ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, Вып. 6, 1993

УДК 531.36

© 1993 г. В.В. Румянцев, С.П. Сосницкий

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ГОЛОНОМНЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Проблема устойчивости положений равновесия и стационарных движений голономных консервативных систем достаточно полно отражена в ряде обзоров [44, 58, 9]. Однако исследования в данной области продолжаются. В последнее время (1982–1992 гг.) получен ряд новых важных результатов. Их анализу и сравнению с ранее известными и посвящается предлагаемая обзорная статья.

На основании известной теоремы Лагранжа–Дирихле [48, 49] положение равновесия натуральной системы устойчиво, если потенциальная энергия принимает в нем строгий локальный минимум. И хотя, как показал Пенлеве [53], а затем Уинтнер [67], данная теорема не является обратимой, тем не менее представляется интересным выяснение, помимо условия отсутствия минимума потенциальной энергии, дополнительных ограничений, которые приводят к неустойчивости равновесия. В дальнейшем данную задачу по традиции будем называть задачей обращения теоремы Лагранжа–Дирихле, понимая ее условный смысл. Достаточно полный обзор по ней содержится в работе [9] (см. также [25, 21]). Поэтому остановимся на исследованиях, появившихся позднее и не вошедших в обзор [9].

При всем многообразии подходов к задаче обращения, отраженных в данных исследованиях, все же можно выделить наиболее важные направления, в рамках которых получены теоремы о неустойчивости. К ним относятся: 1) первый метод Ляпунова, 2) второй метод Ляпунова, 3) вариационный подход, 4) исследование устойчивости с помощью функции действия по Гамильтону.

Заслуживает быть отмеченным и тот факт, что результаты, полученные в рамках первого метода Ляпунова, группируются вокруг работы [12], а относящиеся ко второму методу Ляпунова – существенно опираются на теорему Четаева о неустойчивости ([41], с. 25), а также непосредственно используют теоремы Четаева [39–41], посвященные обращению теоремы Лагранжа–Дирихле.

Далее введены обозначения, которые не всегда совпадают с авторскими, что, однако, не отражается на содержании излагаемых результатов.

1. Обращение теоремы Лагранжа–Дирихле на основании применения первого метода Ляпунова. Рассмотрим натуральную систему с n степенями свободы

$$d/dt\partial L/\partial\dot{\mathbf{q}} - \partial L/\partial\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{1.1}$$

где лагранжиан L определяется выражением

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \Pi(\mathbf{q}) \tag{1.2}$$

Функция $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = {}^1/_2\dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ соответствует кинетической энергии системы, причем предполагается, что квадратичная форма $\dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{0})\dot{\mathbf{q}}$ положительно определена, $\Pi(\mathbf{q})$ – потенциальной. Будем считать, что точка $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$ – исследуемое положение равновесия.

Допустим вначале, что в окрестности исследуемого положения равновесия функции $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ и $\Pi(\mathbf{q})$ являются аналитическими, в частности

$$\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_m(\mathbf{q}) + \Pi_{m+1}(\mathbf{q}) + \ldots, \quad m \geqslant 2 \tag{1.3}$$

где $\Pi_s(\mathbf{q})$ – однородная функция степени s: $\Pi_s(\lambda\mathbf{q}) = \lambda^s\Pi_s(\mathbf{q})$.

Без нарушения общности рассмотрения можно предполагать далее, что в качестве обобщенных координат выбраны нормальные координаты, в которых

$$A(\mathbf{q}) = E + A^*(\mathbf{q}), \quad A^*(\mathrm{o}) = 0$$

где E – единичная матрица. С учетом данного обстоятельства уравнения движения (1.1) допускают представление в виде

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\partial\Pi_m / \partial\mathbf{q} + O(\|\dot{\mathbf{q}}\|^2) + o(\partial\Pi_m / \partial\mathbf{q}) \tag{1.4}$$

Здесь $O(\|\dot{\mathbf{q}}\|^2)$ — слагаемые, которые по абсолютному значению не превосходят постоянной, умноженной на $\|\dot{\mathbf{q}}\|^2$, $o(\partial\Pi_m/\partial\mathbf{q})$ – величины более высокого порядка малости в окрестности нуля, чем $\|\partial\Pi_m/\partial\mathbf{q}\|$.

Отбрасывая в уравнениях (1.4) два последних слагаемых, что эквивалентно сохранению соответственно в выражениях для кинетической и потенциальной энергий исходной системы членов наинизшего измерения, приходим к укороченной системе

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\partial\Pi_m / \partial\mathbf{q} \tag{1.5}$$

Лемма 1 [11]. Если при некотором $\mathbf{e} \in R^n$ ($\|\mathbf{e}\| = 1$) $(-\partial\Pi_m/\partial\mathbf{q})|_{\mathbf{q}=\mathbf{e}} = \kappa\mathbf{e}$, $m \geqslant 3$, $\kappa > 0$, то укороченная система (1.5) имеет асимптотическое решение

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}/t^{2/(m-2)}, \quad \mathbf{a} \in R^n, \quad a = \|\mathbf{a}\|\mathbf{e} \tag{1.6}$$

Условие леммы, таким образом, эквивалентно требованию, что сила $(-\partial\Pi_m/\partial\mathbf{q})$ является центральной и отталкивающей вдоль луча, определяемого вектором $\mathbf{e}$. Если, в частности, форма $\Pi_m(\mathbf{q})$ в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ не имеет минимума, то $(-\partial\Pi_m/\partial\mathbf{q})|_{\mathbf{q}=\mathbf{e}} = \kappa\mathbf{e}$ при некоторых $\mathbf{e} \in R^n$ и $\kappa > 0$, и тем самым условие леммы выполняется.

Как известно [19], сущность первого метода Ляпунова состоит в нахождении общего или частного решения уравнений возмущенного движения исследуемой системы, позволяющего сделать вывод о том, устойчиво ли ее нулевое решение или нет. При этом искомое решение, как правило, ищется в виде ряда, базисом для которого обычно служит решение линейного приближения уравнений возмущенного движения.

В частности, если в (1.3) $m = 2$, а форма Π_2 в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ не имеет минимума, то, как показал Ляпунов ([19], п. 24), исходная система (1.1) допускает решение вида

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{q}_i e^{i\lambda t}, \quad \lambda < 0, \quad \mathbf{q}_i \in R^n \tag{1.7}$$

где первое слагаемое отвечает частному решению укороченной системы (1.5).

Данное обстоятельство служит наводящим соображением для того, чтобы и при $m > 2$ поступать аналогичным образом, рассматривая в качестве первого приближения необязательно линейную систему.

Было показано [11], что в случае нечетного $m \geqslant 3$ система (1.1) действительно допускает решение, сконструированное по данному принципу.

Теорема 1 [11]. Если разложение потенциальной энергии в ряд Маклорена начинается с членов нечетной степени, то существует асимптотическое решение системы (1.1), которое выражается сходящимся рядом

$$m = 2k+1, \quad \mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{q}_i}{t^{i\mu}}, \quad \mu = \frac{2}{2k-1}, \quad \mathbf{q}_i \in R^n \tag{1.8}$$

и, в частности, положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ неустойчиво.

При четном m ситуация несколько сложнее. Согласно работе [12], в этом случае решение имеет вид

$$m=2k, \quad k\geq 2, \quad \mathbf{q}(t)=\frac{1}{t^{\mu}}\sum_{\substack{i,j=0\\ j\leq \mu i}}^{\infty}\frac{\mathbf{q}_{ij}(\ln t)^{j}}{t^{i\mu}} \qquad (1.9)$$
$$\mu=\frac{1}{k-1}, \quad \mathbf{q}_{ij}\in R^{n}$$

где $\mathbf{q}_{ij}$ – полиномы от $\ln t$.

Теорема 2 [12]. Пусть форма Π_m ($m\geq 2$) в точке $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ не имеет локального минимума. Тогда существует решение системы (1.1), определяющееся рядами (1.7)–(1.9), которое асимптотически стремится к положению равновесия $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ при $t\to\infty$.

Следствие. В условиях теоремы 2 положение равновесия $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ системы (1.1) неустойчиво.

Как видим, теорема 2 содержит теорему 1.

Для нахождения коэффициентов рядов (1.8), (1.9) используется индукция, возрастающая по i и убывающая по j. На основании результатов [15, 16] (см. также [13], с. 934) уже из самого факта существования формального решения в виде рядов (1.8), (1.9) следует наличие у системы (1.1) действительного движения, для которого найденные формальные ряды служат асимптотическим представлением. Однако в [11, 12] приводится не только процедура построения формального решения, но и доказывается сходимость рядов (1.8), (1.9), для чего система (1.1) преобразуется к некоторой эквивалентной операторной форме, допускающей применение теоремы о неподвижной точке.

Метод исследования устойчивости равновесия [11, 12] допускает распространение на более общий случай, когда ряд Маклорена функции $\Pi(\mathbf{q})$ имеет вид

$$\Pi(\mathbf{q})=\Pi_2+\Pi_m+\Pi_{m+1}+\ldots, \quad m\geq 3$$

где Π_2 – неотрицательная квадратичная форма. Замечая, что множество точек из R^n, в которых имеет место равенство $\Pi_2=0$, образует k-мерную плоскость π, содержащую точку $\mathbf{q}=\mathbf{0}$, и предполагая, что $k>0$, обозначим через W_m ограничение формы Π_m на плоскость π, также являющееся однородной формой степени m.

Теорема 3 [13]. Если функция W_m не имеет в точке $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ локального минимума, то система (1.1) обладает движениями, асимптотическими к положению равновесия $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$.

В условиях теоремы 3, в отличие от случая, когда $\Pi_2\equiv 0$, уже не приходится говорить о сходимости рядов вида (1.8), (1.9). Однако формальные ряды аналогичной структуры существуют и в данной ситуации, представляя собой асимптотические разложения решений, притягивающихся к положению равновесия при $t\to\infty$.

Теорема 3 остается справедливой и в случае $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in C^{\infty}(D\times R^n)$, если только исходная функция $\Pi(\mathbf{q})$ допускает представление в виде

$$\Pi(\mathbf{q})=\Pi_2(\mathbf{q})+\Pi_m(\mathbf{q})+o(\|\mathbf{q}\|^m)$$

Изложенные выше результаты [11–13] получили дальнейшее развитие в направлении ослабления требований к гладкости соответствующего лагранжиана в работах [51, 52, 63]. Это ослабление достигается, в частности, благодаря тому, что вместо явного построения асимптотических решений в виде сходящихся рядов доказывается лишь существование асимптотических решений.

Теорема 4 [51, 52]. Пусть $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in C^{h}(s_{\varepsilon}\times R^{n})$, $h>2$ и существует такое натуральное число m, $2<m\leq h$, что

$$\Pi=\Pi_m+W$$

где Π_m – форма степени m, а функция W в точке $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ имеет более высокий порядок малости. Тогда если форма Π_m не имеет в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ минимума, то существует движение натуральной системы, определенное при $t \in]0, \infty[$ и стремящееся к положению равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, если $t \to \infty$.

