ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, Вып. 6, 1993

УДК 531.36

© 1993 г. Т.К. Сиразетдинов, Ш.Ш. Хузятов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Методом функций Ляпунова исследуется устойчивость процессов, описываемых системой линейных уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом (например, магнитогидродинамические процессы, упругие колебания летательного аппарата и т.п.). Часть уравнений системы может не содержать производных по времени (например, уравнение неразрывности – при описании движения несжимаемой жидкости, уравнение для вектора магнитной индукции – в теории электромагнитных явлений). Такие уравнения появляются также при снижении порядка уравнения в частных производных путем введения новых обозначений для производных по пространственным координатам. Разработан метод исследования устойчивости процессов, описываемых такой системой, часть уравнений которой не содержит производных по времени. Предложены два варианта построения функций Ляпунова в виде различных интегральных квадратичных форм. Получены достаточные условия устойчивости, которые представлены в виде неравенств, связывающих коэффициенты системы. В качестве примера рассмотрена устойчивость колебаний натянутой струны в вязкоупругой среде под действием распределенной управляющей силы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим возмущенный процесс с распределенными параметрами, описываемый следующей системой линейных уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = A(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} + A_0(x)\varphi + B_0(x)\psi + Q(x)\varphi_\tau \tag{1.1}$$

$$C(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + D(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} + C_0(x)\varphi + D_0(x)\psi = 0 \tag{1.2}$$

$$t \in [t_0, \infty), \quad x \in (0, 1), \quad \varphi = \varphi(x, t), \quad \varphi_\tau = \varphi(x, t-\tau)$$

где φ, φ_τ – n-мерные векторы фазовых функций, $\psi = \psi(x, t)$ – m-мерный вектор фазовых функций, производная которого по времени в систему (1.1), (1.2) не входит, $A(x)$, $A_0(x)$, $B(x)$, $B_0(x)$, $C(x)$, $C_0(x)$, $D(x)$, $D_0(x)$, $Q(x)$ – матрицы, элементы которых принадлежат классу абсолютно непрерывных функций, τ – величина запаздывания аргумента t.

Предположим, что начальные значения вектор-функции $\varphi(x, t)$ принадлежат пространству $L_2([0, 1] \times [t_0 - \tau, t_0])$, а на концах $x = 0$, $x = 1$ интервала (0, 1) заданы однородные граничные условия:

$$\alpha_0\varphi(0, t) + \beta_0\psi(0, t) = 0, \quad \alpha_1\varphi(1, t) + \beta_1\psi(1, t) = 0 \tag{1.3}$$

где α_i, β_i ($i = 0, 1$) – матрицы, элементы которых – непрерывные ограниченные функции времени.

Решение системы (1.1)–(1.3) рассматривается в классе абсолютно непрерывных функций по переменной x.

Введем меру отклонения возмущенного процесса от невозмущенного процесса $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ в произвольный момент времени $t \geqslant t_0$:

$$\rho[\varphi(\cdot,t)] = \int_0^1 \varphi^T(x,t)\varphi(x,t)dx \tag{1.4}$$

и меру $\rho_0[\varphi]$, стесняющую начальные возмущения.

Определение 1. Мера $\rho[\varphi]$ называется непрерывной в момент времени $t = t_0$ по мере $\rho_0[\varphi]$ при $\rho_0[\varphi] = 0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что неравенство $\rho[\varphi] < \varepsilon$ будет выполняться при $\rho_0[\varphi] < \delta$ и $t = t_0$.

В дальнейшем примем, что мера $\rho[\varphi]$ непрерывна по мере $\rho_0[\varphi]$ при $t = t_0$ и $\rho_0[\varphi] = 0$. Например, этому условию удовлетворяют следующие начальные меры:

$$\rho_{01}[\varphi] = \sup_{s\in[t_0-\tau,t_0]} \rho[\varphi(\cdot,s] \tag{1.5}$$

$$\rho_{02}[\varphi] = \rho[\varphi(\cdot,t_0)] + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \rho[\varphi(\cdot,s]ds \tag{1.6}$$

которые будем использовать при рассмотрении конкретных задач.

Определение 2. Невозмущенный процесс $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ называется устойчивым по двум мерам $\rho[\varphi]$ и $\rho_0[\varphi]$, если для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех допустимых начальных распределений, удовлетворяющих условию $\rho_0[\varphi] < \delta$, в любой момент времени $t \geqslant t_0$ справедливо неравенство $\rho[\varphi] < \varepsilon$.

