty$, получим

$$|v_1| = \frac{|v|}{|F_2'(\infty, C_1^*)|} \left| \frac{\sin \vartheta - \sin \vartheta_0}{\sin \theta - \sin \theta_0} \right| \left| 1 + \frac{F''(z, C)}{F'(z, C)} \Delta z \right| (1 - \delta(\theta) - \gamma(\theta)) \quad (8)$$

где

$$|F_2'(\infty, C_1^*)| \approx 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) dt$$

$$\frac{\sin \vartheta - \sin \vartheta_0}{\sin \theta - \sin \theta_0} \approx 1 + \frac{\cos \theta \Delta\theta - \cos \theta_0 \Delta\theta_0}{\sin \theta - \sin \theta_0}$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} dt, \quad \Delta\theta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{\theta_0-t}{2} dt$$

В результате получаем искомое соотношение, которое связывает скорости в соответствующих точках A и A_1 (фиг. 1) контуров C и C_1 , находящихся на одной нормали к C :

$$|v_1| = |v| \Gamma \left(1 - \delta(\theta) + \frac{\cos \theta \Delta\theta - \cos \theta_0 \Delta\theta_0}{\sin \theta - \sin \theta_0} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) dt - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\delta(t) - \delta(\theta)] \sin^{-2} \frac{t-\theta}{2} dt \right), \quad \Gamma = |1 + \Delta z F''(z, C) / F'(z, C)| \quad (9)$$

Выражение (9) есть исправленный вариант известной формулы [2], отличающийся наличием множителя Γ и знаком перед вторым слагаемым в круглых скобках. Отметим, что критические точки K и K_1 (фиг. 1), согласно (9), лежат на одной нормали к контуру C .

Проверим полученный результат. В качестве опорного профиля рассмотрим эллипс (фиг. 2), заданный в параметрическом виде $\{x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi\}$. Близкий произвольный контур зададим уравнением

$$x = a \cos \varphi + \varepsilon m \Phi(\varphi), \quad y = \varepsilon \sin \varphi + \varepsilon p \Phi(\varphi) \quad (10)$$

где ε – малая величина, характеризующая близость контуров C и C_1 , $\{m, p\} = \{2\cos\varphi/a, 2\sin\varphi/b\}$ – составляющие вектора нормали к эллипсу в произвольной точке $\Phi(\varphi)$ – определяет вариацию контура. Не останавливаясь на выкладках, которые содержатся в работе ([4] выражение (12)), получим формулу, в которой будет присутствовать множитель Γ (9) вида

$$\Gamma = 1 + \mu\delta(\varphi), \quad \mu = 1 - \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi)b/a}{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi b^2/a^2} \quad (11)$$

В этом случае формула (9) при учете равенств $\theta = \varphi$ и $\theta_0 = 0$ дает

$$\begin{aligned} v_s = |v_1| = & \left(1 + \frac{b}{a}\right) |\cos \alpha_1| \left\{ 1 + \varepsilon \left[q \sin^2 \alpha_1 - \frac{2}{ab} \Phi(\varphi)(1 - \mu) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{\pi ab \sin \varphi} \int_0^{2\pi} \Phi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt + \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\pi ab} \int_0^{2\pi} \Phi(t) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - t}{2} dt + \\ & \left. \left. + \frac{1}{\pi ab} \int_0^{2\pi} \Phi(t) dt - \frac{1}{2\pi ab} \int_0^{2\pi} [\Phi(t) - \Phi(\varphi)] \sin^{-2} \frac{t - \varphi}{2} dt \right] \right\} \\ q = & 2 \left[\frac{\cos \varphi \Phi(\varphi) + \sin \varphi \Phi'(\varphi)}{b^2 \cos \varphi} + \frac{\cos \Phi'(\varphi) - \sin \varphi \Phi(\varphi)}{a^2 \sin \varphi} \right] \end{aligned}$$

где α_1 – местный угол атаки к контуру C_1 , который выражается через местный угол атаки к эллипсу

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha (1 + \varepsilon q)$$

Конкретизируем теперь близкий контур, задав его уравнение в плоскости ζ , в виде окружности: $\rho = 1 + \delta(\theta) = 1 + a_0$, $\zeta = \rho e^{i\theta}$. Можно показать, что в этом случае контуром C_1 является эллипс с полуосями a_1 и b_1 , уравнение которого в параметрической форме таково: $x = a_1 \cos \varphi = (a + a_0 b) \cos \varphi$, $y = b_1 \sin \varphi = (b + a_0 a) \sin \varphi$. При помощи (12) получаем

$$v_s = (1 + b/a)[1 + a_0(1 - b/a)] \cos \alpha_1$$

С другой стороны, точное распределение скорости на эллипсе [4]

$$v_s = (1 + b_1/a_1) \cos \alpha_1, \quad a_1 = a + a_0 b, \quad b_1 = b + a_0 a (a_0 - \varepsilon)$$

Поскольку $b_1/a_1 = (b/a) + (1 - b^2/a^2)a_0 + \dots$, результаты совпадают.

Отметим, что если в тестовом примере за опорный контур принять окружность, то множитель $\Gamma \equiv 1$ и его отсутствие можно не заметить [4].

Автор благодарит Г.Ю. Степанова за обсуждение и В.И. Забутную, принявшую участие в расчете примера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А. Конформные отображения с приложением к некоторым вопросам механики. М., Л.: Гостехиздат, 1946. 159 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
3. Гонор А.Л. Об одной ошибке в теории конформных отображений близких областей и в приложении к обтеканию профиля // ПММ. 1988. Т. 52: Вып. 2. С. 345–348.
4. Гонор А.Л., Забутная В.И. Явное представление параметров течения несжимаемой жидкости на контуре, близком к профилю эллиптической формы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 96–102.