Доказательство теоремы 4 аналогично теореме 2 основано на использовании укороченных уравнений (1.5). В частности, производится замена переменных

$$\mathbf{q} = z(t)(\mathbf{e} + \mathbf{Q})$$

где $\mathbf{q} = z(t)\mathbf{e}$ ($\mathbf{e} = (1, 0,..., 0)^T$) – решение укороченной системы. Затем путем перехода к новой системе переменных, включая независимую, исходная система (1.1) преобразуется к виду автономной системы $(2n + 1)$ уравнений первого порядка, содержащей устойчивое двумерное многообразие. Последнее обстоятельство позволяет заключить о существовании асимптотического к рассматриваемому положению равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ движения исходной системы.

Схему доказательства данной теоремы удается использовать и при более общей структуре потенциала сил. В частности, представляя вектор обобщенных координат $\mathbf{q}$ в виде пары $\mathbf{q} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\mathbf{u} = (u_1,..., u_r)$, $\mathbf{v} = (\upsilon_1,..., \upsilon_s)$, $r + s = n$ и обозначая окрестности точек $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ в R^r и $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ в R^s соответственно через Ω_1 и Ω_2, предположим, что лагранжиан L для $(\mathbf{u},\mathbf{v},\dot{\mathbf{u}},\dot{\mathbf{v}}) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times R^n$ имеет вид

$$L = \tfrac{1}{2}[\dot{\mathbf{u}}^T g^{(1)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}^T g^{(c)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{v}}^T g^{(2)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}}] - \Pi(\mathbf{u},\mathbf{v}) \tag{1.10}$$

Здесь $g^{(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $g^{(c)}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $g^{(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ соответственно $(r \times r)$, $(r \times s)$, $(s \times s)$ – матрицы $\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, удовлетворяющие условиям

$$g^{(1)}_{\alpha,\beta}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \delta_{\alpha,\beta}, \quad g^{(c)}_{\alpha,j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0, \quad g^{(2)}_{i,j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \delta_{i,j}$$

и Π в окрестности точки $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ имеет квадратичную часть

$$\Pi_2 = \delta_{\alpha,\beta}\omega^2_\alpha u_\alpha u_\beta, \quad \omega_\alpha \neq 0, \quad \alpha = 1,..., r$$

Пусть существует целое число $k \geqslant 3$, такое, что

H_1: $L \in C^h(\Omega_1 \times \Omega_2 \times R^n, R)$, $\quad h \geqslant k + 3$

H_2: $\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = {}^1/2\mathbf{u}^T l(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{u} + \Pi_m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + W(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

где $l(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – $(r \times r)$-матрица, $l_{\alpha,\beta}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \omega^2_\alpha\delta_{\alpha,\beta}$, Π_m – форма степени m, $W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = O(\|(\mathbf{u}, \mathbf{v})\|^{m+1})$ и $\min\{\Pi_m(\mathbf{0}, \mathbf{v}), \|\mathbf{v}\| = 1\} < 0$. Кроме того, имеет место по крайней мере одно из двух дополнительных условий: H_3: (условие слабой связи)

$$\hat{G}_{\alpha,\beta}(\mathbf{v}) = \delta_{\alpha,\beta} + O(\|\mathbf{v}\|^{m(k)+2}), \quad l_{\alpha,\beta}(\mathbf{0},\mathbf{v}) = \omega^2_\alpha\delta_{\alpha,\beta} + O(\|\mathbf{v}\|^{m(k)+1})$$

где

$$\hat{G}_{\alpha,\beta}(\mathbf{v}) = g^{(1)}_{\alpha,\beta}(\mathbf{0},\mathbf{v}) - g^{(c)}_{\alpha,j}(\mathbf{0},\mathbf{v})(g^{(2)}(\mathbf{0},\mathbf{v}))^{-1}_{j,\kappa} g^{(c)}_{\beta,\kappa}(\mathbf{0},\mathbf{v})$$

H'_3: $L \in C^{k+m(k)+3}$, $\quad m(k) = [(k-3)/2]$

Теорема 5 [50]. Пусть система с лагранжианом (1.10) удовлетворяет предположениям H_1, H_2, а также одному из условий H_3 или H'_3. Тогда соответствующая система (1.1) допускает решение, стремящееся асимптотически к положению равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ (и поэтому начало неустойчиво).

В условиях теоремы 5 существуют такие координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in R^r$, $\mathbf{y} \in R^s$, $r + s = n$, что потенциальная энергия допускает представление в форме

$$\Pi = {}^1\!/\!_2\mathbf{x}^T r^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{x} + \Pi_m(\mathbf{y}) + W(\mathbf{y}) \tag{1.11}$$

где $r^*(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathrm{diag}(\omega_1^2, ..., \omega_r^2)$ $(\omega_\alpha \neq 0,\ \alpha = 1, ..., r)$, Π_m – форма m-й степени, не имеющая минимума в точке $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, W – функция более высокого порядка малости. Как раз возможность представления функции Π в виде (1.11) позволяет из исходной системы выделить неавтономную подсистему, связывающую переменные $\mathbf{y}$, к которой применима схема доказательства теоремы 4. Последнее обстоятельство является определяющим, чтобы сделать заключение о справедливости теоремы 5.

Близкой в идейном плане к работе [12] являетя статья [63], в которой также используется решение укороченных уравнений (1.5). В частности, искомое решение представляется в виде суммы решения укороченных уравнений и некоторой малой добавки. В рассматриваемой работе имеется некоторая аналогия с подходом, предложенным в [51, 52], поскольку также реализуется идея преобразования исходной существенно нелинейной системы в квазилинейную.

Теорема 6 [63]. Пусть выполняются условия:

1) $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$: $R^n \times R^n \to R$ – дважды непрерывно дифференцируемая и для любого $\mathbf{q} \in R^n$ положительно определенная квадратичная форма;

2) $\Pi(\mathbf{q})$, $\Pi_m(\mathbf{q})$: $R^n \setminus \{0\} \to R$ – соответственно дважды и трижды непрерывно дифференцируемые функции, Π_m положительно однородна степени m (т.е. $\Pi_m(s\mathbf{q}) = s^m \Pi_m(\mathbf{q})$ для $s > 0$ и $\mathbf{q} \in R^n \setminus \{0\}$) и $\Pi^{(i)}(\mathbf{q}) = \Pi_m^{(i)}(\mathbf{q}) + O(\|\mathbf{q}\|^{m+\varepsilon-i})$ для $i = 0, 1, 2$, если $\|\mathbf{q}\| \to 0$;

3) $m > 1$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ – действительные числа и $n > 1$ – натуральное число;

4) $\Pi_m(\mathbf{q}) < 0$ для некоторого $\mathbf{q} \in R^n \setminus \{0\}$.

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1) неустойчиво. Если же $m \geqslant 2$, то существуют решения системы, асимптотически притягивающиеся к точке $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ при $t \to \infty$.

Замечание. Оригинальная формулировка теоремы 6 несколько шире по сравнению с изложенной выше, так как включает случай, когда $0 < m \leqslant 1$ и точка $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ не является положением равновесия, что выходит за рамки рассматриваемых здесь вопросов.

Наконец, в связи с подходом, предложенным в [11, 12], упомянем еще статью [21], в которой с помощью предложенной в [12] процедуры находятся асимптотические к положению равновесия решения в ситуации с более сложной по сравнению с рассмотренной в [11–13] структурой потенциала сил.

Предполагается, что исходный лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ аналогично [12] является аналитическим в окрестности исследуемого положения равновесия, в частности,

$$\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_{2m}(\mathbf{q}) + \Pi_{2m+2}(\mathbf{q}) + ..., \quad m \geqslant 3$$

Теорема 7 [21]. Пусть выполнены предположения:

1) $\Pi_{2m}(\mathbf{q}) \geqslant 0$, $\forall \mathbf{q} \in R^n$, $S = \{\mathbf{q}\colon \Pi_{2m}(\mathbf{q}) = 0\}$;

2) $\exists \mathbf{e} \in S$, $\|\mathbf{e}\| = 1$, $\Pi_{2m+2}(\mathbf{e}) = \min\{\Pi_{2m+2}(\mathbf{q})\colon \|\mathbf{q}\| = 1\} < 0$;

3) $D^r\Pi_{2m}(\mathbf{e}) = 0$ при $r = 2, 3, 4$ ($D^r\Pi_k$ – частная производная порядка r);

4) $\lim\limits_{\|\mathbf{q}\| \to 0} [(A(\mathbf{q}) - A(\mathbf{0}))/\|\mathbf{q}\|^2] = 0$.

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1) неустойчиво.

Как уже упоминалось выше, доказательство теоремы 7 осуществляется в рамках предложенного в [12] подхода, согласно которому по-прежнему строятся формальные решения вида (1.8), (1.9) с использованием для определения коэффициентов рядов индукции, возрастающей по i и убывающей по j. Хотя в условиях теоремы 7 потенциал $\Pi(\mathbf{q})$ является более сложным по сравнению с рассмотренным в [12], поскольку содержится дополнительное слагаемое $\Pi_{2m}(\mathbf{q})$, однако это не оказывает существенного влияния на структуру эквивалентного системе (1.1) операторного уравнения, в частности на оценку нормы оператора, что позволяет заключить о сходимости рядов (1.8), (1.9).

Схема доказательства теоремы 7 при дополнительных ограничениях позволяет охватить и более сложные случаи:

1) $\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_{2k}(\mathbf{q}) + \ldots + \Pi_{2m+1}(\mathbf{q}) + \Pi_{2m+2}(\mathbf{q}) + \ldots$;

2) $\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_{2k}(\mathbf{q}) + \ldots + \Pi_{2m}(\mathbf{q}) + \Pi_{2m+1}(\mathbf{q}) + \ldots$, в которых предположение типа 2) относится соответственно к $\Pi_{2m+2}(\mathbf{q})$, $\Pi_{2m+1}(\mathbf{q})$.

Наконец, в связи с рассматриваемым здесь подходом, на основании которого неустойчивость равновесия устанавливается с помощью нахождения или доказательства существования асимптотического решения, укажем еще на работу [3], в которой (хотя и при более ограничительных предположениях) для доказательства неустойчивости также используется существование асимптотических решений.

2. Обращение теоремы Лагранжа–Дирихле при помощи второго метода Ляпунова. 1°. Для приведенных выше результатов [11–13, 21], которые получены в рамках первого метода Ляпунова, существенным является требование аналитичности или хотя бы бесконечной дифференцируемости правых частей соответствующих уравнений возмущенного движения. Вместе с тем, если для исследования устойчивости применять второй метод Ляпунова, также в значительной мере опирающийся на наинизшее приближение уравнений движения как базис для последующего анализа, то ограничения на класс гладкости правых частей сводятся к минимуму. В частности, достаточно, чтобы правые части обеспечивали существование и единственность решений или даже лишь существование. Стало быть, в тех случаях, когда исходный лагранжиан удовлетворяет лишь минимальным требованиям к гладкости, преимущества второго (прямого) метода Ляпунова при исследовании устойчивости бесспорны.