Модифицируя метод функций Ляпунова, получим достаточные условия устойчивости решения $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ системы (1.1)–(1.3) по двум мерам $\rho[\varphi]$ и $\rho_0[\varphi]$. В отсутствие запаздывания, т.е. при $Q(x) \equiv 0$, достаточные условия устойчивости нулевого решения системы (1.1)–(1.3) по мере $\rho[\varphi]$ были получены ранее [1].

Особенностью этой системы является то, что уравнение (1.2) не содержит производных по времени t. Это не позволяет непосредственно вычислить производную по времени от функции Ляпунова вдоль процесса, описываемого этой системой. Здесь используем подход, который по своей процедуре аналогичен методу множителей Лагранжа в вариационных задачах. Изложим этот подход, используя различные виды функций Ляпунова.

2. Первый способ построения функций Ляпунова. Здесь используем идею, развитую [2] для исследования устойчивости систем с сосредоточенными параметрами и запаздыванием и распространенную [3] на задачи устойчивости систем с распределенными параметрами и запаздыванием.

Для решения поставленной задачи используем функцию

$$V[\varphi(\cdot,t)] = \int_0^1 \varphi^T(x,t)\upsilon(x)\varphi(x,t)dx \tag{2.1}$$

где $\upsilon(x)$ – матрица, элементы которой принадлежат классу абсолютно непрерывных функций. Вычислим производную dV/dt в силу уравнения (1.1):

$$\frac{dV}{dt}=\int\limits_0^1\left\{\varphi^T(\upsilon A_0+A_0^T\upsilon)\varphi+\varphi^T\upsilon A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi^T}{\partial x}A^T\upsilon\varphi+\right.$$

$$\left.+\varphi^T\upsilon B\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi^T}{\partial x}B^T\upsilon\varphi+\varphi^T\upsilon B_0\psi+\psi^T B_0^T\upsilon\varphi+2\varphi^T\upsilon Q\varphi_\tau\right\}dx \tag{2.2}$$

Для учета уравнения (1.2) к выражению (2.2) прибавим равенство

$$\int\limits_0^1\left\{(\varphi^T P_1+\psi^T P_2)\left[C\frac{\partial\varphi}{\partial x}+D\frac{\partial\psi}{\partial x}+C_0\varphi+D_0\psi\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial\varphi^T}{\partial x}C^T+\frac{\partial\psi^T}{\partial x}D^T+\varphi^T C_0^T+\psi^T D_0^T\right](P_1^T\varphi+P_2^T\psi)\right\}dx=0$$

где $P_1=P_1(x)$, $P_2=P_2(x)$ – пока произвольные матрицы, элементы которых принадлежат классу абсолютно непрерывных функций.

Выполним интегрирование по частям и потребуем, чтобы матрицы P_1, P_2, υ удовлетворяли условиям

$$\begin{gathered}\upsilon A+P_1C=(\upsilon A+P_1C)^T,\quad P_2D=(P_2D)^T\\ d/dx(P_2D)=P_2D_0+(P_2D_0)^T,\quad \upsilon B+P_1D=(P_2C)^T\\ d/dx(\upsilon B+P_1D)=\upsilon B_0+P_1D_0+(P_2C_0)^T,\quad x\in(0,1)\\ [\varphi_T(\upsilon A+P_1C)\varphi+2\varphi^T(\upsilon B+P_1D)\psi+\psi^TP_2D\psi]_0^1=0\end{gathered} \tag{2.3}$$

Тогда

$$\frac{dV}{dt}=-\int\limits_0^1(\varphi^T\omega\varphi-2\varphi^T\upsilon Q\varphi_\tau)dx \tag{2.4}$$

где

$$\omega=\omega(x)=d/dx(\upsilon A+P_1C)-(\upsilon A_0+P_1C_0)-(\upsilon A_0+P_1C_0)^T \tag{2.5}$$

Очевидно, что производная dV/dt из-за наличия билинейной формы $\varphi^T\upsilon Q\varphi_\tau$ при произвольных значениях вектора φ_τ является знакопеременной формой. Поэтому здесь используем теорему об устойчивости [2, 3], согласно которой знакоопределенность производной dV/dt достаточно проверить только для векторов φ_τ, принадлежащих некоторой замкнутой области.