Как раз учет данных обстоятельств и был использован в работах [26, 32, 34], где для широкого класса консервативных систем строится функция Ляпунова–Четаева. Специфика применения в них теоремы Четаева о неустойчивости ([41], с. 25) состоит в том, что требуемые свойства вспомогательной функции и ее производной относятся лишь к подмножеству нулевого уровня интеграла энергии, а не к области с положительной лебеговой мерой, как это обычно принято. Такой подход не только не противоречит теореме Четаева, а наоборот, довольно полно реализует заложенную в ней идею, когда для заключения о неустойчивости достаточно обнаружить хотя бы одно уходящее движение с началом в сколь угодно малой окрестности положения равновесия. Подобное ограничение класса рассматриваемых решений упрощает конструкцию вспомогательной функции и анализ ее производной.

Теорема 8 [26]. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^1(D \times R^n), D \subset R^n_{\mathbf{q}}$ и при сколь угодно малом числе $\varepsilon > 0$ $(D \supset \bar{s}_\varepsilon = \{\mathbf{q} \in R^n, \|\mathbf{q}\| \leqslant \varepsilon\})$ выполняются условия:

1) потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{q})$ допускает представление в виде

$$\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_k(\mathbf{q}) + R(\mathbf{q}), \quad R(\mathbf{q}) = o(\|\mathbf{q}\|^k)$$

где $\Pi_k(\mathbf{q})$ – однородная форма степени $k \geqslant 2$;

2) форма $\Pi_k(\mathbf{q})$ в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ не имеет минимума;

3) $\lim\limits_{\|\mathbf{q}\| \to 0} (\|\partial R / \partial \mathbf{q}\| / \|\mathbf{q}\|^{k-1+\alpha}) = 0, \quad \alpha = \text{const}, \quad \alpha \in]0,1[.$

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1) неустойчиво.

Доказательство теоремы основано на представлении системы (1.1) в гамильтоновой форме

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial H / \partial \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\partial H / \partial \mathbf{q} \tag{2.1}$$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = {}^1\!/\!_2(\|\mathbf{p}\|^2 + \mathbf{p}^T B(\mathbf{q})\mathbf{p}) + \Pi(\mathbf{q}) = h = \text{const}$$

и рассмотрении вспомогательной функции

$$V = \mathbf{q}\mathbf{p} - \delta\|\mathbf{q}\|^{k/2+1} e^{-\|\mathbf{q}\|^\alpha}, \quad 0 < \delta = \text{const}$$

на множестве

$$\Lambda = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \overset{*}{s}_\varepsilon = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in R^n \times R^n, \|\mathbf{q} \oplus \mathbf{p}\| < \varepsilon\}\colon H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h = 0,\ V > 0\}$$

которое не является пустым при подходящем выборе постоянной δ, независимо от малости числа ε. Условия теоремы гарантируют для производной от функции V вдоль векторного поля, определяемого уравнениями (2.1), справедливость оценки

$$dV/dt > \alpha\delta^2\|\mathbf{q}\|^{k+\alpha} + o(\|\mathbf{q}\|^{k+\alpha}), \quad \forall(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Lambda$$

что позволяет заключить, применяя схему доказательства теоремы Четаева, о неустойчивости положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.

Замечание 1. Структура множества Λ дает возможность для уходящих из Λ и тем самым из окрестности $\overset{*}{s}_\varepsilon$ решений получить оценку

$$\|\mathbf{q}(t)\| > \left[\|\mathbf{q}(0)\|^{-(k-2)/2} - \lambda\frac{(k-2)}{4}t\right]^{-2/(k-2)}, \quad k > 2$$

$$\|\mathbf{q}(t)\|^2 > \|\mathbf{q}(0)\|^2 e^{\lambda t}, \quad 0 < \lambda = \text{const}, \quad \lambda < 2\delta, \quad k = 2$$

Замечание 2. Формулировка теоремы 8 в оригинале содержит еще условие

$$\lim_{\|\mathbf{q}\| \to 0} \frac{A^*(\mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|^\alpha} = 0, \quad \alpha \in]0,1[$$

Однако последнее всегда выполняется вследствие исходного предположения $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in$ $\in C^1(D \times R^n)$.

Данный подход к доказательству неустойчивости можно распространить на более общий случай, когда потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi = P_m + R(\mathbf{q}), \quad P_m = \sum_{k=2}^{m} \Pi_k, \quad R(\mathbf{q}) = o(\|\mathbf{q}\|^m)$$

где Π_k – однородная форма степени k.

Определим множества

$$\Omega = \{\mathbf{q} \in s_\varepsilon\colon\ \Pi(\mathbf{q}) < 0\}$$

$$\Omega_i = \left\{\mathbf{q} \in s_\varepsilon\colon\ P_i = \sum_{k=2}^{i \leq m} \Pi_k < 0\right\}, \quad \Omega_i^* = \Omega \cap \Omega_i$$

Теорема 9 [26]. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^1(D \times R^n)$ и при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ $(D \supset \bar{s}_\varepsilon)$ выполняются условия:

1) $\Omega \neq \phi$;

2) $\overset{*}{\Omega}_m \neq \phi$;

3) $0 \in \overline{\Omega}_m^*$;

4) $\overset{*}{\Omega}_i\ (i < m) = \phi$;

5) $(-P_m) \geqslant \mu^2\|\mathbf{q}\|^m$, $\forall \mathbf{q} \in \omega \subset \overset{*}{\Omega}_m$, $\mu = \mathrm{const}$, $0 \in \overline{\omega}$ (ω – собственное подмножество множества $\overset{*}{\Omega}_m$);

6) $\lim\limits_{\|\mathbf{q}\|\to 0} (\|\partial R / \partial \mathbf{q}\| / \|\mathbf{q}\|^{m-1+\alpha}) = 0, \quad \alpha \in]0,1[.$

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1) неустойчиво.

Сравнение теоремы 9 с теоремой 5 показывает, что выполнение условий последней влечет выполнение условий теоремы 9, однако обратное утверждение не имеет места. Стало быть, теорема 9 является усилением теоремы 5.

Следствие. Пусть в достаточно малой окрестности положения равновесия потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{q})$ имеет вид

$$\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_k(\mathbf{q}) + \Pi_m(\mathbf{q}) + R(\mathbf{q}), \quad R(\mathbf{q}) = o(\|\mathbf{q}\|^m)$$

где $\Pi_k(\mathbf{q})$, $\Pi_m(\mathbf{q})$ – однородные формы соответственно степеней $k \geqslant 2$, $m > k$, $\Pi_k(\mathbf{q}) \geqslant 0$. Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ неустойчиво, если форма $\Pi_m(\mathbf{q})$ на множестве нулей формы $\Pi_k(\mathbf{q})$ может принимать отрицательные значения и выполняется условие

$$\lim_{\|\mathbf{q}\|\to 0} (\|\partial R / \partial \mathbf{q}\| / \|\mathbf{q}\|^{m-1+\alpha}) = 0$$

Сравнение данного следствия с приведенными выше теоремами о неустойчивости 3,7 показывает, что оно обобщает их.

Доказательство теоремы 9, как и в случае теоремы 8, основано на использовании вспомогательной функции

$$V = \mathbf{qp} - \delta\|\mathbf{q}\|^{m/2+1} e^{-\|\mathbf{q}\|^\alpha}, \quad 0 < \delta = \mathrm{const}$$

рассматриваемой на множестве типа Λ. Фигурирующее в ее выражении число m отражает тот факт, что полином P_m, подобно форме Π_k в предыдущем случае, является определяющим при анализе свойств функции V и ее производной, относимых к множеству Λ.

Представляет интерес сравнение теоремы 9 с известным результатом Четаева [40], где неустойчивость положения равновесия доказана при условиях, что $\Pi(\mathbf{q})$ – аналитическая функция, $\Omega_m^* \neq \phi$, $0 \in \overline{\Omega}_m^*$, $\Pi_k \geqslant 0$ $(k < m)$, $\Pi_k \leqslant 0$, $\forall k > m$. Хотя данное утверждение Четаева о неустойчивости является более ограничительным по сравнению с теоремой 9, тем не менее техника доказательства последней содержит многие элементы результата Четаева.

При доказательстве теорем 8 и 9, аналогично работам [11–13], также существенно используется возможность выделения главной части потенциала сил, в частности формы Π_k и полинома P_m. Однако применение вспомогательной функции V позволяет значительно ослабить требования к гладкости соответствующего лагранжиана, в чем как раз и проявляются преимущества второго метода Ляпунова.

Критерий неустойчивости равновесия, также базирующийся на методе функций Ляпунова и, в частности, опирающийся на работу [22], получен в [55, 56].

Теорема 10 [55, 56]. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^2(s_\varepsilon \times R^n)$ и в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ функции $\Pi(\mathbf{q})$ не имеет минимума. Тогда, если выполняются условия:

1) $\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_m(\mathbf{q}) + R(\mathbf{q})$, где $\Pi_m(\mathbf{q})$ – однородная форма степени $m \geqslant 2$,

2) $\dfrac{R(\mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|^m}, \ \dfrac{\partial R / \partial \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^{m-1}}, \ \dfrac{\partial^2 R / \partial \mathbf{q}^2}{\|\mathbf{q}\|^{m-2}} \to (0,0,0)$, если $\|\mathbf{q}\| \to 0$,

3) функция $\Pi_m(\mathbf{q})$ невырожденна ($\partial \Pi_m / \partial \mathbf{q} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{0}$);

положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1) неустойчиво.

Теорема 10 несколько усиливает теорему [22], в которой предполагается $A(\mathbf{q}) = E$,

$R(\mathbf{q}) \in C^m$ и $\partial R/\partial\mathbf{q}|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = 0,\ldots, \partial^m R/\partial\mathbf{q}^m|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$. Вместе с тем ее условия более жесткие по сравнению с условиями теоремы 8.

Для доказательства теоремы 10, как и в [22], используется функция

$$V = \mathbf{p}^T(\mathbf{q} - \mu(\partial\Pi/\partial\mathbf{q})\|\mathbf{q}\|^{2-m}), \quad \mu = \mathrm{const}$$

Метод доказательства неустойчивости равновесия в условиях теорем 8, 9 позволяет несколько расширить область его применения в направлении усложнения структуры потенциала сил, в частности, когда потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_k(\mathbf{q}) + \Pi_m(\mathbf{q}) + R(\mathbf{q}), \quad R(\mathbf{q}) = o(\|\mathbf{q}\|^m)$$

Здесь $\Pi_k(\mathbf{q})$, $\Pi_m(\mathbf{q})$ – однородные функции соответственно степеней $k > 0$, $m > k$, $\Pi_k(\mathbf{q}) \geqslant 0$, а не только однородные полиномы (формы), как предполагалось выше.

Теорема 11 [34]. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^1(D \times R^n)$ и при сколь угодно малом числе $\varepsilon > 0$ $(D \supset \bar{s}_\varepsilon = \{\mathbf{q} \in R^n, \|\mathbf{q}\| \leqslant \varepsilon\})$ выполняются условия:

1) функция W_m, которой определяется ограничение $\Pi_m(\mathbf{q})$ на множество нулей функции $\Pi_k(\mathbf{q})$: $K = \{\mathbf{q} \in R^n\colon\ \Pi_k = 0\}$, не имеет в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ минимума;

2) $\lim\limits_{\|\mathbf{q}\|\to 0} (\|\partial R/\partial\mathbf{q}\|/\|\mathbf{q}\|^{m-1+\alpha}) = 0, \ \alpha = \mathrm{const}, \ \alpha \in]0,1[$.

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1) неустойчиво.

Следствие. В условиях теоремы 11 существуют уходящие из окрестности положения равновесия решения, удовлетворяющие оценкам

$$\|\mathbf{q}(t)\| > \left[\|\mathbf{q}(0)\|^{-(m-2)/2} - \frac{\lambda(m-2)}{4}t\right]^{-2/(m-2)}, \quad m \neq 2$$

$$\|\mathbf{q}(t)\|^2 > \|\mathbf{q}(0)\|^2 e^{\lambda t}, \quad 0 < \lambda = \mathrm{const}, \quad m = 2$$

Схема доказательства теоремы 11 остается такой же, как и в случае теоремы 9. Тот факт, что в рассматриваемой ситуации однородные функции Π_k, Π_m не обязательно сводятся к формам, принципиального значения не имеет.

Теорема 12 [34]. В условиях теоремы 11 и в предположении, что $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^2(D \times R^n)$, $m \geqslant 2$, существуют асимптотически притягивающиеся к положению равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$ решения, которые удовлетворяют неравенствам

$$\|\mathbf{q}(t)\| < \left[\|\mathbf{q}(0)\|^{-(m-2)/2} \pm \lambda\frac{(m-2)}{4}t\right]^{-2/(m-2)}, \quad m > 2$$

$$\|\mathbf{q}(t)\|^2 < \|\mathbf{q}(0)\|^2 e^{\mp\lambda t}, \quad m = 2, \quad 0 < \lambda = \mathrm{const}$$

где верхние и нижние знаки относятся соответственно к значениям $t \in R^+ = [0, \infty[$, $t \in R^- =]-\infty, 0]$.

Для доказательства теоремы 12 используется функция $V = \mathbf{qp} + \sigma^*\exp(-\|\mathbf{q}^\alpha)\|\mathbf{q}\|^{m/2+1}$, $\sigma^* = \mathrm{const}$, рассматриваемая на множестве

$$\Lambda^* = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \overset{*}{s}_\varepsilon\colon\ H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h = 0, \ V < 0\}$$

Условия теоремы гарантируют справедливость оценки

$$dV/dt > \lambda\sigma^{*2}\|\mathbf{q}\|^{m+\alpha} + o(\|\mathbf{q}\|^{m+\alpha})\forall(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \Lambda^*$$

и позволяют сделать вывод, что множество Λ^* является сектором.

Чтобы получить заключение теоремы, достаточно учесть обратимость исследуемой системы, а также возможность представления входящего в определение Λ^* неравенства в виде

$$d/dt\|\mathbf{q}\|^2 < -\lambda(\|\mathbf{q}\|^2)^{(m+2)/4}, \quad 0 < \lambda < 2\sigma^*$$

Теорема 12 является усилением теоремы 3 , в которой однородной функции $\Pi_k(\mathbf{q})$ соответствует квадратичная форма и, кроме того, $L \in C^{\omega(\infty)}$.

2°. При получении ряда новых случаев обращения теоремы Лагранжа–Дирихле важное место занимает работа Четаева [40], связанная с построением вспомогательного векторного поля, обладающего определенными свойствами по отношению к потенциалу сил исследуемой системы. Данный результат Четаева нашел эффективное применение в исследованиях [47, 22, 10]. Он также обобщался [18] на случай, когда производная от вспомогательного векторного поля терпит разрыв. Несмотря на множество приложений этой работы Четаева, не совсем оставалась ясной роль фигурирующего в ней условия отсутствия критических точек функции $\Pi(\mathbf{q})$ в области $\omega = \{\mathbf{q} \in s_\varepsilon\colon \Pi(\mathbf{q}) < 0\}$. Частичный ответ на данный вопрос дали авторы работ [55, 56], указав ограничения на структуру множества критических точек функции $\Pi(\mathbf{q})$ в ω.

Теорема 13 [55, 56]. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^2(D \times R^n)$ и при сколь угодно малом числе ε $(D \supset \bar{s}_\varepsilon)$ множество $\omega = \{\mathbf{q} \in s_\varepsilon\colon \Pi(\mathbf{q}) < 0\}$ непусто и $0 \in \partial\omega$. Предположим, что существует такое векторное поле

$$\varphi(\mathbf{q}) \in C^1\colon s_\varepsilon \to R^n, \quad \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

что выполняются условия:

1)$\varphi^T(\mathbf{q})\partial\Pi/\partial\mathbf{q} \leqslant 0, \ \forall\mathbf{q} \in \omega$;

2) $\mathbf{x}^T\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{q}}A(\mathbf{q})\right)\Bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}\mathbf{x} \geqslant c\|\mathbf{x}\|^2, \quad \forall\mathbf{x} \in R^n, \quad 0 < c = \text{const}$;

3) $\forall\mathbf{q} \in \omega, (\forall\eta < 0)(\exists\eta'\colon \ \eta < \eta' < 0)\ (\Pi(\mathbf{q}) = \eta') \Rightarrow \partial\Pi/\partial\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$.

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1) неустойчиво.

Доказательство теоремы производится с помощью вспомогательной функции

$$V = (\partial L/\partial\dot{\mathbf{q}})^T(\varphi/\mathbf{q}) - \sigma\partial\Pi/\partial\mathbf{q}), \quad \sigma = \text{const}, \quad \sigma > 0$$

производная от которой в силу уравнений движения удовлетворяет оценке

$$\dot{V} \geqslant \tfrac{1}{2}c\|\partial L/\partial\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \sigma\|\partial\Pi/\partial\mathbf{q}\|^2$$

Условие 3 теоремы, компенсирующее ослабление условия 1 по сравнению с формулировкой Четаева, согласно которой $\varphi^T\partial\Pi/\partial\mathbf{q} < 0$, гарантирует выбор движения со сколь угодно малыми начальными отклонениями от положения равновесия, на котором $\dot{V} \geqslant \gamma = \text{const}$.

Оказывается, однако, что справедлива более сильная

Теорема 14 [35]. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^2(D \times R^n)$ и при сколь угодно малом числе $\varepsilon > 0$ $(D \supset \bar{s}_\varepsilon)$ $\omega \neq \phi$ и $0 \in \partial\omega$. Предположим, что существует такое векторное поле $\varphi(\mathbf{q}) \in C^1\colon s_\varepsilon \to R^n$, что выполняются условия:

1) $\varphi^T(\mathbf{q})\partial\Pi/\partial\mathbf{q} \leqslant 0, \ \forall\mathbf{q} \in \omega$;

2) $\mathbf{x}^T\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{q}}A(\mathbf{q})\right)\Bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}\mathbf{x} - \dfrac{1}{2}\varphi^T(\mathbf{0})\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{q}}(\mathbf{x}^T A(\mathbf{q})\mathbf{x})|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \geqslant c\|\mathbf{x}\|^2, \forall\mathbf{x} \in R^n, \ 0 < c = \text{const}$.

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1) неустойчиво.

Для доказательства теоремы используется функция $V = \varphi^T(\mathbf{q})\, \partial L/\partial \dot{\mathbf{q}}$, производная от которой на движении системы с начальными условиями

$$\varphi(\mathbf{q})|_{t=0} = \varphi(\mathbf{q}_0), \quad \partial L/\partial \dot{\mathbf{q}}\,|_{t=0} = \lambda\varphi(\mathbf{q}_0), \quad \|\varphi(\mathbf{q}_0)\| \neq 0$$

$$0 < \lambda = \text{const}, \quad T(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) + \Pi(\mathbf{q}_0) = h_0 < 0.$$

удовлетворяет оценке $\dot{V} \geqslant c^* = \text{const}$. Поскольку данный выбор начальных условий не влечет каких-либо ограничений на структуру множества критических точек функции $\Pi(\mathbf{q})$, то тем самым и обеспечивается усиление теоремы 13.

Замечание 1. В теореме 14 не предполагается равенство $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, т.е. векторное поле $\varphi(\mathbf{q})$ может содержать постоянную составляющую. Если же положить $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, то условие 2 теоремы 14 переходит в условие 2 теоремы 13.

Замечание 2. Предположение, что $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^2(D \times R^n)$, гарантирующее единственность решения, не является принципиальным. Теорема 14 сохраняет силу и при $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^1$. Требование $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^2$, которое обычно фигурирует при рассмотрении систем динамики, скорее всего можно трактовать как следование принципу детерминированности Ньютона, принятому в классической механике.

Теорема 15 [7]. Пусть лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ аналитичен в окрестности точки $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, которая является изолированным положением равновесия. Предположим также, что в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_m + \Pi_{m+1} + \ldots$ не имеет локального минимума и существует такое векторное поле

$$\varphi(\mathbf{q}) \in C^1\colon\ s_\varepsilon \to R^n \quad \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

что

1) $\varphi^T(\mathbf{q})\partial\Pi/\partial\mathbf{q} \leqslant 0, \ \ \forall \mathbf{q} \in \omega;$

2) $\mathbf{x}^T\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{q}}A(\mathbf{q})\right)\Bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}\mathbf{x} \geqslant c\|\mathbf{x}\|^2, \ \forall \mathbf{x} \in R^n, \ 0 < c = \text{const}.$

Тогда решение системы (1.1) с любым начальным положением $\mathbf{q}(0) \in \omega$ и достаточно малым импульсом $\partial L/\partial \dot{\mathbf{q}}$ покидает ε – окрестность нуля за время T^*:

$$c_1\|\mathbf{q}(0)\|^{(2-m)/2} \leqslant T^* \leqslant c_2\|\mathbf{q}(0)\|^{(m-2\alpha)/2}$$

где c_1, c_2, α – постоянные. Если показатели $(2 - m)/2$ или $(m - 2\alpha)/2$ обращаются в нуль (при $m = 2$ или $m = 2, \alpha = 1$), то соответствующая степенная оценка заменяется на $\ln(\|\mathbf{q}(0)\|^{-1})$.

Доказательство теоремы осуществляется в рамках схемы, предложенной в [22].

3. Применение методов Ляпунова к проблеме обращения теоремы Рауса. Методы исследования устойчивости равновесия, рассмотренные в разд. 1, 2, можно применить и к задаче об устойчивости стационарных движений [54, 59, 66]. Как известно [9, 24], уравнения возмущенного движения в этом случае допускают представление в виде (1.1), где

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + L_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + L_0(\mathbf{q}) = {}^1\!/\!{}_2\dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + L_0(\mathbf{q}) \qquad (3.1)$$

причем квадратичная форма $\dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{0})\dot{\mathbf{q}}$ положительно определена, а исследуемому стационарному движению соответствует точка $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, L_0(\mathbf{0}) = 0$.

Критерии неустойчивости стационарных движений – равновесий системы (1.1), (3.1), обычно известны в литературе как обращения теоремы Рауса [9, 23]. Последняя [59] является обобщением теоремы Лагранжа–Дирихле. Наличие в лагранжиане L слагаемого $L_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ (если только $L_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \neq d\psi(\mathbf{q})/dt$) приводит к тому, что изложенные выше теоремы о неустойчивости не могут быть автоматически перенесены на стационарные движения, так как в системе (1.1), (3.1) может иметь место гироскопическая стабилизация [59, 41].