Из этой теоремы следует, что решение $\varphi\equiv\psi\equiv 0$ системы (1.1)–(1.3) будет устойчивым по двум мерам $\rho[\varphi]$ и $\rho_0[\varphi]$, если:

а) функция $V[\varphi]$ непрерывна по мере $\rho_0[\varphi]$ при $t=t_0$ и определенно положительная по мере $\rho[\varphi]$;

б) производная dV/dt (2.4) на множестве состояний, удовлетворяющих неравенству $V[\varphi(\cdot,s)]\leqslant V[\varphi(\cdot,t)]$ при $s\in[t-\tau,t]$, $t\geqslant t_0$, неположительна.

Пусть элементы матрицы $\upsilon=\upsilon(x)$ – ограниченные функции. Тогда из неравенства

$$V[(\varphi(\cdot,s)]\leqslant\int\limits_0^1\lambda_{\max}(x)\varphi^T(x,s)\varphi(x,s)dx\leqslant\sup_{x\in[0,1]}\lambda_{\max}(x)\rho_{01},\quad s\in[t_0-\tau,t_0] \tag{2.6}$$

следует непрерывность функции $V[\varphi]$ по мере $\rho_{01}[\varphi]$ (здесь $\lambda_{max}(x)$ – максимальное собственное число матрицы $\upsilon(x)$ в точке $x \in [0, 1]$). Заметим, что для произвольных функций $\varphi(x, s)$ из пространства $L_2([0, 1] \times [t_0 - \tau, t_0])$ функция $V[\varphi]$ не является непрерывной по мере $\rho_{02}[\varphi]$ (см. определение непрерывности в [3]), и поэтому в данном разделе устойчивость нулевого решения рассмотрим по мере $\rho[\varphi]$ и $\rho_{01}[\varphi]$.

Если подынтегральная квадратичная форма $\varphi^T\upsilon(x)\varphi$ определенно положительна при всех $x \in [0, 1]$ и элементы матрицы $\upsilon(x)$ непрерывны, то выполняется условие определенной положительности функции $V[\varphi]$ по мере $\rho[\varphi]$. Справедливость этого утверждения вытекает из неравенства

$$V \geqslant \int_0^1 \lambda_{\min}(x)\varphi^T(x,t)\varphi(x,t)dx \geqslant \inf_{x\in[0,1]} \lambda_{\min}(x)\rho[\varphi] \tag{2.7}$$

($\lambda_{\min}(x)$ – минимальное собственное число матрицы $\upsilon(x)$ в точке $x \in [0, 1]$).

Таким образом, если элементы матрицы $\upsilon(x)$ непрерывны и ограничены и квадратичная форма $\varphi^T\upsilon(x)\varphi$ определенно-положительна при всех $x \in [0, 1]$, то выполняется условие *а* теоремы об устойчивости.

Условие *б*) этой теоремы будет выполняться, если для соответствующей подынтегральной формы в равенстве (2.5) справедливо неравенство

$$\varphi^T\omega(x)\varphi - 2\varphi^T\upsilon(x)Q(x)\varphi_\tau \geqslant 0, \quad x \in [0, 1] \tag{2.8}$$

при условии

$$\varphi_\tau^T\upsilon(x)\varphi_\tau \leqslant \varphi^T\upsilon(x)\varphi, \quad x \in [0, 1] \tag{2.9}$$

Исследуя на условный экстремум билинейную форму $\varphi^T\upsilon Q\varphi_\tau$ относительно φ_τ при условии (2.9), получим оценку

$$|\varphi^T\upsilon Q\varphi_\tau| \leqslant [\varphi^T\upsilon\varphi \cdot \varphi^T N(x)\varphi)]^{1/2}, \quad N(x) = \upsilon Q\upsilon^{-1}Q^T\upsilon$$

и неравенство (2.8) при условии (2.9) запишем в виде

$$\varphi^T\omega(x)\varphi - 2[\varphi^T\upsilon(x)\varphi \;\; \varphi^T N(x)\varphi]^{1/2} \geqslant 0, \quad x \in [0,1] \tag{2.10}$$

Если лементы матрицы Q рассматривать как параметры, то из (2.10) следует, что область устойчивости в пространстве параметров задается неравенством

$$\max_{\varphi} \frac{\varphi^T\upsilon(x)\varphi \;\; \varphi^T N(x)\varphi}{(\varphi^T\omega(x)\varphi)^2} \leqslant \frac{1}{4}, \quad x \in [0,1] \tag{2.11}$$

Максимум рассматриваемой функции зависит только от направления вектора φ. В справедливости этого утверждения можно убедиться, если вектор φ представить в виде $\varphi = R\xi$, $\xi^T\xi = 1$, где ξ – вектор направляющих косинусов, $R = (\varphi^T\varphi)^{1/2}$ – длина вектора, и подставить в (2.11).