Теорема 16 [26]. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^1(D \times R^n)$ и при сколь угодно малом числе $\varepsilon > 0$ $(D \supset \bar{s}_\varepsilon)$ выполняются условия:

1) функция $L_0(\mathbf{q})$ допускает представление в виде

$$L_0(\mathbf{q}) = P_m + R(\mathbf{q}), \quad P_m = \sum_{k=2}^{m} L_{0k}, \quad R(\mathbf{q}) = o(\|\mathbf{q}\|^m),$$

где L_{0k} – однородные формы степени k;

2) $\Omega = \{\mathbf{q} \in s_\varepsilon\colon\ L_0(\mathbf{q}) > 0\} \neq \phi;$

3) $\overset{*}{\Omega}_i = \phi,\ \forall i < m,\ \overset{*}{\Omega}_i = \Omega \cap \Omega_i,\ \Omega_i = \{\mathbf{q} \in s_\varepsilon\colon\ P^i > 0\};$

4) $\Omega_m^* \neq \phi,\ 0 \in \overline{\Omega}_m^*;$

5) $P_m \geqslant \mu^2 \|\mathbf{q}\|^m,\ \forall \mathbf{q} \in \omega \subset \overset{*}{\Omega}_m,\ \mu = \mathrm{const},\ 0 \in \overline{\omega}$, где ω – некоторое собственное подмножество множества $\overset{*}{\Omega}_m$;

6) $$\lim_{\|\mathbf{q}\| \to 0} (\|\partial R / \partial \mathbf{q}\| / \|\mathbf{q}\|^{m-1+\alpha}) = 0, \quad \alpha = \mathrm{const}, \quad \alpha \in]0,1[\tag{3.2}$$

7) $$\lim_{\|\mathbf{q}\| \to 0} |\partial f_i / \partial q_j - \partial f_j / \partial q_i| / \|\mathbf{q}\|^{m/2-1+\alpha} = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Тогда стационарное движение (положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1), (3.1)) неустойчиво.

Следствие. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^1(D \times R^n)$ и при сколь угодно малом числе $\varepsilon > 0$ выполняются условия:

1) функция $L_0(\mathbf{q})$ допускает представление в виде

$L_0(\mathbf{q}) = L_{0k}(\mathbf{q}) + R(\mathbf{q}), \quad R(\mathbf{q}) = o(\|\mathbf{q}\|^k),$

где $L_{0k}(\mathbf{q})$ – однородная форма степени $k \geqslant 2$;

2) форма $L_{0k}(\mathbf{q})$ на стационарном движении (в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$) не имеет максимума;

3) выполнено равенство (3.2);

4) выполнено равенство (3.3).

Тогда стационарное движение неустойчиво.

Доказательство теоремы 16 проводится по такой же схеме, как и в случае теоремы 9. Возможность ограничиться в данной ситуации рамками подхода, используемого при исследовании устойчивости равновесия натуральных систем, вполне понятна, если учесть, что условие 7 теоремы отражает тот факт, что на множестве типа Λ, определенном в разд. 2, гироскопические силы имеют более высокий порядок малости по сравнению с потенциальными. Стало быть, в соответствии с условием 7 теоремы уравнения (1.1) с лагранжианом (3.1) можно рассматривать как малое возмущение натуральной системы.

Теорема 17 [38]. Пусть лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ является аналитическим в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Если первая нетривиальная форма разложения функции $L_0(\mathbf{q})$ в ряд Маклорена

$L_0(\mathbf{q}) = L_{0k}(\mathbf{q}) + O(\|\mathbf{q}\|^{k+1}), \quad k \geqslant 2$

не имеет в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ максимума и

$$\lim_{\|\mathbf{q}\| \to 0} (\|\mathbf{f}\|^2 / \|\mathbf{q}\|^k) = 0 \tag{3.4}$$

то стационарное движение неустойчиво.

Доказательство теоремы 17 основано на применении метода [12], согласно которому строятся решения системы, асимптотически притягивающиеся к стационарному движению при $t \to \infty$ $(-\infty)$.

Если в следствии теоремы 16 предположить аналитичность $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, то приходим к критерию неустойчивости, эквивалентному теореме 17. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что условие 3) следствия, как выполняющееся автоматически в силу аналитичности L, можно опустить, а в условии 4) заменить показатель степени $m/2 - 1 + \alpha$ на $k/2 - 1$ (см. [32]).

Ясно, что выполнение модифицированного равенства (3.3) влечет выполнение (3.4) и наоборот. Таким образом, и в условиях теоремы 17, хотя ее доказательство получено другим методом, фактически также предполагается, что в окрестности точки $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ гироскопические силы имеют более высокий порядок малости по сравнению с $\partial L_{0k}/\partial \mathbf{q}$ и тем самым выполняют роль малого возмущения натуральных систем.

Теорема 18 [51]. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^h(s_\varepsilon \times R^n)$ $(h > 2)$ и существует такое натуральное число m, $2 < m \leqslant h$, что

$$L_0(\mathbf{q}) = L_{0m} + W$$

где L_{0m} – форма степени m, а функция W в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ имеет более высокий порядок малости. Пусть, кроме того,

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{[s]} + \tilde{\mathbf{f}}$$

где $\mathbf{f}_{[s]} = O(\|\mathbf{q}\|^s)$, $\tilde{\mathbf{f}} = o(\|\mathbf{q}\|^s)$, а натуральное число s принадлежит интервалу $[(m + 2)/2, h]$. Тогда стационарное движение неустойчиво, если форма L_{0m} не имеет на нем максимума.

Справедливость теоремы устанавливается в рамках доказательства теоремы 4.

Поскольку в условиях теоремы 18 имеет место оценка

$$\|\mathbf{f}\|^2 < \lambda \|\mathbf{q}\|^{m+2}, \quad \lambda = \text{const}$$

то $\|\mathbf{f}\|^2/\|\mathbf{q}\|^m = O(\|\mathbf{q}\|^2)$. На основании условия 4 следствия теоремы 16 получаем $\|\mathbf{f}\|^2/\|\mathbf{q}\|^k = O(\|\mathbf{q}\|^\beta)$. Так как число $\alpha \in \,]0, 1[$, то его выбор всегда можно осуществить таким образом, чтобы показатель β удовлетворял неравенству $0 < \beta < 1$. Стало быть, следствие теоремы 16 является усилением теоремы 18.

Теорема 19 [34]. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^1(D \times R^n)$ и при сколь угодно малом числе $\varepsilon > 0$ $(D \supset \bar{s}_\varepsilon)$ выполняются условия:

1) функция $L_0(\mathbf{q})$ допускает представление в виде $L_0(\mathbf{q}) = L_{0k}(\mathbf{q}) + L_{0m}(\mathbf{q}) + R(\mathbf{q})$, $R(\mathbf{q}) = o(\|\mathbf{q}\|^m)$, где $L_{0k}(\mathbf{q})$, $L_{0m}(\mathbf{q})$ – однородные функции соответственно степеней $k > 0$, $m > k$, $L_{0k}(\mathbf{q}) \leqslant 0$;

2) функция W_m (ограничение L_{0m} на множество нулей функции L_{0k}) не имеет в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ максимума;

3) выполнено равенство (3.2);

4) выполнено равенство (3.3).

Тогда стационарное движение неустойчиво.

Следствие. Если $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^{m+1}(D \times R^n)$, то условие *3* теоремы можно опустить, а условие *4* заменить следующим:

$$\lim_{\|\mathbf{q}\| \to 0} (\|\mathbf{f}\|^2 / \|\mathbf{q}\|^m) = 0$$

Доказательство теоремы 19 основывается на представлении исследуемой системы в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial H / \partial \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\partial H / \partial \mathbf{q} + GA^{-1}\mathbf{p} \tag{3.5}$$

$$H = {}^1/_2(\|\mathbf{p}\|^2 + \mathbf{p}^T B(\mathbf{q})\mathbf{p}) - L_0(\mathbf{q}) = h = \text{const}, \quad B(\mathbf{0}) = 0$$

где $G = (g_{ij}) = (\partial f_i/\partial q_j - \partial f_j/\partial q_i)$ – матрица гироскопических сил. Поскольку на основании условий теоремы имеет место представление уравнений (3.5) на множестве нулевого уровня интеграла $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ в форме

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial H / \partial \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \partial(L_{0k} + L_{0m}) / \partial \mathbf{q} + o(\|\mathbf{q}\|^{m-1+\alpha})$$

то применима схема доказательства теоремы 9.

4. О вариационном подходе к вопросам устойчивости консервативных систем. В основе получения приведенных выше результатов по обращению теорем Лагранжа–Дирихле и Рауса лежит применение методов Ляпунова. Для такого подхода существенна структура правых частей соответствующих дифференциальных уравнений, в частности, возможность выделения в области рассматриваемых движений главной части потенциала сил, что удается сделать далеко не во всех случаях. Поэтому предпринимались и другие подходы к исследованию устойчивости. Хагедорн [44] обратился к описанию движения натуральной системы с помощью вариационного уравнения в форме принципа Якоби

$$\delta \int_{\mathbf{q}^{(1)}}^{\mathbf{q}^{(2)}} \sqrt{h - \Pi(\mathbf{q})} \sqrt{d\mathbf{q} A(\mathbf{q}) d\mathbf{q}} = 0$$

что позволило обойти ряд типичных трудностей, связанных с выделением главной части в выражении потенциальной энергии, которые имеют место в процессе применения методов Ляпунова.

Теорема 20 [44]. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^2(D \times R^n)$. Положение равновесия натуральной системы неустойчиво, если потенциальная энергия имеет в нем строгий локальный максимум.

В результате интерпретации задачи устойчивости как краевой задачи показано [44], что в условиях теоремы при постоянной интеграла энергии $h > 0$ существует проходящее через точку $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ решение, которое достигает сферы $\|\mathbf{q}\|^2 = a = \text{const}$, где a не зависит от h, за конечное время.

Теорема 20 обобщает теорему Ляпунова [19], в которой рассматривался аналитический случай ($L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^\omega$), а строгий локальный максимум $\Pi(\mathbf{q})$ в положении равновесия определялся совокупностью членов наинизшего измерения в выражении $\Pi(\mathbf{q})$.

Как выяснилось позднее, теорема 20 сохраняет силу и при нестрогом максимуме $\Pi(\mathbf{q})$ в положении равновесия и $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^1$ [17, 62, 46], а также в случае лагранжиана L, зависящего от времени [4].

Наконец, в работе [60] требование к гладкости лагранжиана L сведено к тому минимуму, когда утверждение о неустойчивости имеет смысл лишь в рамках вариационного описания натуральной системы, позволяющего избежать дифференцирования, определяя равновесие как экстремум $\Pi(\mathbf{q})$.

Теорема 21 [60]. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C(D \times R^n)$. Положение равновесия натуральной системы неустойчиво, если потенциальная энергия имеет в нем локальный максимум.