Далее, используя экстремальные свойства регулярных пучков квадратичных форм [4] вида

$$\varphi^T\upsilon\varphi/\varphi^T\omega\varphi \leqslant \lambda$$

получим более удобную при практическом использовании, но несколько грубую оценку

$$\lambda(x)\lambda_\tau(x) \leqslant \frac{1}{4}, \quad x \in [0, 1] \tag{2.12}$$

где $\lambda = \lambda(x)$, $\lambda_\tau = \lambda_\tau(x)$ – максимальные собственные числа соответственно матриц $\omega^{-1}(x)\upsilon(x)$ и $\omega^{-1}(x)N(x)$ в точке $x \in [0, 1]$.

Таким образом, с использованием функции Ляпунова вида (2.1) получены достаточные условия устойчивости нулевого решения системы (1.1)–(1.3) в виде неравенств (2.11) и (2.12).

3. Второй способ построения функций Ляпунова. При разработке этого метода [3, 5] предлагалось вместо функций Ляпунова рассматривать обладающие аналогичными свойствами функционалы. Здесь применим его для получения достаточных условий устойчивости нулевого решения системы (1.1)–(1.3).

Зададимся функционалом V_τ в виде суммы двух интегральных квадратичных форм:

$$V_\tau = \int_0^1 \varphi^T(x,t)\upsilon(x)\varphi(x,t)dx + \int_{t-\tau}^{t}\int_0^1 \varphi^T(x,s)F(x)\varphi(x,s)dxds \tag{3.1}$$

Вычислим производную dV_τ/dt в силу системы (1.1)–(1.3). Для этого проводим аналогичные преобразования, как и в разд. 2, и получим

$$\frac{dV_\tau}{dt} = -\int_0^1 [\varphi^T(\omega - F)\varphi - 2\varphi^T\upsilon Q\varphi_\tau + \varphi_\tau F\varphi_\tau]dx \tag{3.2}$$

Функция $\omega = \omega(x)$ определяется равенством (2.5).

Согласно методу функции Ляпунова [3], нулевое решение системы (1.1)–(1.3) будет асимптотически устойчивым по двум мерам $\rho[\varphi]$ и $\rho_0[\varphi]$, если:

а) Функционал V_τ непрерывен по мере $\rho_0[\varphi]$ при $t = t_0$ и определенно-положителен по мере $\rho[\varphi]$;

б) производная dV_τ/dt определенно отрицательна.

Пусть элементы матрицы $\upsilon(x)$ и $F(x)$ – ограниченные функции. Тогда из неравенства

$$V_\tau \leq \sup_{x\in[0,1]} \lambda^\upsilon(x)\rho[\varphi(\cdot,t_0)] + \sup_{x\in[0,1]} \lambda^F(x) \int_{t_0-\tau}^{t_0} \rho[\varphi(\cdot,s)]ds$$

следует непрерывность функционала V_τ по мере $\rho_0[\varphi]$. Здесь $\lambda^\upsilon(x)$, $\lambda^F(x)$ – максимальные собственные числа матриц υ и F в точке $x \in [0, 1]$.

Пусть подынтегральная квадратичная функция $\varphi^T\upsilon(x)\varphi$ определенно положительна при всех $x \in [0, 1]$ и элементы матрицы $\upsilon(x)$ непрерывны, а квадратичная форма $\varphi^T F\varphi$ неотрицательна. Тогда из неравенства (2.7) следует определенная положительность функционала V_τ по мере $\rho[\varphi]$. Таким образом, получили достаточные условия для выполнения условия а).