В отличие от работ [44, 4, 17, 62], где применяются классические методы вариационного исчисления и их современные модификации, при доказательстве теоремы 21 существенно используется возможность преобразования исходной задачи об устойчивости в сугубо геометрическую задачу отыскания геодезических в пространствах с внутренней метрикой. Постановка вопроса в таком виде позволяет применить теорему Ринова ([57], с. 141) о геодезических и заключить на ее основании о существовании траектории в $R^n_{\mathbf{q}}$, соединяющей точку $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ с границей некоторого малого шара $\|\mathbf{q}\|^2 = \eta = \mathrm{const}$, где число η не зависит от h, $h > 0$.

Подход Хагедорна [44] оказалось возможным перенести на исследование устойчивости стационарных движений, заменяя систему (1.1), (3.1) вариационной задачей

$$\int_{\mathbf{q}^{(1)}}^{\mathbf{q}^{(2)}} \left[2\sqrt{h + L_0(\mathbf{q})}\sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{q}'^T A(\mathbf{q})\mathbf{q}'} + \mathbf{f}^T(\mathbf{q})\mathbf{q}' \right] ds = \min, \quad \mathbf{q}' = d\mathbf{q}/ds$$

представляющей принцип наименьшего действия в форме Якоби.

Теорема 22 [45]. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^2(D \times R^n)$. Тогда стационарное движение неустойчиво, если выражение $L_0 - {}^1\!/\!{}_2\mathbf{f}^T A^{-1}\mathbf{f}$ имеет на нем строгий локальный минимум.

Заключение теоремы 22 остается справедливым и в случае, когда лагранжиан L почти периодически зависит от времени t и $L_0 - {}^1\!/\!{}_2\mathbf{f}^T A^{-1}\mathbf{f} \geqslant 0$ в окрестности стационарного движения [4], а также при $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^1$ [17, 18].

Замечание 1. Теореме 22 предшествовал ее более слабый первоначальный вариант [44], в котором присутствовало требование, чтобы функция $L_1 dt$ являлась полным дифференциалом, что характерно для гироскопически несвязанных систем. Важную стимулирующую роль, по-видимому, сыграла опирающаяся на работу [44] статья [8], в которой рассматриваются гироскопически связанные системы. Хотя результат данной статьи и уступает в общности теореме 22, тем не менее он, вероятнее всего, побудил Хагедорна более полно реализовать идею, предложенную в [44], что вылилось в теорему 22.

Поскольку лагранжиан L определяется с точностью до величины $d/dt\,\psi(\mathbf{q})$, то естественно из выражения $L_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ исключить слагаемые, имеющие структуру $d/dt\,\psi(\mathbf{q})$. Именно эти соображения легли в основу следующего результата.

Теорема 23 [64]. Пусть $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^2$ и существует функция $\psi(\mathbf{q}) \in C^3$, такая, что выполняются условия:

1) $\partial\psi/\partial\mathbf{q}|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$;

2) $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\partial\psi/\partial\mathbf{q}} < 0 \quad \forall\mathbf{q} \in s_\varepsilon \backslash \{0\}$,

где $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ – гамильтониан, соответствующий системе (1.1), (3.1).

Тогда стационарное движение неустойчиво.

Заметим, что подбор функции $\psi(\mathbf{q})$ в каждом конкретном случае определяется рассматриваемой задачей, поскольку, действуя случайным образом, условие Хагедорна можно не только улучшить, но и ухудшить. Если $\psi(\mathbf{q}) \equiv 0$, то приходим к теореме 22.

С учетом [17, 18] теорема 23 сохраняет силу, если $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^1$, $\psi(\mathbf{q}) \in C^2$, а условие **2** заменяется на нестрогое неравенство $H(\mathbf{q}, \partial\psi/\partial\mathbf{q}) \leqslant 0 \quad \forall\mathbf{q} \in s_\varepsilon \backslash \{0\}$.

Замечание 2. Для рассматриваемых выше критериев неустойчивости существенно довольно жесткое требование локального максимума функции $\Pi(\mathbf{q})$ в положении равновесия или локального минимума величины $L_0(\mathbf{q}) - {}^1\!/\!{}_2\mathbf{f}^T A^{-1}\mathbf{f}$ на стационарном движении. При этом соответственно максимум и минимум рассматриваемых величин не обязательно являются строгими. Данное требование можно рассматривать как своего рода аналог ограничений, связанных с аналитической структурой лагранжиана, которые обычно налагаются при использовании методов Ляпунова.

Справедливости ради отметим, что хотя конструктивное применение вариационных принципов механики к вопросам исследования устойчивости равновесия, осуществленное в работах Хагедорна и его последователей, относится к сравнительно недавнему времени, сами же истоки такого применения восходят еще к Томсону и Тету [65] и Раусу [59].

5. Применение функции действия по Гамильтону к исследованию устойчивости консервативных систем. 1°. Как известно [1, 42, 54], исходные уравнения (1.1) могут быть получены из условия стационарности действия по Гамильтону

$$\delta S = \delta \int_0^{t_1} L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})d\tau = 0$$

и, стало быть, S можно интерпретировать как носитель информации об исследуемых системах. Учитывая это, заменим в выражении действия S фиксированное значение t_1 на текущее t и будем рассматривать S как характеризующую движение по истинным траекториям системы величину – функцию действия. Тогда, замечая, что лагранжиан L на движениях системы при некоторых дополнительных ограничениях может сохранять знак, а $dS/dt = L$, попытаемся применить функцию действия S для анализа устойчивости, например в качестве аналога функции Ляпунова. При этом, правда, в связи с интегральным характером задания функции действия

$$S = \int_0^t L d\tau \tag{5.1}$$

возникает вопрос о представлении S в форме, которая была бы пригодной для исследования устойчивости.

Чтобы объяснить появляющиеся здесь трудности, обратимся к известному представлению функции действия S в виде главной функции Гамильтона [42, 54].

Рассматривая случай, когда $L=L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^2(D \times R^n)$, подставим в подынтегральное выражение функции действия (5.1) величины

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t,\mathbf{q}_0,\dot{\mathbf{q}}_0), \quad \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(t,\mathbf{q}_0,\dot{\mathbf{q}}_0) \tag{5.2}$$

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t=0), \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\mathbf{q}}(t=0)$$

заменив предварительно в (5.2) t на τ, где $\mathbf{q}(t,\mathbf{q}_0,\dot{\mathbf{q}}_0)$ – общее решение системы (1.1). Интегрируя, находим

$$S = \tilde{S}(\tau,\mathbf{q}_0,\dot{\mathbf{q}}_0)|_0^t \in C^{(1,1,1)}_{t,\mathbf{q}_0,\dot{\mathbf{q}}_0}(I \times s_\delta) \tag{5.3}$$

Здесь I ($I \subseteq R$) – максимальный интервал, на котором вектор $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ принадлежит окрестности $s_\varepsilon = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in D \times R^n, \|\mathbf{q} \oplus \dot{\mathbf{q}}\| < \varepsilon\}$ при условии, что $(\mathbf{q}_0,\dot{\mathbf{q}}_0) \in s_\delta \subset s_\varepsilon$. Учитывая, что ниже речь идет о неустойчивости положения равновесия, без ограничения общности положим $I = R$, поскольку в случае конечного I заведомо имеет место неустойчивость.

Предположим, что якобиан $\partial\mathbf{q} / \partial\dot{\mathbf{q}}_0$ не обращается в нуль. Тогда, разрешая первую группу соотношений (5.2) относительно $\dot{\mathbf{q}}_0$ и подставляя полученный результат в (5.3), приходим к выражению главной функции Гамильтона

$$S = \bar{S}(\tau,\mathbf{q}_0,\mathbf{q}(\tau))|_0^t \subset C^{(1,1,1)}_{t\mathbf{q}_0,\mathbf{q}}(I^* \times s_\eta) \tag{5.4}$$

где $I^* \subseteq I$ – максимальный интервал, на котором вектор $\mathbf{q}$ принадлежит окрестности $s_\eta = \{\mathbf{q}_0, \mathbf{q} \in D, \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\| < \eta\}$ точки $\mathbf{q}_0$. К сожалению, наличие фокальных точек, которым сопутствует обращение якобиана $\partial\mathbf{q} / \partial\dot{\mathbf{q}}_0$ в нуль, может послужить препятствием к представлению функции действия S в форме (5.4). И хотя фокальные точки составляют лебегову меру нуль по отношению к D (области в R^n), тем не менее в значительном числе случаев они не позволяют определить функцию $S(t, \mathbf{q}_0, \mathbf{q})$ во всей окрестности исследуемого положения равновесия.

Аналогичные трудности возникают и в случае, если, следуя Четаеву ([41], с. 237), вместо главной функции Гамильтона использовать решения уравнения Гамильтона–Якоби [5, 6].

Чтобы избежать этих трудностей, разрешим соотношения (5.2) относительно всей совокупности начальных значений $\mathbf{q}_0$ и $\dot{\mathbf{q}}_0$, что всегда осуществимо согласно исходным предположениям в отношении L и I. В этой связи, в частности, отметим, что в гамильтоновых переменных ($\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$) якобиан $\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})/\partial(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ равен единице, что как раз и демонстрирует принципиальное отличие данной ситуации от случая, сопутствующего получению главной функции Гамильтона. В результате, учитывая, что L не зависит от t, на основании (5.2) получаем ([20], с. 347, [54], с. 402)

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(-t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}), \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\mathbf{q}}(-t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \tag{5.5}$$

В связи с (5.5) см. также ([2], с. 104).

Подставляя величины (5.5) в (5.3), имеем

$$S = S^*(\tau,\mathbf{q}(\tau),\dot{\mathbf{q}}(\tau))|_0^t \in C^{(1,1,1)}_{t\mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}}(I\times s_\varepsilon) \tag{5.6}$$

Действие S в виде (5.6), в отличие от главной функции Гамильтона, при учете сделанных выше оговорок определено на всем множестве допустимых движений в окрестности исследуемого положения равновесия. И хотя функция S в представлении (5.6) не обладает многими замечательными свойствами главной функции Гамильтона, в частности, свойством разделяемости переменной t и фазовых переменных в консервативном случае, тем не менее в процессе исследования устойчивости удается установить некоторые важные свойства функции S, позволяющие применить ее в качестве аналога функции Ляпунова.

Если лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ имеет критические точки на множестве ненулевого уровня интеграла Якоби (энергии), то функция действия $S(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, монотонно возрастая (убывая) в данных точках при $t \to \infty$ $(-\infty)$ (или на фазовых траекториях, которые к ним притягиваются), достигает в них, как неподвижных точках фазового пространства, своих предельных значений $\pm\infty$ при $t\in \overline{R} = R\cup\{-\infty,\infty\}$. Поэтому ниже, чтобы избежать усложнений, связанных с данными особенностями функции S, ограничимся рассмотрением класса систем, для которых $\operatorname{grad}L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ не обращается в нуль, по крайней мере, на множестве отрицательных значений интеграла Якоби (энергии).

Переходя непосредственно к критериям неустойчивости равновесия, полученным на основании применения функции действия по Гамильтону, остановимся на основных, представляющих наибольший интерес, в том числе полезных для приложений. При этом будем больше заботиться об идейной стороне вопроса, не преследуя цель перечислить все результаты, относящиеся к данному направлению.