Условие б) этого утверждения будет выполняться, если в равенстве (3.2) подынтегральная квадратичная функция $2n$-переменных определенно-положительна при всех $x \in [0, 1]$, т.е.

$$V_1[\varphi, \varphi_\tau] = \varphi^T(\omega - F)\varphi - 2\varphi^T\upsilon Q\varphi_\tau + \varphi_\tau^t F\varphi_\tau > 0, \quad x \in [0, 1] \tag{3.3}$$

Заметим, что для выполнения этого неравенства необходимо выполнение следующих условий:

$$\varphi^T(\omega - F)\varphi > 0, \quad \varphi_\tau^T F\varphi_\tau > 0 \tag{3.4}$$

Введем блочную матрицу

$$M = \| m_{ij} \| = \begin{Vmatrix} \omega - F & -\upsilon Q \\ -(\upsilon Q)^T & F \end{Vmatrix} \quad (i,j = 1,2,\ldots,2n)$$

Согласно критерию Сильвестра, необходимым и достаточным условием определенно-положительности формы $V_1[\varphi, \varphi_\tau]$ (3.3) является положительность угловых главных миноров матрицы M. Это условие требует раскрытия большого числа определителей. Поэтому здесь используем рекуррентный критерий определенной положительности квадратичных форм [6].

Согласно этому критерию, для определенной положительности квадратичной формы $V_1[\varphi, \varphi_\tau]$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$m_{ii}(x) - \sum_{k=1}^{i-1} n_{ki}^2(x) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2n), \qquad x \in [0,1] \tag{3.5}$$

причем функции $n_{ij}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n;\, j \geqslant i)$ вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$n_{ii}(x) = \pm\left[m_{ii}(x) - \sum_{k=1}^{i-1} n_{ki}^2(x)\right]^{1/2}$$

$$n_{ij}(x) = \frac{1}{n_{ii}(x)}\left[m_{ij}(x) - \sum_{k=1}^{i-1} n_{ki}(x) n_{kj}(x)\right]; \quad n_{ij}(x) \equiv 0, \quad j < i$$

4. Пример. Рассмотрим устойчивость колебаний натянутой струны в вязкоупругой среде под действием распределенной управляющей силы

$$\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2} - a\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} - b\varphi(x,t) + U \tag{4.1}$$

$$x \in (0, 1), \quad t \geqslant t_0$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0 \tag{4.2}$$

где $a\partial\varphi(x, t)/\partial t$, $b\varphi(x, t)$ – слагаемые, учитывающие действие на струну соответственно диссипативных сил и потенциальных сил упругости. Предположим, что $U = -c\varphi(x, t - \tau)$, т.е. управление осуществляется по обратной связи, где τ – величина запаздывания сигнала при прохождении через обратную связь. Здесь a, b – соответственно безразмерные коэффициенты сопротивления и упругости среды, c – безразмерный коэффициент усиления сигнала в обратной связи.

Заметим, что уравнением (4.1) описываются также крутильные колебания летательного аппарата, но при других граничных условиях.

Вводя новые переменные $\varphi_1 = \varphi(x, t)$, $\varphi_2 = \partial\varphi_1/\partial t$, $\varphi_3 = \partial\varphi_1/\partial x$ и учитывая условия интегрируемости [7] $\partial\varphi_3/\partial t = \partial\varphi_2/\partial x$, получим систему

$$\partial\varphi_1/\partial t = \varphi_2, \quad \partial\varphi_2/\partial t = \partial\varphi_3/\partial x - a\varphi_2 - b\varphi_1 - c\varphi_1(x, t - \tau) \tag{4.3}$$

$$\partial\varphi_3/\partial t = \partial\varphi_2/\partial x, \quad \partial\varphi_1/\partial x - \varphi_3 = 0$$