Теорема 24 [30]. Пусть при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ ($D\supset s^*_\varepsilon = \{\mathbf{q}\in R^n,\ \|\mathbf{q}\|\leqslant \varepsilon\}$) выполняются условия:

1) $\omega = \{\mathbf{q} \in s^*_\varepsilon\colon\ \Pi(\mathbf{q}) < 0\} \neq \phi$;

2) $0 \in \partial\omega$;

3) $\partial\Pi/\partial\mathbf{q} \neq \mathbf{0}\quad \forall\mathbf{q}\in s^*_\varepsilon \setminus \partial\omega$.

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ натуральной системы неустойчиво.

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма 2. В условиях теоремы 24 на траекториях системы (1.1), (1.2), принадлежащих множеству $\Omega = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in s_\varepsilon\colon\ T + \Pi = h = 0\}$, функция действия S допускает представление, при котором соответствующая "первообразная" функция $S^*(\tau, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ удовлетворяет соотношению

$$S^*(\tau, \mathbf{q}, -\dot{\mathbf{q}}) = -S^*(\tau, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\forall(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \subset \Omega \tag{5.7}$$

Доказательство. Представляя исходную натуральную систему в виде двух эквивалентных гамильтоновых систем

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial H_i / \partial \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\partial H_i / \partial q, \quad i = 1,2 \tag{5.8}$$

$$H_i = (-1)^{i+1}(^1/_2 \mathbf{p}^T A^{-1} \mathbf{p} + \Pi) = (-1)^{i+1} h, \quad h = \text{const} \tag{5.9}$$

где для удобства используются одинаковые обозначения для зависимых переменных, рассмотрим соответствующие данным системам функции действия по Гамильтону

$$S_i = \int_0^t (\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H_i) d\tau, \quad i = 1,2 \tag{5.10}$$

Поскольку системы (5.8) соответственно при $i = 1,2$ переходят одна в другую при замене p на $(-p)$, а на основании (5.8), (5.9) справедливы равенства

$$\mathbf{p}\,\dot{\mathbf{q}} - H_i = (-1)^{i+1}(^1/_2 \mathbf{p}^T A^{-1} \mathbf{p} - \Pi)$$

то функции S_i согласно (5.10) отличаются лишь знаком, т.е. $S_2 = -S_1$.

Рассмотрим множество $\tilde{\Omega} = \Omega_i = \{(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \tilde{s}_\varepsilon :\ H_i = 0\}$, представля на нем равенства (5.10) в виде

$$S_i = \int_0^t \mathbf{p} d\mathbf{q} \quad \forall (\mathbf{q},\mathbf{p}) \subset \tilde{\Omega} \tag{5.11}$$

Тогда соотношение $S_2 = -S_1$ на $\tilde{\Omega}$ можно интерпретировать как результат замены в подынтегральном выражении равенства (5.11) $\mathbf{p}$ на $(-\mathbf{p})$. Поскольку замена $\mathbf{p}$ на $(-\mathbf{p})$ согласно уравнениям (5.8) эквивалентна замене $\dot{\mathbf{q}}$ на $(-\dot{\mathbf{q}})$, а системы (5.8) эквивалентны (1.1), (1.2), то, стало быть, функция $S^*(\tau, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, как сопутствующая исходной системе (1.1), (1.2), удовлетворяет на множестве Ω равенству (5.7).

Из (5.7), при учете обратимости натуральной системы, следует существование класса проходящих через Ω положительных полутраекторий Γ^+, на котором функция S ограничена, по крайней мере, в пределах рассматриваемой окрестности s_ε, что позволяет применить S в качестве аналога функции Ляпунова (именно аналога, поскольку S никакой классической теореме Ляпунова или ее модификации не удовлетворяет).

Следствие. Пусть в окрестности точки $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ лагранжиан L аналитичен по $\mathbf{q}$. Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ натуральной системы неустойчиво, если в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{q})$ не имеет локального минимума.

Действительно, в данном случае при достаточно малом $\varepsilon > 0$ все критические точки функции $\Pi(\mathbf{q})$ принадлежат множеству $\partial\omega \cap s^*_\varepsilon$ [61], и, стало быть, условия теоремы 24 выполняются.

Замечание 1. Теореме 24 предшествовал ее частный вариант [27], в котором в условии 3 $\partial\omega$ заменяется на $\{0\}$. Тогда удается, кроме того, доказать существование асимптотических к исследуемому положению равновесия движений и тем самым грубую неустойчивость равновесия ([14], с. 102] (в этой связи см. также [28]).

Замечание 2. На первый взгляд может показаться странным, что функция S^* согласно лемме 2 знакопеременна даже в случае знакоопределенности соответствующего лагранжиана в окрестности положения равновесия. Чтобы убедиться, что это действительно так, в качестве иллюстрации леммы приведем пример натуральной системы с одной степенью свободы, лагранжиан которой имеет вид

$$L = \tfrac{1}{2}(\dot{q}^2 + q^2) \tag{5.12}$$

Представляя общее решение соответствующего уравнения движения в форме

$$q = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \tag{5.13}$$

продифференцируем функцию q по t и подставим выражения для q и $\dot q$ в (5.12). Производя интегрирование в (5.1) с использованием выражений (5.12), (5.13), находим

$$S = {}^1\!/_2 (C_1^2 e^{2\tau} - C_2^2 e^{-2\tau})|_0^t$$

Исключая, наконец, постоянные C_1 и C_2 с помощью выражений для q и $\dot q$, получаем

$$S = {}^1\!/_2 q\dot q|_0^t \tag{5.14}$$

что согласуется с леммой 2.

Более того, к аналогичному выражению приходим и в случае линейных систем вида (1.1) с n степенями свободы, в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой или рассматривая тождество

$$L = \dot{\mathbf{q}}\,\mathbf{p} - H = (\mathbf{qp})^{\cdot} + \mathbf{q}\partial H/\partial \mathbf{q} - H = (\mathbf{qp})^{\cdot} - L, \quad \mathbf{p} = \partial L/\partial \dot{\mathbf{q}}$$

Отметим, что функцию $V = \mathbf{qp}$, которая согласно изложенному выше с точностью до постоянной является функцией удвоенного действия по Гамильтону для линейных консервативных систем, при исследовании устойчивости равновесия применял еще Ляпунов [19].

2°. Функцию действия по Гамильтону S можно использовать и для исследования устойчивости стационарных движений (положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1), (3.1)) [29, 31]. Хотя соответствующие уравнения возмущенного движения (1.1), (3.1) не обратимы ($L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \neq L(\mathbf{q}, -\dot{\mathbf{q}})$), это не вносит каких-либо принципиально новых моментов в технику исследования. Просто наряду с лагранжианом $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ в этом случае в техническом плане целесообразно рассматривать также и лагранжиан $L(\mathbf{q}, -\dot{\mathbf{q}})$.

Вместо реализации этой идеи поступим, однако, несколько иным образом. Построим аналог функции Ляпунова в такой форме, чтобы функция действия S содержалась в нем в качестве одной из переменных, вопрос ограниченности (неограниченности) которой уже не является определяющим. На этом пути удается указать нетривиальный пример использования знакопеременной вспомогательной функции со знакопеременной производной, позволяющей тем не менее провести анализ устойчивости равновесия вполне в духе идей второго метода Ляпунова.

Теорема 25 [37]. Пусть при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ ($D \supset \bar{s}_\varepsilon^*$) выполняются условия:

1) $\omega = \{\mathbf{q} \in s_\varepsilon^*\colon L_0(\mathbf{q}) > 0\} \neq \phi$;

2) $0 \in \partial\omega$;

3) $\partial L_0/\partial \mathbf{q} \neq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q} \in \omega$;

4) $L_0 - {}^1\!/_2 \mathbf{f}^T A^{-1} \mathbf{f} \geqslant 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \omega$.

Тогда стационарное движение (положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1), (3.1)) неустойчиво.

Доказательство основано на представлении системы (1.1), (3.1) в гамильтоновой форме и рассмотрении вспомогательной функции $V = \mathbf{qp}(S^2 + 1)^{-1}$ на множестве $\Omega^- = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in s_\varepsilon\colon H = h < 0\}$, которое согласно условию 3 теоремы 25 является многообразием при любом достаточно малом по модулю фиксированном $h < 0$.

Вычисляя производную вдоль векторного поля рассматриваемой системы, имеем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{L}{S^2+1}(1-\lambda) - \frac{\mathbf{q}\partial H/\partial \mathbf{q} - H}{S^2+1}, \quad \lambda = 2\mathbf{qp}\frac{S}{S^2+1} \tag{5.15}$$

и, стало быть, производная dV/dt, исключая некоторые частные случаи, знакопеременна на множестве Ω^-.

В предположении устойчивости положения равновесия и тем самым возвращаемости согласно теореме Пуанкаре ([54], с. 439) почти всех тракторий, принадлежащих Ω^-, проинтегрируем (5.15) вдоль траектории $\overset{+}{\gamma}_1$, которая обладает свойством возвращаемости. В результате получаем равенство

$$\left.\frac{\mathbf{qp}}{S^2+1}\right|_{t_k}^{t_k+\sigma(k)} = \operatorname{arctg} S|_{t_k}^{t_k+\sigma(k)} + o(\operatorname{arctg} S|_{t_k}^{t_k+\sigma(k)}) + \int_{t_k}^{t_k+\sigma(k)} \frac{H-\mathbf{q}\partial H/\partial\mathbf{q}}{S^2+1}dt \tag{5.16}$$

Здесь $\sigma(k)$ означает достаточно малое положительное число, такое, что

$$\gamma_1^+|_{t_k}^{t_k+\sigma(k)} \subset \Omega_1^- = \{(\mathbf{q},\mathbf{p})\in\Omega^-:\ H-\mathbf{q}\partial H/\partial\mathbf{q}>0\} \tag{5.17}$$

В предположениях теоремы 25 удается показать, что $\Omega_1^- \neq \phi$, и на основании (5.16), (5.17) прийти к противоречию, поскольку при $S\to\infty$ $\mathbf{qp}(S^2+1)^{-1} = o(\operatorname{arctg}S)$.

Следствие. Пусть система натуральная ($L_1 \equiv 0$) и при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ ($D \supset \bar{s}_\varepsilon^*$) выполняются условия:

1) $\omega = \{\mathbf{q} \in \overset{*}{s}_\varepsilon:\ \Pi(\mathbf{q}) < 0\} \neq \phi$;

2) $0 \in \partial\omega$;

3) $\partial\Pi/\partial\mathbf{q} \neq \mathbf{0}\quad \forall\mathbf{q}\in\omega$.

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.1), (1.2) неустойчиво.

Замечание 1. Если предположить существование связной компоненты $\omega^* \subset \omega$, для которой $0 \in \partial\omega^*$, то в условиях 3, 4 теоремы 25 можно заменить ω на ω^*.