эквивалентную уравнению (4.1). Эту систему, вводя обозначения

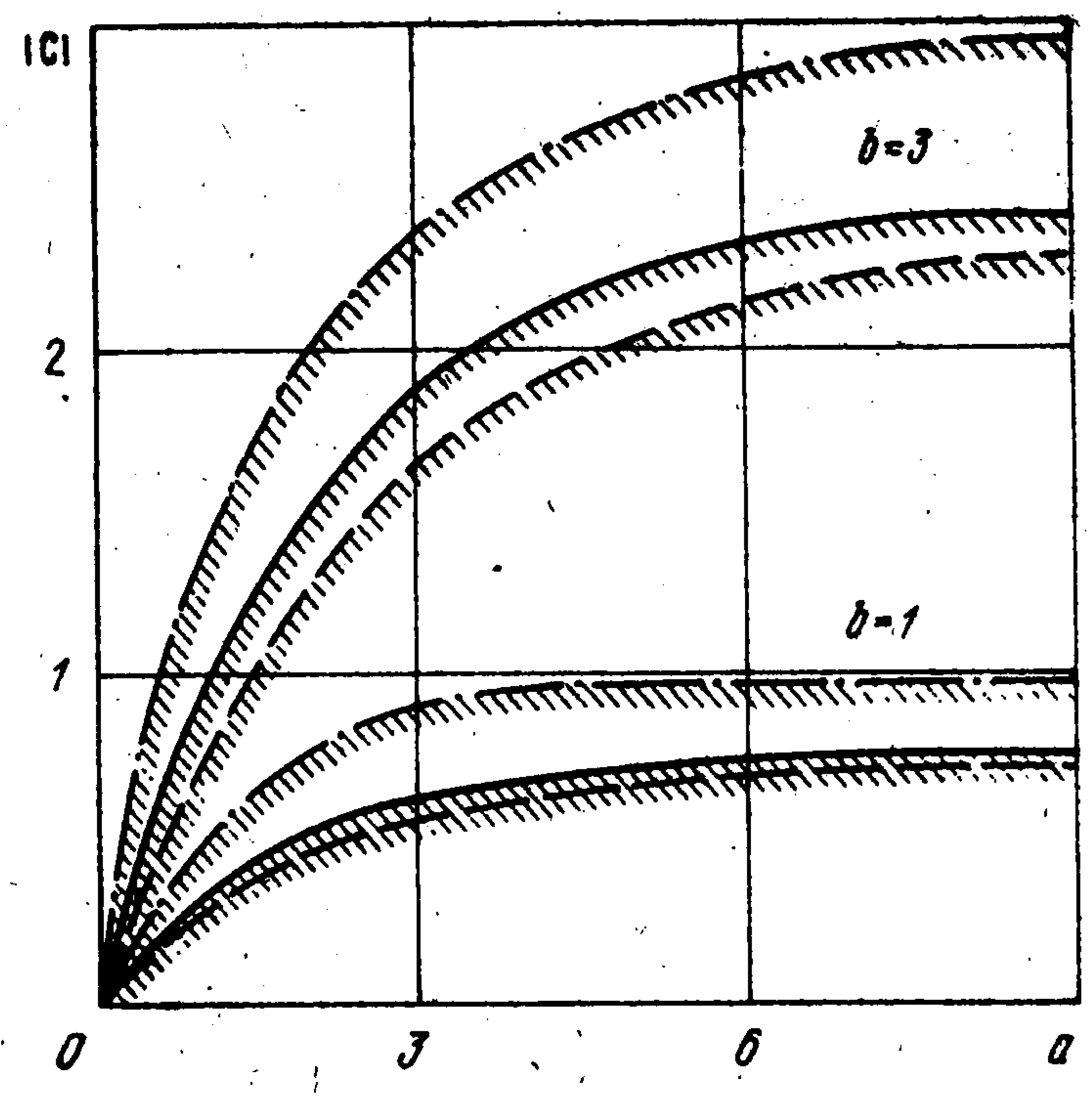
$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$C = \| 1 \quad 0 \quad 0 \|, \quad C_0 = \| 0 \quad 0 \quad -1 \|$$

запишем в виде (1.1) и (1.2), где $B = B_0 = D = D_0 = 0$.

Для получения достаточных условий устойчивости решения $\varphi \equiv 0$ системы (4.1), (4.2) вначале используем функцию Ляпунова в виде (2.1), а именно

$$V = \gamma\int_0^1 (\upsilon_{11}\varphi_1^2 + 2\upsilon_{12}\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)dx \tag{4.4}$$



где $\upsilon_{11} > 0, \upsilon_{12}, \gamma$ – произвольные постоянные. Вычислим производную dV/dt в силу уравнений (4.2), и (4.3) по изложенной методике. Для данного примера первое и последнее условия (2.3) примут вид

$$\upsilon A + P_1 C = (\upsilon A + P_1 C)^T, \quad \varphi^T(\upsilon A + P_1 C)\varphi|_0^1 = 0 \tag{4.5}$$

Если принять, что $P_1 = \|p_1 \quad 0 \quad \upsilon_{12}\|$, $P_2 = \|0\|$, то, учитывая граничные условия (4.2), заключаем, что выполняются условия (4.5). При этом матрица ω, согласно равенству (2.5), примет вид

$$\omega = \begin{Vmatrix} 2b\upsilon_{12} & b + a\upsilon_{12} - \upsilon_{11} & p_1 \\ b + a\upsilon_{12} - \upsilon_{11} & 2(a - \upsilon_{12}) & 0 \\ p_1 & 0 & 2\upsilon_{12} \end{Vmatrix}$$

Для простоты расчетов примем $b\upsilon_{12} = a - \upsilon_{12}$, $\upsilon_{11} = b + a\upsilon_{12}$ $\gamma = (b+1)/(2b)$, $p_1 = 0$. Тогда матрицы, входящие в выражения (2.1), (2.5) и (2.9) примут вид

$$\upsilon = \frac{b+1}{2b}\begin{Vmatrix} b + a\eta & \eta & 0 \\ \eta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad N = \frac{c^2(b+1)}{2b^2(1+\eta^2)}\begin{Vmatrix} \eta^2 & \eta & 0 \\ \eta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\omega = a\,\mathrm{diag}\{1, 1, 1/b\}, \quad \eta = a/(b+1)$$

Подставляя их в (2.11), получим неравенство, определяющее область устойчивости в пространстве параметров (a, b, c):

$$\frac{c^2}{b^2\eta^2(1+\eta^2)}\max_{\varphi\in S}\frac{[(b+a\eta)\varphi_1^2 + 2\eta\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2](\eta\varphi_1 + \varphi_2)^2}{(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2/b)^2} \leq 1 \tag{4.6}$$

(S – сфера единичного радиуса). При заданных a и b максимум этой функции в компакте S можно определить методами численной оптимизации.

Для значений $b = 1$ и $b = 3$ границы области устойчивости в плоскости параметров (a, c), определяемые неравенством (4.6), приведены на фигуре сплошными линиями.

Получим теперь область устойчивости в плоскости параметров (a, c), используя более грубую оценку – неравенство (2.12).

Получим

$$\lambda = \frac{1 + b + a\eta + [(b + a\eta - 1)^2 + 4\eta^2]^{1/2}}{4b\eta}, \quad \lambda_\tau = \frac{c^2}{2\eta b^2}$$

Тогда, согласно (2.12), область устойчивости задается неравенством

$$c^2 \leq \frac{2b^3\eta^2}{1+b+a\eta+[(b+a\eta-1)^2+4\eta^2]^{1/2}} \tag{4.7}$$

На фигуре граница области устойчивости, определенная этим неравенством, показана штриховой линией. Видно, что это неравенство дает несколько суженную область устойчивости. Но заметим, что при $a \to \infty$ оба неравенства. определяющие области устойчивости, дают одинаковые предельные значения $c_\infty = b/(b+1)$.

Теперь используем функционал вида V_τ (3.1), для определения области асимптотической устойчивости по мере $\rho[\varphi]$ и $\rho_0[\varphi]$ в пространстве параметров (a, b, c). Матрицы υ и F построим в виде

$$\upsilon = \frac{1}{2\gamma}\begin{Vmatrix} b+\nu a^2 & \nu a & 0 \\ \nu a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad F = \frac{a}{\gamma}\operatorname{diag}\{f_1, f_2, f_3\}$$

где $\gamma, \nu, f_1, f_2, f_3$ – пока произвольные неотрицательные постоянные.

Тогда, используя рекуррентный критерий (3.5), получим неравенство, определяющее область устойчивости

$$c^2 \leq \max_{\substack{0\leq\nu\leq1 \\ 0\leq f_1\leq\nu b}} 4(1-\nu)a^2\frac{f_1(\nu b-f_1)}{a^2\nu^2(1-\nu)+(\nu b-f_1)} \tag{4.8}$$

Были проведены расчеты на ЭВМ при $b = 1$ и $b = 3$ и разных значениях a. Граница области устойчивости на фигуре показана штрихпунктирной линией. Видно, что в данном случае область устойчивости шире, чем определенная предыдущими методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Байрамов Ф.Д., Сиразетдинов Т.К.* Условие знакоопределенности интегральных квадратичных форм и устойчивость систем с распределенными параметрами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 567–575.
2. *Разумихин Б.С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 500–512.
3. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 231 с.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
5. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
6. *Сиразетдинов Т.К., Аминов А.Б.* К задаче построения функций Ляпунова при исследовании устойчивости в целом решения систем с полиноминальной правой частью // Метод функции Ляпунова и его приложения. Новосибирск: Наука, 1984. С. 72–87.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 831 с.

Казань

Поступила в редакцию
11. XI.1992