Замечание 2. Если выражение $L_0 - {}^1/_2\mathbf{f}^TA^{-1}\mathbf{f}$ имеет в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ локальный минимум (не обязательно строгий), то, рассматривая движение системы на множестве

$$\Omega^+ = \{(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in s_\varepsilon:\ H = h > 0\}$$

можно получить усиление результата Хагедорна [45], аналогичное полученному в [4]. Действительно, в этом случае множество Ω^+ является многообразием при любом фиксированном достаточно малом $h > 0$ и без условия 3 теоремы 25, условия же 1, 2 выполняются автоматически.

Функция действия S может также успешно применяться и для исследования устойчивости неголономных систем Чаплыгина [33].

Наконец, отметим, что имеется некоторое сходство между теоремами, полученными с помощью вариационных принципов, и теоремами 24, 25 разд. 5, поскольку в каждом из этих случаев условия теоремы предполагают определенное качество функций $\Pi(\mathbf{q})$, $L_0(\mathbf{q})$ или $L_0(\mathbf{q}) - {}^1/_2\mathbf{f}^TA^{-1}\mathbf{f}$, а не их аналитическую структуру, связанную с выделением главной части, подобно тому, как это имело место в разд. 1–3.

6. Заключение. Подводя итог изложенным выше результатам по обращению теорем Лагранжа–Дирихле и Рауса, можно сказать, что методы Ляпунова продолжают оставаться одним из мощных средств исследования устойчивости консервативных систем. При этом идеи, заложенные в них, допускают дальнейшее совершенствование и развитие в соответствии с задачами, для решения которых они применяются. Показательными в этой связи являются исследования [11–13], которые наряду с работами [15, 16] расширяют возможности первого метода Ляпунова.

Что касается теорем обращения, полученных на основании применения второго метода Ляпунова, особенно теоремы Четаева о неустойчивости, то здесь в процессе построения вспомогательных функций, по возможности использовалась специфика рассматриваемых систем, в частности их консервативность. На основании последней, при отсутствии минимума потенциальной энергии в положении равновесия, в качестве множества, обладающего свойствами абсолютного сектора, оказалось удобным рассматривать множество нулевого уровня интеграла энергии или интеграла Якоби. Данное обстоятельство вносит упрощение в построение функции Ляпунова–Четаева, необходимые свойства которой достаточно относить лишь к множеству, лебегова мера которого равна нулю.

Наконец, применение для исследования устойчивости консервативных систем функции действия по Гамильтону в форме функции, зависящей от времени t и фазовых координат, при всей специфике такого подхода, можно рассматривать как полезный шаг в направлении использования новых возможностей, заложенных во втором методе Ляпунова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
2. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 272 с.
3. *Балитинов М.А.* О неустойчивости положения равновесия гамильтоновой системы // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 557–562.
4. *Болотин С.В., Козлов В.В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1980. № 4. С. 84–89.
5. *Булатович Р.М.* Существование решений уравнения Гамильтона–Якоби в окрестности невырожденных положений равновесия // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 330–333.
6. *Булатович Р.М.* Уравнение Гамильтона–Якоби в областях возможных движений с краем // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 720–727.
7. *Виннер Г.М.* О механизме неустойчивости равновесия натуральных систем // Функциональный анализ и его приложения. 1989. Т. 23. Вып. 1. С. 66–68.
8. *Карапетян А.В.* Об обращении теоремы Рауса // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1973. № 5. С. 65–69.
9. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 6. 132 с.
10. *Козлов В.В.* О неустойчивости равновесия в потенциальном поле // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. № 3. С. 215–216.
11. *Козлов В.В.* Асимптотические решения уравнений классической механики // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 573–577.
12. *Козлов В.В., Паламодов В.П.* Об асимптотических решениях уравнений классической механики // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 2. С. 285–289.
13. *Козлов В.В.* Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа–Дирихле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 928–937.
14. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
15. *Кузнецов А.Н.* Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений // Функц. анализ и его приложения. 1972. Т. 6. Вып. 2. С. 41–51.
16. *Кузнецов А.Н.* О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функц. анализ и его приложения. 1989. Т. 23. Вып. 4. С. 63–74.
17. *Любушин Е.А.* О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум // ПММ. 1980. Вып. 2. С. 221–228.
18. *Любушин Е.А.* Качественный анализ поведения траекторий некоторых механических систем. Автореф. канд. дис. МГУ, 1986. 13 с.

19. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М., Л.: Гостехиздат, 1950. 471 с.
20. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
21. *Пайффер К.* Об обращении теоремы Лагранжа–Дирихле // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 548–554.
22. *Паламодов В.П.* Об устойчивости равновесия в потенциальном поле // Функц. анализ и его приложения. 1977. Т. 11. Вып. 4. С. 42–55.
23. *Румянцев В.В.* Об устойчивости равномерных вращений механических систем // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 6. С. 113–121.
24. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
25. *Румянцев В.В.* Об "Аналитической механике" Лагранжа. Препринт № 421. М.: ИПМ АН СССР, 1989.
26. *Сосницкий С.П.* О некоторых случаях неустойчивости равновесия натуральных систем // Укр. мат. ж. 1985. Т. 37. № 1. С. 124–127.
27. *Сосницкий С.П.* Действие по Гамильтону как аналог функции Ляпунова для натуральных систем // Укр. мат. ж. 1987. Т. 39. № 2. С. 215–220.
28. *Сосницкий С.П.* О грубой неустойчивости равновесия автономных систем // Укр. мат. ж. 1988. Т. 40. № 1. С. 95–101.
29. *Сосницкий С.П.* О грубой неустойчивости равновесия систем с гироскопическими силами // Вопросы устойчивости и управления навигационных систем. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. С. 85–100.
30. *Сосницкий С.П.* Об устойчивости равновесия натуральных систем // Математическое моделирование динамических процессов в системах тел с жидкостью. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. С. 38–43.
31. *Сосницкий С.П.* Об одном признаке неустойчивости равновесия консервативных систем // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 6. С. 68–73.
32. *Сосницкий С.П.* Об асимптотических движениях неголономных систем Чаплыгина // Укр. мат. ж. 1989. Т. 41. № 2. С. 206–210.
33. *Сосницкий С.П.* Об устойчивости неголономных систем Чаплыгина // Укр. мат. ж. 1989. Т. 41. № 8. С. 1100–1106.
34. *Сосницкий С.П.* О неустойчивости равновесия натуральных систем // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1991. С. 48–61.
35. *Сосницкий С.П.* Об устойчивости равновесия консервативных систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 560–564.
36. *Сосницкий С.П.* Об устойчивости равновесия голономных систем // Фильтрация и управление в механических системах. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. С. 98–104.
37. *Сосницкий С.П.* Действие по Гамильтону и устойчивость равновесия консервативных систем // Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. С. 99–106.
38. *Фурта С.Д.* Об асимптотических решениях уравнений движения механических систем // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 938–944.
39. *Четаев Н.Г.* К вопросу об обращении теоремы Лагранжа // Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та. 1934. № 2. С. 29–30.
40. *Четаев Н.Г.* О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 89–93.
41. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
42. *Четаев Н.Г.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 367 с.
43. *Bulatovic R.* On the converse of the Lagrange-Dirichlet theorem // C.r. Acad. sci. Paris. Ser. 2. 1992. V. 315. N 1. P. 1–6.
44. *Hagedorn P.* Die Umkehrung der Stabilitätssätze von Lagrange-Dirichlet und Routh // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1971. V. 42. N 4. P. 281–316.

45. *Hagedorn P.* Über die Instabilität konservativer Systeme mit gyroskopischen Kräften // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1975. V. 58. N 1. P. 1–9.
46. *Hagedorn P., Mawhin J.* A simple variational approach to a converse of the Lagrange-Dirichlet theorem // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1992. v. 120. N 4. P. 327–335.
47. *Koiter W.T.* On the instability of equilibrium in the absence of a minimum of potential energy // Proc. Kon. ned. akad. wet. 1965. B. 68. N 3. P. 107–113.
48. *Lagrange J.-L.* Mécanique analitique. Paris: Desaint, 1788. 512 p. = В 2-х т. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. Т. 1. 594 с.; Т. 2. 440 с.
49. *Lejeune-Dirichlet G.* Bedingungen der Stabilität der Gleichgewichtslagen // J. Reine und Angew. Math. 1846. Bd. 32. S. 85–88.
50. *Maffei C., Moauro V., Negrini P.* On the inversion of the Lagrange-Dirichlet theorem in a case of nonhomogeneous potential // Diff and Integr. Equat. 1991. V. 4. N 4. P. 767–782.
51. *Moauro V., Negrini P.* On the inversion of Lagrange-Dirichlet theorem // Universita degli studi di Trento. (Preprint), 1988. 10 p.
52. *Moauro V., Negrini P.* On the inversion of Lagrange-Dirichlet theorem // Diff. and Integr. Equat. 1989. v. 2, N 4. P. 471–478.
53. *Painlevé P.* Sur la stabilité de l'équilibre // C.r. Acad. sci. Paris, 1904. V. 138. P. 1555–1557.
54. *Pars L.A.* A treatise on analytical dynamics. London; Heinemann, 1965. 641 p. = М.: Наука, 1971. 635 с.
55. *Peiffep K., Carlie P.* A remark on the inversion of Lagrange-Dirichlet s theorem // Semin. math. Inst. math. pure et appl. Univ. cathol. Louvain. 1988–1989. N 2–1. P. 59–73.
56. *Peiffep K., Carlie P.* A remark on the inversion of Lagrange-Dirichlet's theorem // Qualitat. Theory Differ. Equat.: 3 rd Colloq., Szeged, 1988. Amsterdam: North-Holland, 1990. P. 473–484.
57. *Rinow W.* Die innere Geometrie der metrischen Räume. Berlin: Springer Verlag, 1961. 520 S.
58. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability theory by Liapunov's direct method. New York; Heidelberg; Berlin: Springer–Verlag, 1977. 396 p = М.: Мир, 1980. 300 с.
59. *Routh E.J.* A treatise on stability of a given state of motion. London: McMilland and Co, 1892. 224 p.
60. *Sofer M.* On the inversion of the Lagrange-Dirichlet stability theorem-mechanical and generalised systems // ZAMP. 1983. V. 34. N 1. P. 1–12.
61. *Souček J., Souček V.* Morse-Sard theorem for real-analytic functions // Comment. Math. Univ. Carol. 1972. V. 13. N 1. P. 45–51.
62. *Taliaferro S.D.* An inversion of the Lagrange-Dirichlet stability theorem // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1980. V. 73. N 2. P. 183–190.
63. *Taliaferro S.D.* Instability of an equilibrium in a potential field // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1990. V. 109. N 2. P. 183–194.
64. *Teschner W.* Zur Instabilität konservativer Systeme mit gyroskopischen Kräften // Z. angew. Math. und Mech. 1977. V. 57. № 5. S. 92–94.
65. *Thomson W., Tait P.* Treatise on natural phylosophy. V. 1. Oxford: Clarendon Press, 1867. 727 p.
66. *Whittaker E.T.* A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. New York: Dover, 1944. 456 p.= М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
67. *Wintner A.* The analytical foundations of celestial mechanics. Princeton: Univ. Press. 1941. 448 p.= М.: Наука, 1967. 523 с.

Москва, Киев

Поступила в редакцию
27.VII.1992